כל הזכויות שמורות©

אפשר להסביר בעוד דרך?

סוגי הסברים והצדקות במתמטיקה

בועז זילברמן

מכון ויצמן למדע

י"ח באייר התשע"ו – 26.05.2016

הכנס הארצי השנתי להוראת מתמטיקה בחינוך היסודי

כל הזכויות שמורות©

הצדקות במתמטיקה

- חלק מרכזי בעשיית מתמטיקה ובלמידתה.
- רכיב משמעותי בתכניות הלימודים בישראל ובעולם.
- מחקרים מצאו קשיים של תלמידים:
  - בהבנת הצורך בהצדקה,
  - בהבחנה בין הצדקות דדוקטיביות לסוגים אחרים.

כל הזכויות שמורות©

"סוגים" של הסברים והצדקות – למה הכוונה?

כל הזכויות שמורות©

"סוגים" של הסברים והצדקות – למה הכוונה?

אתמקד בשני מאפיינים:

- אמצעים מתמטיים.
- אופן ההצדקה.

כל הזכויות שמורות©

"סוגים" של הסברים והצדקות – למה הכוונה?

אתמקד בשני מאפיינים:

- אמצעים מתמטיים.
- אופן ההצדקה.

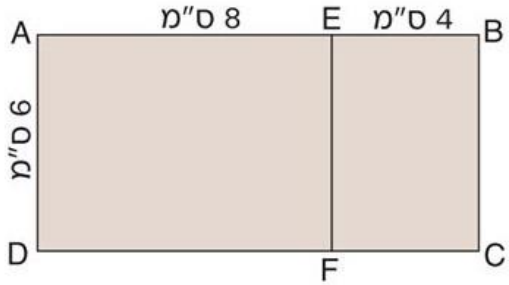
כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג

דיון

2 לפניכם סרטוט מוקטן.



א. כתבו שני ביטויים חשבוניים שונים לחישוב שטח המלבן ABCD:

1 באמצעות אורכי הצלעות של המלבן AEFD והמלבן EBCF.

2 באמצעות סכום השטחים של המלבן AEFD והמלבן EBCF.

ב. ודאו שהערכים של שני הביטויים שווים.

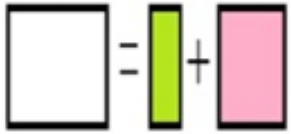
ג. 1 סמנו במשתנה a את אורך הצלע AD, במשתנה b את אורך הצלע AE ובמשתנה c את אורך הצלע EB.

כתבו ביטויים המייצגים את השטח של כל אחד מהמלבנים בסרטוט.

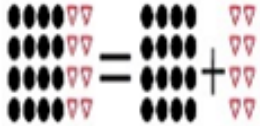
2 הראו שהשוויון הזה מתקיים: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג



ניתן לחשב
שטח מלבן
בשני אופנים



ניתן לספור כמות
בדידה בשני
אופנים

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג

משימה: בפרדס

בציור משמאל מתואר פרדס קטן.

מסמן עץ תפוזים.

מסמן עץ לימונים.

(א) חשבו את מספר העצים בפרדס. פרטו חישוביכם.

(ב) בת-אל אמרה: **"בפרדס 4 שורות. בכל שורה 8 עצים:**

5 עצי תפח ו- 3 עצי לימון. לכן, בפרדס בסך הכול 32 עצים".

רשמו תרגיל מתאים לחישוב מספר העצים בפרדס לפי דברי בת-אל.

(ג) רותם אמר: **"בפרדס 4 שורות שבכל אחת 5 עצי תפח.**

בפרדס 4 שורות שבכל אחת 3 עצי לימון.

לכן, בפרדס בסך הכול 32 עצים".

רשמו תרגיל מתאים לחישוב מספר העצים בפרדס לפי דברי רותם.

