

**שימור ושינוי**  
**תובנות אלגבריות**  
**בעולם המספרים והצורות**

**איליה סיניצקי**

**בת שבע אילני**

**Variant and Invariant.**  
**Algebraic Insight into Numbers and Shapes**

Ilya Sinitsky, Bat Sheva Ilany

**המחברים:**

פרופ' איליה סיניצקי, המכללה האקדמית לחינוך גורדון, חיפה  
שאגן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך  
ד"ר בת-שבע אילני, המכללה האקדמית בית ברל  
המכללה האקדמית לחינוך חמדת הדרום

**הוצאת הספרים של מכון מופ"ת**

**עריכה ראשית:** ד"ר יהודית שטיימן

**קריאת מומחים:** פרופ' דוד בן-חיים

פרופ' אביקם גזית

**עריכת תוכן ולשון:** שמוליק אבידר

**עיצוב גרפי:** דניאל בריסקמן

**איורים בפתיחת הפרקים:** ויטלי צ'רניקוב

**עיצוב העטיפה:** מאיה זמר-סמבול

**איור העטיפה:** דוד סיניצקי

© כל הזכויות שמורות למכון מופ"ת, תשע"ד/2014  
טל' 03-6901406 <http://www.mofet.macam.ac.il>

**הדפסה:** אופסט טל בע"מ

## תוכן עניינים

9	פתח דבר
11	רשימת מקורות
12	מבנה הספר
<b>פרק 1: ידע מתמטי, חשיבה אלגברית</b>	
15	<b>והיבטים של שימור ושינוי</b>
17	<b>שימור ושינוי כמאפיינים כלליים של תופעות</b>
17	המושגים שימור ושינוי
18	שימור ושינוי בהיבט האפיסטמולוגי
20	הרעיון של שימור ושינוי בהתפתחות המדע
21	שימור ושינוי בהתפתחות הידע המתמטי
23	<b>על למידה והוראה של מתמטיקה בבית הספר</b>
23	סקירה היסטורית
24	דגשים בלמידה ובהוראה של מתמטיקה
	הרעיון של שימור ושינוי באלגברה הנלמדת בבית הספר
27	וחשיבה אלגברית
32	הבניית הידע של מורים למתמטיקה
35	<b>הרעיון של שימור ושינוי בהבניית הידע המתמטי</b>
35	שימור ושינוי בהיבט ההתפתחותי-קוגניטיבי
38	שימור ושינוי כרכיבים של הבניית ידע מתמטי
39	דוגמאות לסוגי שימור
40	יחסי גומלין בין שימור לשינוי
52	<b>הצעות לפעילויות</b>
56	<b>רשימת מקורות לפרק 1</b>

67	פרק 2: שימור ערך – מה נשמר ומה השתנה?
69	מבוא: הבנת שימור הכמות כבסיס לחשיבה כמותית.
69	שימור הכמות ופיצול קבוצה סופית לחלקים
70	הכללות של עקרון שימור הכמות: 'מספרים גדולים'
71	שימור כמות ושפת פעולות החשבון
72	היבטים של שוויון, שימור ושינוי בפיצולי כמות
74	הכללות של משימת הפיצול: מספר שנשמר וכמות הרכיבים
75	<b>תיאור הפעילויות בנושא שינויים בתוך ערך שמור</b>
	<b>פעילות 2.1:</b>
79	הצגת הפעילות: כיצד לחלק בובות בין שני ילדים? ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
82	פיצול קבוצה לשתי קבוצות: משמעויות ודרכי הפיצול
	<b>פעילות 2.2:</b>
97	הצגת הפעילות: כיצד לפצל שבר? כמעט כמו במצרים העתיקה ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
101	שימור כמות ופיצולים בקבוצה של שברי יחידה
	<b>פעילות 2.3:</b>
114	הצגת הפעילות: כמויות שאינן מתפצלות ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
116	דרכי פיצול של קבוצה לקבוצות שוות
	<b>פעילות 2.4:</b>
126	הצגת הפעילות: כולם שווים, אולם ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
129	ממחברים שווים למחברים עוקבים
142	<b>פעילות 2.5:</b> הצגת של מספר טבעי כסכומים אינסופיים
152	<b>הצעות לפעילויות נוספות</b>
157	<b>רשימת מקורות לפרק 2</b>

