

**טיפול חשיבה מתמטית משמעותית  
ויצירתית באמצעות אתגרי חשיבה**

**פרופ' אביקם גזית  
מכללת סמינר הקיבוצים**

# בן כמה הרועה?



במאמר בשם כמו בכותרת למעלה (Merseth 1993)  
מציגה המחברת בעיה שהוצגה לתלמידי ג' במערב  
התיכון של ארה"ב, חתך סוציו-אקונומי ממוצע:

לרועה יש 125 כבשים ו-5 כלבים. בן כמה הרועה?

75% מהתלמידים נותנים תשובה והיא מציגה צילום  
מחברת של תלמיד:  $130 = 125 + 5$  מבוגר מדי

120 = 125 - 5 עדיין מבוגר מדי

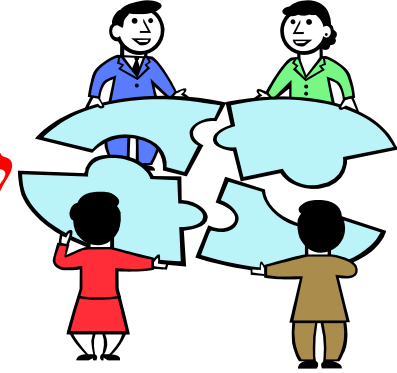
25 = 125 : 5 זהו, הרועה בן 25!

# מה צריך לעשות?



הטענה העיקרית מתוך המאמר: בן כמה הרועה?  
היא שבית הספר לא מלמד לחשוב אלא לחשב.  
למידה משמעותית דורשת מהלומד:  
חשיבה ביקורתית-האם הנתונים והפתרון הגיוניים?  
חשיבה יצירתית- חיפוש אסטרטגיות שונות לפתרון  
שילוב של חשיבה אנליטית שיטתית המבוססת על  
ידע של מושגים, עקרונות ותהליכים עם חשיבה  
אינטואיטיבית, ספונטנית, בלתי אמצעית ומקורית.

# שילבי פתרון בעיות לפי פויה



1. הבנת הבעיה:

"איוולת היא לענות על בעיה בלתי מובנת..."

2. עריכת תוכנית לפתרון:

מציאת קשר בין הנתונים לנדרש וחיפוש  
איסטרטגיה מתאימה.

3. ביצוע התוכנית:

יש לבדוק אם כל שלב מבוצע לפי התוכנית.

4. סקירה לאחור- הערכה וביקורת:

הגיונית ומתאימה לנתוני הבעיה? האם התוצאה

# דוגמה ליצירתיות מתמטית

כיצד אפשר להוסיף לעשר עוד עשר ועוד חמישים  
ולקבל 11?



## והתשובות הן:

○ אם תוסיפו לשעה 10 עוד 10 דקות ועוד 50



דקות תקבלו את השעה 11!

○ אם תוסיפו ל 10 בינואר עוד 10 ימים ועוד 50

ימים, תקבלו את 11 במארס!

(מדובר בשנה עם 28 ימים בפברואר)

○ ואם תוסיפו ל 10 בפברואר עוד 10 ימים ועוד 50

ימים תקבלו את 11 באפריל!

# מה קורה לקורה?...

נגר מנסר בקצב אחיד קורה ארוכה וצרה ל-4  
חלקים שווים ב-12 דקות.  
בכמה זמן ינסר קורה זהה ל-5 חלקים שווים?



# התשובה אינה 15 דקות...

כדי לנסר קורה לארבעה חלקים צריך רק 3 ניסורים והזמן הוא של ניסורים!

עבור ניסור אחד צריך  $3:12=4$  דקות

כדי לחלק לחמישה חלקים צריך 4 ניסורים

ובסך הכל

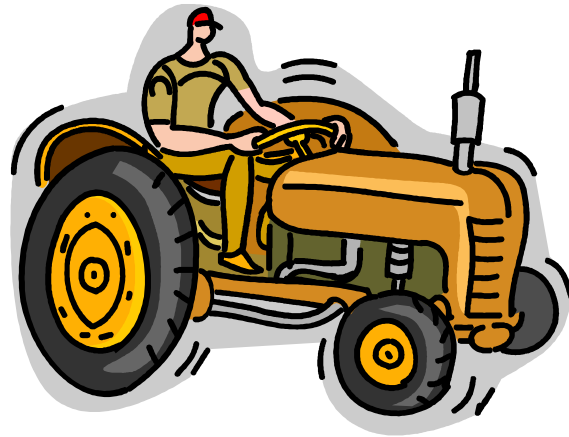
4 כפול 4 = 16 דקות





# דונם פה ודונם שם

שלושה טרקטורים זהים מסיימים לחרוש ביחד  
שלושה דונמים בשלוש שעות.  
בכמה זמן יחרוש טרקטור אחד דונם אחד?