(ד) חשבו את מספר העצים בסך הכול בפרדס ובו 100 שורות

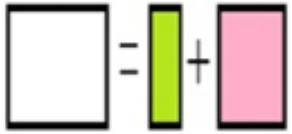
(כדוגמת השורות בציור).

באיזו דרך בחרתם לחשב: בדרך של בת-אל או בדרך של רותם? הסבירו.

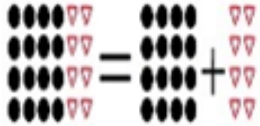
(ה) הסיקו מסקנה.

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג



ניתן לחשב שטח מלבן בשני אופנים



ניתן לספור כמות בדידה בשני אופנים

$4x+6$

$2(2x+3)$

בהצבת ערך בשני הביטויים מתקבל שוויון

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג

(3) *על-פי חוק הפילוג*

$$3\cdot(y+7)=$$
$$=3\cdot y+3\cdot 7=$$
$$=3y+21$$

הציבו מספר כרצונכם ובדקו!

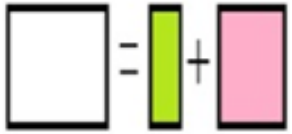
על-פי סדר פעולות החשבון

$$3\cdot(y+7)=\ ??$$

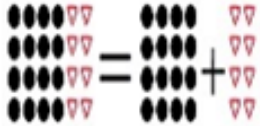
הסבירו!

כל הזכויות שמורות©

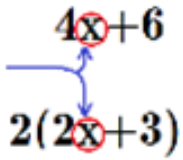
דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג



ניתן לחשב
שטח מלבן
בשני אופנים



ניתן לספור כמות
בדידה בשני
אופנים



בהצבת ערך בשני
הביטויים מתקבל
שוויון

PEMDAS

()^ * : + -

יש התאמה עם
תוצאת חישוב לפי
סדר פע׳ החשבון.

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג

(1) *על-פי חוק הפילוג*

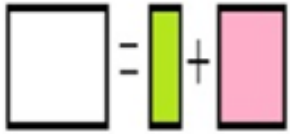
$$5\cdot(60+4)=$$
$$=5\cdot 60+5\cdot 4=$$
$$=300+20=320$$

על-פי סדר פעולות החשבון

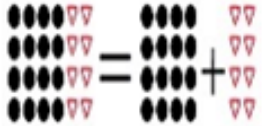
$$5\cdot(60+4)=$$
$$=5\cdot 64=320$$

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג



ניתן לחשב
שטח מלבן
בשני אופנים



ניתן לספור כמות
בדידה בשני
אופנים

$4x+6$

$2(2x+3)$

בהצבת ערך בשני
הביטויים מתקבל
שוויון

PEMDAS

()^ * : + -

יש התאמה עם
תוצאת חישוב לפי
סדר פע׳ החשבון.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \Rightarrow & \mathbb{Z} \\ & & \Downarrow \\ \mathbb{R} & \Leftarrow & \mathbb{Q} \end{array}$$

השענות על
אקסיומות ועל
תוצאות קודמות

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת חוק הפילוג

$\mathbb{N}$ $$(p+q)\cdot a=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{p+q\ times}=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{p\ times}+\underbrace{a+a+\ldots+a}_{q\ times}=p\cdot a+q\cdot a$$

$$a\cdot(p+q)=(p+q)+(p+q)+\ldots+(p+q)=\underbrace{p+p+\ldots+p}_{a\ times}+\underbrace{q+q+\ldots+q}_{a\ times}=a\cdot p+a\cdot q$$

$\mathbb{Z}$ $$\left.\begin{array}{l}(-n)\cdot(p+q)+n\cdot(p+q)=0\\(-np)+(-nq)+np+nq=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{(-n)\cdot(p+q)}+\cancel{np}+\cancel{nq}=\boxed{(-np)+(-nq)}+\cancel{np}+\cancel{nq}$$