161	<b>פרק 3: שינוי והשפעתו</b>
163	<b>מבוא: על שינויי כמות והשוואה בין גדלים</b>
163	על שינוי כמושג יסוד: שינוי – השוואה – שימור ושינוי
164	יחסי השוואה
166	פעולות אריתמטיות ושינוי כמות
168	על שלבי תהליך ההשוואה
169	היבטים דידקטיים של נושא השינוי והשוואה בין גדלים
171	<b>תיאור הפעילויות בנושא של שינוי והשפעתו</b>
	<b>פעילות 3.1:</b>
175	הצגת הפעילות: פחות או יותר? ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
178	השפעת שינוי באחד מרכיבי פעולת חשבון על ערך הביטוי המספרי
	<b>פעילות 3.2:</b>
191	הצגת הפעילות: בכמה ופי כמה
194	ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות: דרכים שונות להשוואה
	<b>פעילות 3.3:</b>
202	הצגת הפעילות: התייקרות, הוזלה וסדר פעולות
205	ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות: שינוי חוזר באחוזים
	<b>פעילות 3.4:</b>
216	הצגת הפעילות: נשמר או לא? ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
217	השוואת מכפלות ובעיות קיצון
224	<b>פעילות 3.5:</b> מהו הקשר בין אינדוקציה לבין שימור ושינוי?
229	<b>הצעות לפעילויות נוספות</b>
236	<b>רשימת מקורות לפרק 3</b>

239	פרק 4: הבניית שינוי לצורך שימור
241	מבוא: אלגוריתמים לפתרון בעיות כשינוי לצורך שימור
241	הבניית ייצוגים של מספר: שינוי שמשמר את הערך
242	שינוי עם הגבלה של שימור התכונה
244	דרכי חישוב והשוואה כשינוי לצורך שימור
247	תיאור הפעילויות בנושא של הבניית שינוי לצורך שימור
	<b>פעילות 4.1:</b>
249	הצגת הפעילות: מהו "כלל הפיצוי"? ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
253	שינויים ברכיבי פעולות החשבון המבטיחים את שימור התוצאה
	<b>פעילות 4.2:</b>
266	הצגת הפעילות: שימור התחלקות ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
272	סימן התחלקות אוניברסלי
	<b>פעילות 4.3:</b>
280	הצגת הפעילות: הרכב הקנייה ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
283	משוואות דיופנטיות, בחירת השינוי ובחירת השימור
	<b>פעילות 4.4:</b>
296	הצגת הפעילות: מכפלה השווה לסכום
300	ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות: שימור כאילוץ
315	הצעות לפעילויות נוספות
324	רשימת מקורות לפרק 4

327	פרק 5: גילוי שימור סמוי
329	מבוא: גילוי שימור בשינוי ככלי להבנת תהליכים
329	שימור כמאפיין של שינויים אפשריים
330	גילוי שימור בשינוי כמקור למושגים מדעיים ומתמטיים
330	פתרון בעיות מילוליות באמצעים אלגבריים
332	שימור בשינוי כהסבר למצב של "אין פתרון"
334	גילוי שימור כאמצעי לפתרון באמצעות הצבה
335	תיאור הפעילויות בנושא של גילוי שימור סמוי
	<b>פעילות 5.1:</b>
337	הצגת הפעילות: כיצד לחבר מספרים עוקבים רבים? ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות: סכומי טורים חשבוניים: דוגמאות לקשרים בין שינוי לשימור
343	באלגוריתמים חישוביים
	<b>פעילות 5.2:</b>
358	הצגת הפעילות: פתרון בעיות מילוליות: גיל, ריצה וריכוז התמיסה ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
361	פתרון בעיות מילוליות כגילוי של שימור
	<b>פעילות 5.3:</b>
371	הצגת הפעילות: קסמים מתמטיים – ניחוש המספרים ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
375	גילוי שימור הערך בקסמים מתמטיים
	<b>פעילות 5.4:</b>
384	הצגת הפעילות: "למה לא הצלחתי?" ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
389	גילוי שימור לצורך קביעת אי-קיום של הפתרון
400	הצעות לפעילויות נוספות
409	רשימת מקורות לפרק 5