## התשובה אינה שעה אחת...

אם 3 טרקטורים חורשים 3 דונמים ב-3 שעות  
אז 3 טרקטורים חורשים דונם אחד בשעה אחת  
וטרקטור אחד חורש דונם אחד ב-3 שעות  
או:

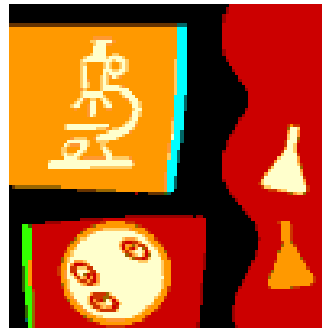
טרקטור אחד חורש 3 דונמים ב-9 שעות  
אז טרטור אחד חורש דונם אחד ב-3 שעות



# זהירות , חיידקים!

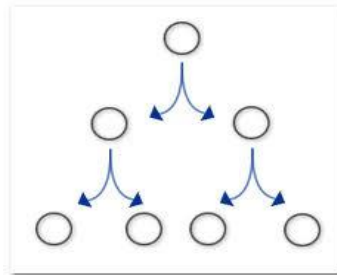
חיידק מסויים מכפיל את עצמו בכל דקה.  
אם מכניסים למבחנה חיידק אחד, היא מתמלאת  
כעבור שעה.

כעבור כמה זמן תתמלא אותה מבחנה אם  
מכניסים לתוכה שני חיידקים בהתחלה?



## התשובה אינה חצי שעה...

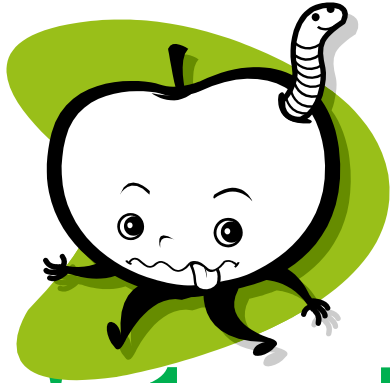
אם מכניסים שני חיידקים בהתחלה אנחנו מרוויחים את הדקה במעבר מחיידק אחד לשניים ולכן המבחנה תתמלא כעבור 59 דקות. התרבות החיידקים היא סדרה גאומטרית אבל הזמן הוא סדרה חשבונית: 1,2,3,4,5 דקות



# תולעת מספרים

תולעת מטפסת מתחתית בור שעומקו 10 מטרים.  
ביום היא עולה 3 מ' ובלילה נרדמת ומחליקה 2 מ'.  
באיזה יום תגיע לקצה הבור?





## לא ביום העשירי...

ביום הראשון עולה 3 מ' ויורדת 2 מ' - לגובה 1 מ'

ביום השני עולה ל-4 מ' ויורדת ל-2 מ'

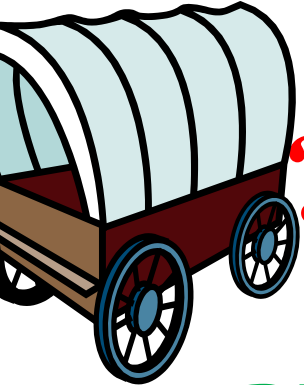
ביום השלישי עולה ל-5 מ' ויורדת ל-3 מ'

ביום השביעי עולה ל-9 מ' ויורדת ל-7 מ'

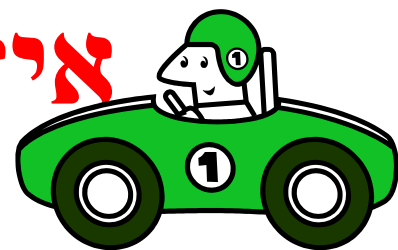
וביום השמיני עולה ל-10 מ' !