$\mathbb{Q}$ $$\frac{m}{n}\cdot(p+q)=\frac{m}{n}\cdot\frac{(p+q)}{1}=\frac{m(p+q)}{n}=\frac{mp+mq}{n}=\frac{mp}{n}+\frac{mq}{n}=\frac{m}{n}\cdot p+\frac{m}{n}\cdot q$$

$\mathbb{R}$ $4\ cases\ for\ Dedekind\ Cuts\ \alpha,\beta,\gamma$

$$(e.g.,,\gamma<0^*<\alpha,\quad 0^*<\beta+\gamma):\ \alpha\beta=\alpha(\beta+\gamma)+\alpha\cdot(-\gamma)=\alpha(\beta+\gamma)-\alpha\gamma$$

כל הזכויות שמורות©

"סוגים" של הסברים והצדקות – למה הכוונה?

אתמקד בשני מאפיינים:

- אמצעים מתמטיים.
- אופן ההצדקה.

כל הזכויות שמורות©

מסגרת תיאורטית לניתוח סוגי הצדקות

(Stacey & Vincent, 2009)

חוץ- מתמטי

פנייה לסמכות — הסתמכות על סמכות חיצונית.

אנלוגיה איכותנית — דמיון שטחי לסיטואציה חוץ-מתמטית.

אמפירי

המחשה בהתנסות — יצירת דפוס מתוך בדיקת מקרים ספציפיים.

התאמת חוק למודל — השוואת תוצאות חישוב עם כלל ועם מודל.

דדוקטיבי

הסקה בעזרת מודל — שימוש במודל הממחיש מבנה מתמטי.

הסקה בעזרת מקרה פרטי — תהליך היסק הנסמך על מקרה פרטי-גנרי.

הסקה בעזרת מקרה כללי — תהליך היסק הנסמך על המקרה הכללי.

כל הזכויות שמורות©

אופן ההצדקה – חוק הפילוג

ניתן לעשות שימוש באמצעי מתמטי מסוים ביותר מאופן אחד.

הסקה בעזרת מקרה כללי / ***הסקה בעזרת מקרה פרטי*** :

$$(p+q)\cdot a=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{p+q\ times}=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{p\ times}+\underbrace{a+a+\ldots+a}_{q\ times}=p\cdot a+q\cdot a$$

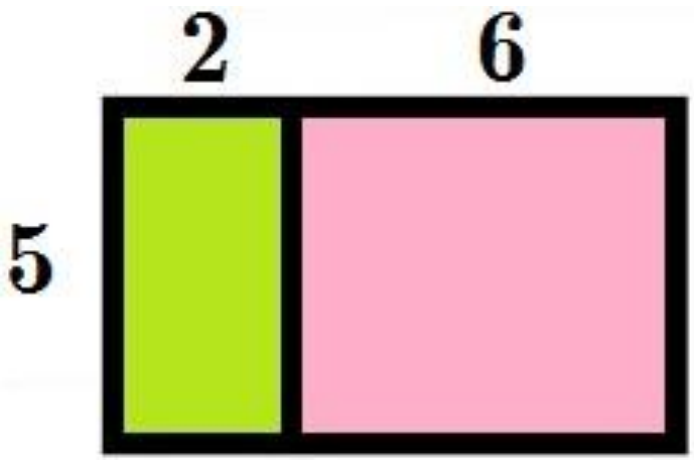
$$(3+5)\cdot 4=\underbrace{4+4+\ldots+4}_{3+5\ times}=\underbrace{4+4+4}_{3\ times}+\underbrace{4+4+\ldots+4}_{5\ times}=3\cdot 4+5\cdot 4$$

כל הזכויות שמורות©

אופן ההצדקה – חוק הפילוג

ניתן לעשות שימוש באמצעי מתמטי מסוים ביותר מאופן אחד.

הסקה בעזרת מודל / התאמת חוק למודל



- חשבו את שטח המלבן בשני אופנים.
- חשבו את ערך הביטוי $5\cdot(2+6)$ בעזרת חוק הפילוג ובעזרת המלבן שמשמאל.