411	<b>פרק 6: שימור ושינוי בעולם הצורות הגאומטריות</b>
413	<b>מבוא: על שינויים ושימורים בעולם הגאומטרי</b>
413	שימור ושינוי בגאומטריה דדוקטיבית
414	על למידה אינטואיטיבית של תכונות, צורות והקשרים ביניהן
416	אובייקטים גאומטריים ומידותיהם
418	יחסי גומלין בין שימור לשינוי במידות ובתכונות של צורות
420	<b>תיאור הפעילויות בנושא של שינוי ושימור בצורות גאומטריות</b>
	<b>פעילות 6.1:</b>
423	הצגת הפעילות: "חלקי שתיים" בגאומטריה – פיצול צורה לשני חלקים ...
428	ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות: שימור ושינוי בחיתוך מצולעים
	<b>פעילות 6.2:</b>
451	הצגת הפעילות: מה מרכיבים משני משולשים?
	ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
454	שימור ושינוי בהרכבת מצולעים ממשולשים
	<b>פעילות 6.3:</b>
464	הצגת הפעילות: כיצד יכולה להשתנות המקבילית?
	ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות:
467	שימור ושינוי של מידות במחלקת המקביליות
	<b>פעילות 6.4:</b>
480	הצגת הפעילות: עם אותו אורך הגבול
487	ניתוח מתמטי ודידקטי של הפעילות: שימור ההיקף
507	<b>סיכום תפקידי המושגים שימור ושינוי בפעילויות עם צורות גאומטריות</b>
509	<b>הצעות לפעילויות נוספות</b>
518	<b>רשימת מקורות לפרק 6</b>
521	<b>סוף דבר</b>



לפי פילוסופים, אנשי אמנות ומדענים, העולם הוא שילוב בין שימור לשינוי. כבר בתקופת התנ"ך טען שלמה המלך כי "...אין כל חדש תחת השמים" (קהלת א, ט); טענה נגדית הופיעה מאוחר יותר בדברי הפילוסוף היווני הרקליטוס: "אין אותו אדם עובר באותו הנהר פעמיים". במאה ה-20 האמן ההולנדי הנודע מוריץ קורנליס אשר (Escher) ביטא תפיסה של שילוב בין שימור לשינוי באמצעות ציור 'מטמורפוזות' – הצורות בציור משתנות בהדרגה למשהו אחר לגמרי (דגים לציפורים וכן הלאה). סופרים מכל רחבי העולם (כמו למשל איוון בונין [Bunin] הרוסי, או רוסה מונטרו [Montero] הספרדייה) כתבו על אודות הגוף והנפש בהתבססם על העובדה המדעית כי כל התאים שבגוף האדם מתחלפים לאחר שנים מספר. החיפוש אחר אותם הרכיבים הקבועים אשר העולם המשתנה בנוי מהם, סקרן עוד את חכמי העולם העתיק. גם במדע המודרני ניסוח החוקים הבסיסיים נעשה באמצעות שימור המאפשר שינויים מסוימים; כך למשל איינשטיין הגדיר את תורת היחסות שלו כיתאוריה של אינווריאנטים של מרחב וזמן'. במתמטיקה ענף הטופולוגיה עוסק בחקר אותם המאפיינים של המרחב אשר נשמרים תחת עיוותי צורה (כיווץ, מתיחה, ניפוח וכן הלאה), ואילו איזומורפיזם והומומורפיזם הם מושגי יסוד של האלגברה המודרנית.

הרעיון של שימור ושינוי מופיע כבר בלימודים הבסיסיים במתמטיקה. כך למשל מספר מונה (מספר קרדינלי) המתאר גודל של קבוצה הוא המספר הסידורי האחרון בתהליך המנייה של איבריה, וזהו אינווריאנט (שימור) של תהליך המנייה. יחסי גומלין מגוונים בין שימור לשינוי קיימים בכל משפט מתמטי, אלגוריתם או משימה מתמטית, אך יחסים אלה יכולים להיות סמויים אם למידת המקצוע מתמקדת בעיקר במיומנויות טכניות. הדגשת השאלה "למה?" במקום התמקדות בהיבט החישובי יכולה לעזור בפיתוח "יכולת לראות את הקשר בין אובייקטים, את ההיבטים השונים של תופעה או/ו את התכונות של אותו אובייקט או אובייקטים שונים" (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006). המוטו "שיעור ללא הכללה הוא לא שיעור במתמטיקה" (Mason, 2003) משקף מגמה ברורה של החינוך המתמטי לפתח חשיבה אלגברית של הלומדים כבר בעת לימודיהם בבית הספר היסודי. אנשי החינוך המתמטי מסכימים כי

יכולת ההכללה היא הרכיב המשמעותי ביותר של החשיבה האלגברית. כל הכללה במתמטיקה מתחילה במספרים, בגדלים ספציפיים וביחסים ביניהם. ההכללה מבוססת על השוואה בין מצבים שונים ועל גילוי רכיבים שנשמרים או משתנים במעבר ממצב אחד למצב אחר. ראייה של שימור ושינוי אמורה ללוות את הלומדים החל מן השלבים הראשונים של הבניית הידע המתמטי, ואנו מניחים שראייה כזו יכולה לספק 'משקפיים אלגבריים' ("algebraic eyes and ears") (Blanton & Kaput, 2003) בלמידת מקצוע המתמטיקה כבר בעת הלימודים בבית הספר היסודי.