אם תחליט להחליק ל-8 מ' או לצאת מהבור זה

כבר העניין שלה...



איזו אפשרות בזמן קצר יותר?



איש עובר דרך מסויימת ברגל במהירות קבועה.

יש באפשרותו לעבור מחצית הדרך בעגלה  
שמהירותה מחצית ממהירותו של האיש  
ואת המחצית השניה של הדרך במכונית  
שמהירותה פי 25 ממהירותו של האיש.

באיזו משתי האפשרויות הזמן קצר יותר:  
ברגל או בשילוב עגלה ומכונית?

# התשובה אינה שילוב של עגלה ומכונית...

אם יעבור את כל הדרך ברגל הזמן יהיה קצר יותר  
כי הזמן לעבור את מחצית הדרך בעגלה  
שמהירותה מחצית ממהירותו שווה בדיוק לזמן  
כדי לעבור את כל הדרך במהירותו של האיש!  
לכן, לא משנה כמה מהירה המכונית...





## מורסי עושה עסקים...

מורסי קנה כדורגל ב-100 ש"ח. כעבור זמן מה  
נמאס לו מהכדור ומכר לפאדיה ב-110 ש"ח.  
הוא התגעגע לכדור וקנה בחזרה ב-120 ש"ח.  
לבסוף מכר את הכדור לאחמד ב-130 ש"ח  
כמה הוא הרוויח בכל העסקה?



# התשובה אינה 10 ש"ח או 30 ש"ח...

מורסי קנה את הכדור פעם ב-100 ש"ח ופעם ב-120 ש"ח ושילם סך הכל 220 ש"ח.  
הוא מכר את הכדור פעם ב-110 ש"ח ופעם ב-130 ש"ח וקיבל סך הכך 240 ש"ח.  
ההפרש בין 240 ש"ח ל-220 ש"ח זה הרווח שלו: 20 ש"ח.  
ובדרך אלגברית:

קנה ב-100 ש"ח: -100

מכר ב-110 ש"ח: +110

יתרה +10

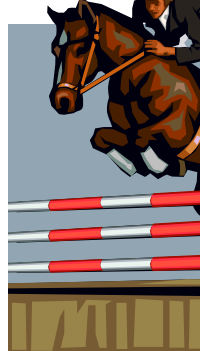
קנה ב-120 ש"ח: -120

יתרה -110

מכר ב-130 ש"ח: +130

יתרה: +20





## מי יגיע אחרון לעץ?...

תייר ראה שני רוכבים עומדים ליד הסוסים שלהם.  
הוא הוציא מטבע זהב ואמר להם: "עלו על הסוסים  
ודהרו עד לעץ שעומד מרחוק. מי שסוסו יגיע  
אחרון יזכה בפרס" לא ידעו מה לעשות עד אשר  
הגיע חבר שלהם וספרו לו על התחרות המוזרה.  
לחש להם משהו באוזן ומיד קפצו על הסוסים  
ודהרו במהירות אל העץ. מה לחש להם ומה  
עשו?

# עלו על הסוסים....

החבר לחש להם להחליף בסוסים והם דהרו  
במהירות כדי שהסוס שלהם עליו דוהר השני  
יגיע אחרון. התייר אמר להם לעלות על הסוסים  
ולאו דווקא על הסוס שלהם ומי שסוסו יגיע  
אחרון...



כיצד יחלקו-בעייה מציאותית...



שני חברים יצאו לטיול והביאו כריכים זהים. אחד הביא 3 כריכים ואחד הביא 5 כריכים. כאשר ישבו לאכול הצטרף אליהם חבר משותף והם חילקו את הכריכים שווה בשווה בין שלושתם. כאשר סיימו לאכול נתן להם החבר 8 ש"ח כהשתתפות במחיר הכריכים. כיצד יחלקו ביניהם את 8 הש"ח?

## תשובה אינה 5:3...

צריך לחלק את הכסף לפי היחס של הכריכים שכל אחד נתן לחבר השלישי ולא לפי מה שהביא!  
אם נחלק 8 כריכים ל-3 נקבל 2 כריכים ו $\frac{2}{3}$  כריך.  
החבר שהביא 3 כריכים תרם רק  $\frac{1}{3}$  כריך ואילו  
החבר שהביא 5 כריכים תרם 2 כריכים ו $\frac{1}{3}$  כריך  
שהם  $\frac{7}{3}$ . לכן היחס הוא 1:7



# שניים סינים וכינור קטן....



סיני פוגש את שכנו לבית ושואל לגיל ילדיו.