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

$$1 \overset{?}{=} n \cdot 0$$

אין משמעות כי כפל וחילוק הן פע׳ הפוכות.

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

10. א. כֵּיצד תִּבדקו את נכונוּת התוצאה של תרגיל החילוּק $20 : 5 = 4$?

_____

ב. פִּתרו את התרגיל $0 : 15 = ___$.

בְּדקו תשובתכם בעזרת תרגיל כּפל.

_____

ג. יוּבל טען ש- $15 : 0$ שָׁוֶה ל-0.

בְּדקו את טענתו בְּעזרת תרגיל כּפל. _____

הַציעו פִּתרון אחר לַתרגיל של יוּבל $15 : 0 = ___$.

בְּדקו את הפִּתרון שלכם בְּעזרת תרגיל כּפל. _____

האִם הצלחתם? _____

הַסבִּירו. _____

_____

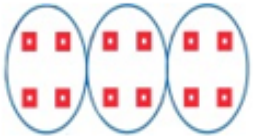
☺ רמז: הַיעזרו בַּ"בּוּעה" שבּמשימה 7.

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

$$1 \overset{?}{=} n \cdot 0$$

אין משמעות כי כפל וחילוק הן פע׳ הפוכות.



אין משמעות לחילוק באפס כחיסור חוזר.

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

116 אליהו מסביר בדרך אחרת: כדי לחלק 20 סוכריות ל- 4 חברים, ילד לוקח 4 סוכריות ונותן לאחד החברים. נותרות לו 16 סוכריות. הוא חוזר על אותה פעולה 5 פעמים, עד שאוזלות כל הסוכריות. לכן כל חבר מקבל 5 סוכריות. לכן $20 : 4 = 5$.

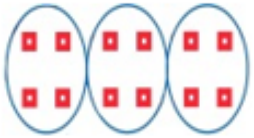
כדי לדעת לכמה שווה $20 : 0$, נניח שהילד עושה אותו תהליך עם 0 חברים. כמה סוכריות הילד יוציא כל פעם? האם הוא יצליח לחלק את 20 הסוכריות? מה המסקנה, לדעתכם?

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

$$0 \overset{?}{=} n \cdot 0$$

אין תוצאה יחידה כי כפל וחילוק הן פע׳ הפוכות.



אין משמעות לחילוק באפס כחיסור חוזר.

$$1 \overset{?}{=} n \cdot 0$$

אין משמעות כי כפל וחילוק הן פע׳ הפוכות.

כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

1. בכל סעיף קִבעו: מי צודק? הַסבירו.

א. התרגיל **0 : 2**

גל אמר: $0 : 2 = 0$ כי $0:2 = 0\cdot\frac{1}{2}$.

עומר אמר: תוצאת התרגיל $0 : 2$ אינה מוגדרת, כי ל- 0 אין מספר הופכי.

עמית אמר: $0 : 2 = 0$ כי התרגיל $0:2$ מתאים לתרגיל: $0 = \square \cdot 2$, ו- $2\cdot 0 = 0$.

ב. התרגיל **2 : 0**

חיים אמר: תוצאת התרגיל $2 : 0$ אינה מוגדרת, כי זה כמו לכפול 2 בהופכי של 0, ול- 0 אין הופכי.

תומר אמר: $2 : 0 = 0$ כי אפס תמיד מאפס.

מיקי אמר: תוצאת התרגיל $2 : 0$ אינה מוגדרת, כי אין מספר שאם נכפול אותו ב- 0 נקבל 2.

יואל אמר: $2 : 0 = 2$ כי חילוק ב"כלום" זה כמו לא לחלק בכלל.