מחקרים שערכנו, ראיונות ושיחות עם מורי מורים אשר מלמדים במכללות להכשרת מורים ובפקולטות לחינוך באוניברסיטאות מלמדים כי רוב המורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ופרחי ההוראה רואים באלגברה אוסף של מניפולציות באותיות. הם סבורים כי חשיבה אלגברית היא רכיב קוגניטיבי המתפתח תוך כדי לימודי אלגברה פורמלית, ולכן אינם עוסקים בכך כחלק מהוראת מתמטיקה בבית-הספר היסודי. בשל כך ראינו צורך להרחיב, להשלים ולפתח את הידע המתמטי והפדגוגי של המורים ופרחי ההוראה בנושא זה, ידע אשר יכול התייחסות אלגברית לבעיות הנלמדות עוד לפני לימודי האלגברה. ראיית תפקידיהם של השימור והשינוי, כמו גם של היחסים ביניהם בסיטואציות מתמטיות מגוונות, אמורה להרחיב את הידע האלגברי של המורים ולתמוך בהתבוננות אלגברית – לאו דווקא פורמלית – בחומר הלימוד המתמטי אשר נלמד בבית הספר היסודי. דיון המבוסס על הבנת קשרים מגוונים בין שימור לשינוי מחדד את השאלה הבאה: מה נשמר ומה השתנה במעבר ממצב אחד למצב אחר?

ספר זה אינו עוסק בנושא מסוים. מוצגים בו רעיונות מגוונים להבניית ידע מתמטי בעזרת ראיית היחסים שבין שימור לשינוי. הספר מיועד למורי מורים העוסקים בהכשרת מורים להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים, כמו גם לכל המתעניינים במתמטיקה ובהוראתה. הספר רלוונטי לקורסים שעניינם אלגברה ו'טרום אלגברה', כמו גם לקורסים שמתמקדים בפיתוח החשיבה של הלומדים (סטודנטים או תלמידים). הוא יכול לשמש כדי להרחיב ולהעמיק את ידע התוכן של המורים כחלק מהתפתחותם המקצועית. סטודנטים, מורים ושאר המתעניינים בבעיות של מתמטיקה אלמנטרית יכולים ליהנות משפע של רעיונות לפתרון בעיות, להתעשר בכלים רבים לפתרון בעיות וללמוד לעשות שימוש שיטתי בגישה של שימור ושינוי

כמאפיין מתמטי כללי. החומר המוצג בספר מספק מגוון רחב של פעילויות התומכות בטיפוח הרעיון העיקרי ומאפשר לכל מרצה לבחור את הפעילויות הנראות לו. הודות לכך ספר זה יכול לתרום להתפתחות מתמטית ודידקטית של פרחי הוראה בתחום החשיבה האלגברית ולסייע בשיפור תהליכים של הבניית ידע מתמטי בבית הספר.

## רשימת מקורות

משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים**. ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' algebra eyes and ears. *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.

Mason, J. H. (2003, March). *Promoting algebraic awareness and thinking in classrooms*. Notes presented to the thematic group "algebraic thinking" at the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3), Bellaria, Italy.

## מבנה הספר

**הפרק הראשון** מבסס את הרעיון הכללי של הספר. בפרק זה מודגמת הראייה של שימור ושינוי כדרך לתיאור ולהבנה של תהליכים, והיא מוצגת בו בסיטואציות מגוונות המתרחשות במגוון תחומים. הבנת הקשר שבין השימור לבין השינוי מוצעת ככלי לפיתוח חשיבה אלגברית לא פורמלית של הלומדים ולהבניית ידע מתמטי משמעותי שלהם. סוגי יחסי הגומלין אשר מתקיימים בין השימור לבין השינוי בסיטואציות מתמטיות מוצגים בפרק זה ומהווים בסיס לתוכן ולמבנה של הפרקים הבאים בספר.

גרעין הספר הוא הפעילויות המתמטיות וניתוחן המתמטי והדידקטי. כל פרק דן בהיבט מסוים של הקשר שבין שימור לשינוי, היבט המאחד בין הפעילויות המתוארות בפרק. הפרק השני והפרק השלישי מתמקדים במצבים אשר מתאפיינים בכך שהשימור או השינוי נקבעים מראש. **הפרק השני** עוסק בהבנת סיטואציות מתמטיות המתאפיינות בשימור כמות הנקבעת מראש. בעיקר מוצגות בו פעילויות שעניינן הצגת מספר (כמות) במגוון דרכים, שינויים אפשריים ותפקיד השימור בשינויים אלה. **הפרק השלישי** מתמקד בהשפעת שינוי שנעשה בכמויות ודן בדרכים להשוות בין הכמויות המתקבלות.