עונה לו: "מכפלת הגילים של שלושת ילדי 36  
וסכום הגילים שווה למספר הבית בו אנחנו גרים

חושב הסיני ואומר: "אבל חסר לי נתון"

עונה לו השכן " נכון, הבת הבכורה מנגנת בכינור"

מה גיל שלושת הילדים?

## יש תשובה חד משמעית...

הסיני אומר שחסר לו נתון כי יש לו שני צירופים של גיל שלושת הילדים שנותנים את אותו מספר בית: 1,6,6 ו-2,2,9. מספר הבית 13 שאר הצירופים של גיל הילדים, אם רושמים בצורה שיטתית בטבלה-אמצעי לפתרון, מביאים למספר בית אחד ויחיד ואז הסיני לא היה מבקש רמז נוסף. מאחר והילדה היא בכורה, אז גיל הילדים: 2,2,9





# התפוזים של פיבונאצ'י

נערה נכנסה לפרדס ואספה תפוזים שהיו פזורים.

כאשר התחילה לצאת פגש אותה שומר ולקח

ממנה מחצית ממספר התפוזים ועוד תפוז.

בהמשך פגשה בשומר נוסף שלקח מחצית

ממספר התפוזים שנותר ועוד תפוז. לפני

שיצאה פגשה שומר שלישי שלקח מחצית

מהנותר ועוד תפוז. היא יצאה עם תפוז

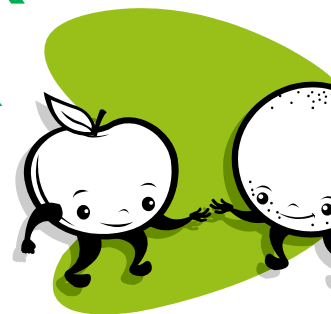
אחד. כמה תפוזים אספה?



# דרך פתרון מהסוף להתחלה

אפשר לפתור באמצעות משוואה עם נעלם  
אבל התהליך כרוך במכנה משותף

שמסבך גם מומחים לפתרון משוואות...



היא חוזרת לשומר השלישי שמחזיר לה

תפוז=2 ומכפיל בחזרה=4. היא חוזרת לשומר

השני שמחזיר לה תפוז=5 ומכפיל בחזרה =10

היא חוזרת לשומר הראשון שמחזיר לה תפוז=11

ומכפיל בחזרה=22 ואפשר גם בניסוי וטעייה

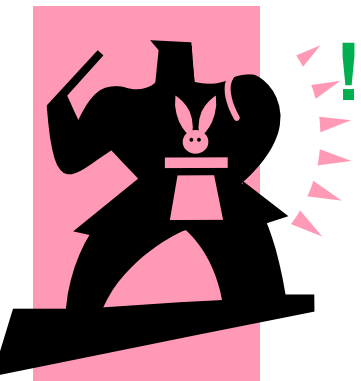
## בעיניים עצומות שווה בשווה...

על השולחן מונחות 50 דסקיות כאשר צד אחד שלהן אדום והצד האחר כחול. מתוך 50 הדיסקיות 10 מונחות כאשר הצד האדום כלפי מעלה. איך אפשר בעיניים עצומות לחלק את 50 הדיסקיות לשתי קבוצות, לאו דווקא שוות במספר, כך שבכל קבוצה יהיה מספר שווה של דיסקיות עם הצד הגלוי אדום?



# לפי עיקרון המשלים...

מעבירים בעיניים עצומות 10 דיסקיות מתוך ה-50  
כעת יש בקבוצה אחת 10 דיסקיות עם למשל 3  
דיסקיות שהצד הגלוי אדום ו-7 דיסקיות שהצד  
הגלוי שלהן כחול (זה נכון עבור כל מספר דיסקיות  
שנבדוק). בקבוצה השנייה יש 40 דיסקיות 7 מהן עם  
הצד הגלוי אדום. נהפוך את 10 הדיסקיות ואז  
ואז 7 הדיסקיות עם הצד גלוי כחול יהפכו לאדום.  
יש לנו 7 דיסקיות עם צד גלוי אדום בכל קבוצה!