ג. התרגיל **0 : 0**

שוקי אמר: $0:0 = 0$ כי 0 לחלק לכל מספר זה 0

נתן אמר: $0:0 = 1$ כי מנה של מספר בעצמו זה 1

יוני אמר: יש הרבה תשובות, למשל: $0:0 = 5$ כי $0\cdot 5 = 0$ וגם $0:0 = \frac{1}{4}$ כי $0\cdot\frac{1}{4} = 0$

אלי אמר: $0:0$ אינו מוגדר כי לתרגיל חילוק צריכה להיות תשובה יחידה.

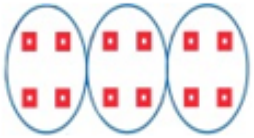
כל הזכויות שמורות©

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

קריאת תוצאות ממחשבון

$0 \overset{?}{=} n \cdot 0$

אין תוצאה יחידה כי כפל וחילוק הן פע׳ הפוכות.



אין משמעות לחילוק באפס כחיסור חוזר.

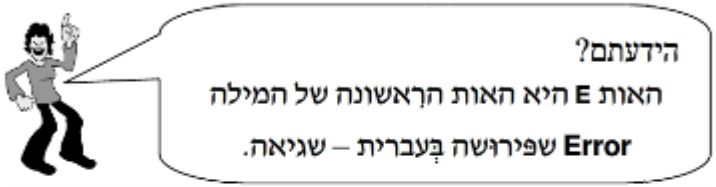
$1 \overset{?}{=} n \cdot 0$

אין משמעות כי כפל וחילוק הן פע׳ הפוכות.

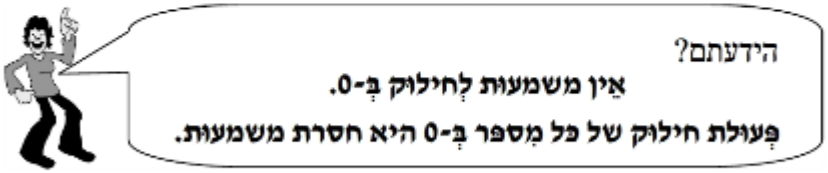
דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת אי-חילוק באפס

7. שָׁנִי חישבה בְּעזרת מחשבון את התרגילים הבאים וקיבלה על צג המחשבון את האות **E**.

13 : 0   0 : 0   2 : 0



א. קִראו את המֵידע שב"בּוּעה".



דוגמה: הפְּעוּלה $\boxed{4 : 0}$ היא חסרת משמעות.

ב. הַציעו דוגמה נוספת לְפעולת חילוק בְּ-0.

הפעולה _____ היא חסרת משמעות.

כל הזכויות שמורות©

אופן ההצדקה – אי-חילוק באפס

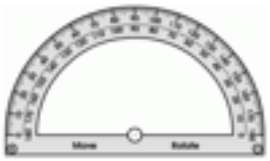
קשת של אופני הצדקה אפשריים:

הסקה בעזרת מקרה כללי : נניח בשלילה כי $\frac{a}{0}=k$ $(a\neq 0)$. נכפול את שני האגפים ב-0 ונקבל $0\neq a=k\cdot 0$, בסתירה לתכונת האפס.

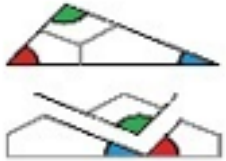
הסקה בעזרת מודל : שימוש בחלוקת סוכריות כמודל לחילוק במספר טבעי כחיסור חוזר.

פנייה לסמכות : העזרו במחשבון כדי לחשב את תוצאות תרגילי החילוק הבאים – $2.5:0$, $1:0$, $12:0$, $5:0$. מה קיבלתם?