שני הפרקים הבאים עוסקים במצבים אשר מתאפיינים בכך שיחסי הגומלין בין שימור לשינוי אינם ידועים מראש, אלא נבנים או מתגלים תוך כדי ההתמודדות עם הבעיה. **הפרק הרביעי** מציג אלגוריתמים ודרכי פתרון לבעיות מתמטיות כהבניית שינויים תוך כדי שימור של הכמות או של תכונה מסוימת. **הפרק החמישי** עוסק בגילוי של שימור ה-יחבוי בשינויים ככלי לפתרון הבעיה.

**הפרק השישי** מתמקד בתחום הגאומטרי. הוא עוסק באותם ההיבטים של שימור ושינוי אשר מוזכרים בפרקים הקודמים, אך הפעילויות המתוארות בו עוסקות בעיקר במידותיהן של צורות.

כל אחד מהפרקים (פרט לפרק הראשון) כולל מבוא, פעילויות בנושא המיועדות לפרחי הוראה, עקרונות מתמטיים ודידקטיים לניתוח פעילויות והצעות לפעילויות נוספות.

**במבוא** לפרק מפורט היבט מרכזי של הקשר שבין שימור לבין שינוי שבו הפרק עוסק. כמו כן מוצגים בו הרעיונות המתמטיים והדידקטיים שבבסיס הפעילויות.

**הפעילויות** מנוסחות כסיטואציות מתמטיות מתפתחות. הן שייכות לתחום המתמטיקה האלמנטרית, ומקורן בנושאים הנלמדים בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים. כל הפעילויות הן רב-שלביות: הבנת הבעיה ופתרון השלבים הראשונים שלה אינם מצריכים שימוש בכלים אלגבריים פורמליים, ואילו המשך החקר מוביל למצבים מתמטיים מוכרים פחות ולבעיות לא שגרתיות.<sup>1</sup>

הפעילויות בנויות כדפי עבודה לפרחי הוראה. רוב הפעילויות המוצגות ללומדים נושאות את הכותרת 'מחיי היום-יום', כותרת שעניינה הוא סיפור מסגרת או פן מעשי מסוים של הפעילות. אוסף הפעילויות בכל פרק מפרט ומדגים את הרעיון העיקרי בו בווריאציות ובסיטואציות מגוונות. הפעילויות עוסקות במגוון נושאים מתמטיים ומזמנות מגוון דרכים להתמודד אִתם. עם זאת, המשימות נבנו בדרך המאפשרת לפתור כל אחת מהן באופן בלתי-תלוי כמעט.

**הניתוחים המתמטיים והדידקטיים של הפעילות** דנים באסטרטגיות להתמודדות עם המשימות. במהלך הדיון על אודות הפעילות מתגלה גם הכותרת 'האמיתית', זו אשר מתארת את המשמעות המתמטית של הפעילות. ההערות לניתוח הפעילות מדגישות את הקשרים הקיימים בינה לבין נושאים מתמטיים מגוונים. בסוף כל ניתוח מופיע סיכום של תפקידי המושגים שימור ושינוי בפעילות.

קיים קשר הדוק בין ההיבטים של השימור ושל השינוי למיניהם באותה הבעיה. לפיכך לעתים קרובות בחירת דרכים שונות (ויעילות) להתמודדות עם אותה הבעיה מביאה להדגשת היבט אחר בקשר הזה. דרך הצגת הנושאים בספר היא ספירלית – אִזכור של פעילויות זהות במסגרת דיונים העוסקים בנושאים שונים, דחייה או הטרמה של חלק מהשאלות בהתאם למצב הדינמי בכיתה ההוראה, הצגה מוקדמת של שאלות לצורך עיסוק מעמיק בהן בהמשך וכן הלאה.

בכל פרק מופיעות **הצעות לפעילויות נוספות**. בהצעות האלו מודגשים יישומים – לעתים מפתיעים – של תוצאות שהתקבלו במסגרת הפעילויות אשר הוצגו בפרק, כיווני חקר עתידיים והתפתחויות נוספות, הוכחות פורמליות ובירורים אשר במהלך הפעילות עצמה 'דילגו עליהם' וכן הלאה. בין השאר במסגרת זו נעשה ניסיון לענות חלקית על ההטרוגניות אשר קיימת בכיתה של פרחי הוראה.

---

<sup>1</sup> חלק מהבעיות הן בעיות ידועות, אך בספר הן נדונות מן ההיבט של ראיית השימור והשינוי.