## בעיניים עצומות ממש...

איש עיוור צריך לקחת כל יום שלוש גלולות שמסודרות לו בתוך קופסה מיוחדת המחולקת לתאים, כך שהוא יודע לקחת כל יום 3 גלולות. הגלולות בצבעים שונים למשל, לבן, אדום, צהוב. יום אחד התערבבו גלולות משני תאים כך שהיו לו 6 גלולות, שתיים מכל סוג-מכל צבע ומאחר והוא עיוור לא יכול לבחור את שלוש הגלולות השונות. לאחר שחשב קצת, מצא פתרון יצירתי, מהו?

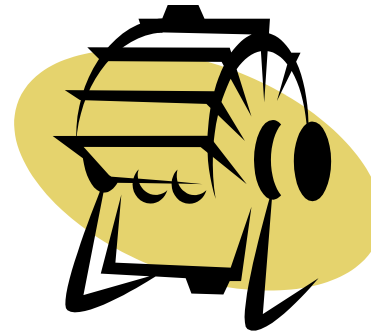
# מחלקים לשתיים...

האיש עיוור אך לא מוגבל בפעולות אחרות.  
הוא לקח סכין וחילק כל גלולה ל-2 חצאים.  
הוא לקח חצי מכל גלולה וביחד 6 חצאים הכוללים  
שני חצאים מכל כדור-מכל צבע, כפי שנדרש!



# היתכן???

מצאו שלושה מספרים שלמים המהווים סדרה  
חשבונית – הפרש קבוע, והמכפלה שלהם שווה  
למספר ראשוני!



## דיזונאנס קוגניטיבי...

נוצר לכאורה קונפליקט בין הדרישה למכפלה של שלושה מספרים שנותנת מספר ראשוני לבין הידע על המושג מספר ראשוני שמתחלק רק בעצמו וב-1. זה מה שהופך את הבעיה לאתגר חשיבה. אם 1 הוא אחד המספרים אז צריך לחפש עוד שני מספרים שיוצרים סדרה חשבונית ומילת המפתח בבעיה: מספרים שלמים שיכולים להיות גם שליליים והפתרון: 1, -1, -3 זו סדרה שהפרש שלה 2 והמכפלה 3: ראשוני!



# מה צבע הדוב?

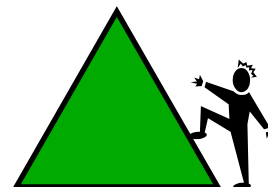
דוב יצא מנקודה מסויימת על כדור הארץ והלך  
קילומטר אחד דרומה, קילומטר אחד מזרחה  
וקילומטר אחד צפונה וכך חזר לנקודה ממנה יצא.

מה צבע הדוב?



# השאלה היא מהיכן יצא הדוב?

להשלים שלושה מסעים ולחזור לנקודת המוצא  
אפשרי רק בקטבים. אם הדוב הלך דרומה אז הוא  
יצא מהקוטב הצפוני ולכן צבעו לבן!



# הפנס מספיק רק ל 12 שעות...

ארבעה מטיילים הגיעו למנהרה צרה וחשוכה. הם יכולים לעבור או אחד אחד או בזוגות. יש להם רק פנס אחד ולכן יכולים לעבור רק בזוגות כאשר אחד העוברים צריך להחזיר את הפנס.

הראשון יכול לעבור את המנהרה לבד בשעה אחת השני-בשעתיים, השלישי-ב-4 שעות והרביעי-ב-5 ש' הסוללה של הפנס מספיקה ל-12 ש', כיצד יעברו את המנהרה?



# צריך לשבור קיבעון

הראשון עובר עם השני - 2 ש',

הראשון מחזיר את הפנס - 1 ש'

השלישי עובר עם הרביעי - 5 ש'

השני מחזיר את הפנס - 2 ש'

הראשון והשני עוברים - 2 ש'

סה"כ 12 שעות!



# תודה רבה



# פרטים על אתר וספרים

אתר חידות עם כ 300 חידות:

[www.chidot.co.il](http://www.chidot.co.il)

ספרי חידות ואתגרי חשיבה עם פתרונות מלאים:

▪ חושבים לעניין

▪ מת לחשוב 10

▪ חושבים לעוד עניין

[Avikamgazit@gmail.com](mailto:Avikamgazit@gmail.com)