דוגמאות לאמצעים מתמטיים להצדקת סכום הזוויות במשולש



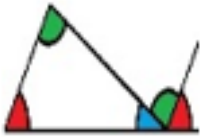
מדידה של זוויות המשולש



קיפול/קריעת המשולש וסידור חלקיו כך שייצרו זווית שטוחה

הורדת גובה פנימי ושימוש בסכום זוויות במשי"ז

במלבן יש 4 זוויות ישרות, לכן במשי"ז יש 2 זוויות ישרות



העברת מקביל לצלע דרך קודקוד ושימוש בשוויון זוויות מתחלפות ומתאימות

העברת מקביל לצלע דרך קודקוד ושימוש בשוויון זוויות מתחלפות

כל הזכויות שמורות©

אופן ההצדקה – סכום הזוויות במשולש

אופן הצדקה יכול להתבטא במגוון אמצעים מתמטיים:

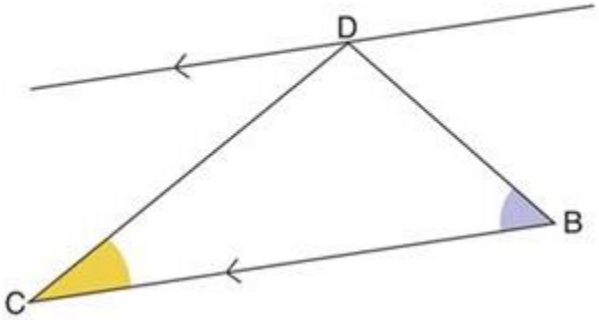
הסקה בעזרת מקרה כללי:

דיון

2

הסבירו בדרך נוספת מדוע סכום הזוויות במשולש הוא 180°.

היעזרו בסרטוט שלפניכם.



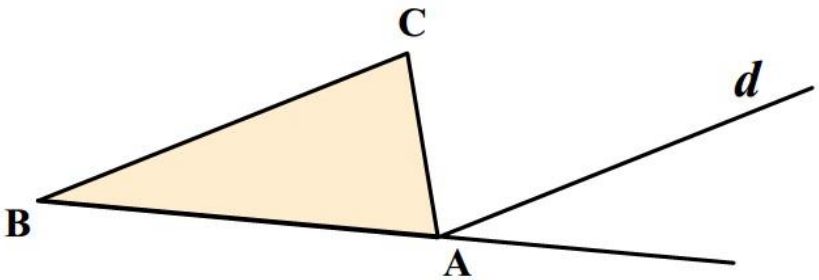
72

אפשר להסביר מדוע סכום הזוויות במשולש הוא 180°, על-ידי הסבר דומה לזה שקראתם בשיעור.

הסבר זה מבוסס על הסרטוט שלפניכם,

בו הישרים **BC** ו- d מקבילים.

כיצד, לדעתכם, אפשר להראות שסכום הזוויות של המשולש **ABC** הוא 180°?

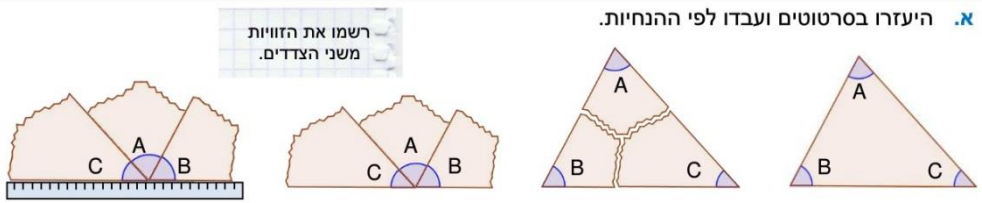


ביטויים שונים לאופן הצדקה – סכום זוויות במשולש

המחשה בהתנסות:

פעילות 6 – סכום הזוויות במשולש

א. היעזרו בסרטוטים ועבדו לפי ההנחיות.



א. גזרו מנייר משולש כרצונכם.

ב. קרעו את המשולש לחלקים, כך שכל חלק יכיל אחת מזוויות המשולש.

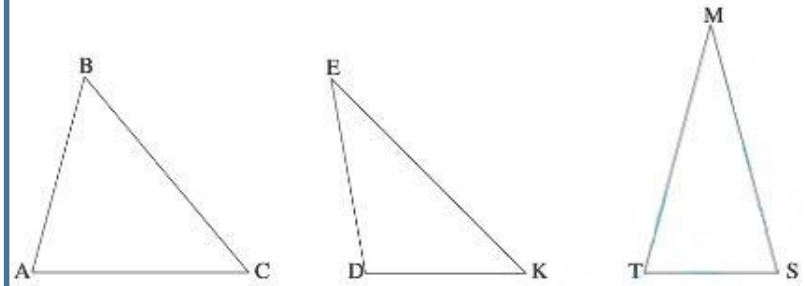
ג. סדרו את שלוש הזוויות של המשולש צמוד אחת ליד השנייה. מה קיבלתם?

ד. נראה ששלוש הזוויות יחד יוצרות זווית שטוחה. בדקו זאת באמצעות סרגל או דף נייר מלבני.

ב. מה ניתן להסיק מכך על סכום הזוויות במשולש?

ג. האם על-פי ההמחשה שראינו בפעילות זו ניתן להסיק ש**בכל** משולש סכום הזוויות הוא 180°?

109. **א.** לפניכם שלושה משולשים.



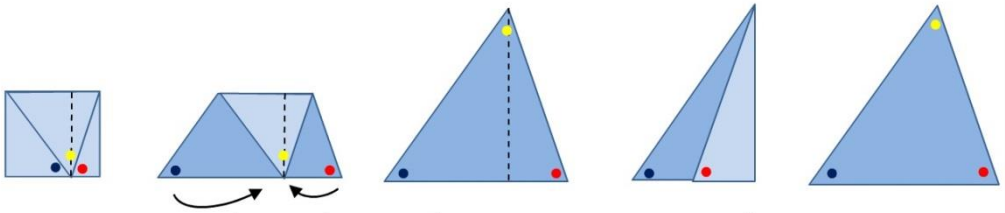
א. מדדו באמצעות מד-זווית את גודלו של הזוויות בכל אחד מהמשולשים.

ב. חשבו את סכום שלוש הזוויות בכל אחד מהמשולשים.

ג. סרטטו במחברתכם משולשים כלשהם, מדדו את זוויותיהם באמצעות מד-זווית, וחשבו את סכום שלוש הזוויות בכל אחד מהמשולשים.

פעילות 7 – אפשר גם אחרת – סכום הזוויות במשולש

א. גזרו מנייר משולש כרצונכם. סמנו את הזוויות בעזרת נקודות צבעוניות. ראו סרטוט א.
היעזרו בסרטוטים ועבדו לפי ההנחיות.



א. סמנו את הנקודות משני צדדי המשולש.

ב. קפלו את הקדקוד עם הנקודה האדומה לעבר הנקודה הכחולה. קו הקיפול צריך לעבור בקדקוד המסומן בנקודה צהובה.

ג. פיתחו את המשולש. הסבירו מדוע קו הקיפול שקיבלתם הוא גובה במשולש.

ד. קפלו את המשולש כך שקדקוד הגובה (הנקודה הצהובה) נוגע בעקב הגובה. קפלו את שני הקדקודים האחרים לעבר הנקודה הצהובה.

ה. כך נראה הקיפול הסופי.

ב. התבוננו במשולש במצב מקופל (סרטוט ה). מה ניתן להסיק מכך על סכום הזוויות במשולש?

ג. האם היינו מקבלים תוצאה דומה אם היינו מקפלים גובה דרך קדקוד אחר של המשולש? נסו זאת.

כל הזכויות שמורות©

סיכום - "אפשר להסביר בעוד דרך?"

- אפשר לבחור אמצעי מתמטי אחר;
  - הצדקה ריגורוזית או דידקטית?
  - להשאר עם אותו אופן הצדקה או להחליף?

- אפשר לבחור אופן הצדקה שונה עבור אותו אמצעי מתמטי;
  - הסקה עם מקרה פרטי או כללי?
  - מודל מתמטי או אנלוגיה איכותנית?