



# מכונת עתיקה מנצחת בראלי המתמטי

מירי עמית ודניאלה לוזון

## מהו הראלי המתמטי?

"הראלי המתמטי" הוא שמה של סדרת תחרויות מתמטיות בינלאומיות המתקיימות מדי שנה בשנה בכמה ממדינות אירופה, בקנדה ובישראל. בישראל מתקיים הראלי המתמטי משנת 1999, בחסות המרכז להוראת המדעים והטכנולוגיה באוניברסיטת בן-גוריון בנגב בשיתוף מחוז דרום של משרד החינוך. בשנים 1999-2004 השתתפו בראלי המתמטי בישראל כ- 19,000 תלמידים בלמעלה מ- 600 כיתות בשכבות ג-ו.

משימות הראלי המתמטי אחידות לכל המשתתפים ובכתיבתן לוקחים חלק נציגים של המדינות השונות. התחרות מתקיימת בין כיתות, בכל שכבת גיל בנפרד, בשלושה שלבים: שני השלבים הראשונים פתוחים לכל בתי הספר המעוניינים להשתתף, אך לשלב הגמר עולות רק כיתות שהשיגו תוצאות גבוהות על-פי מדדי הערכה מפורטים, שנקבעו מראש בידי צוות הראלי המתמטי הבינלאומי, והם חלים על כל אחת מן המדינות המשתתפות. התשובות של הכיתות המנצחות בכל המדינות המשתתפות נשלחות להערכה למטה הראלי המתמטי בשווייץ, כדי לאפשר מיפוי בינלאומי של פתרונות אפשריים והשוואה ביניהם על-פי מדינות וקבוצות גיל.

על-פי כללי הראלי המתמטי, על כל כיתה להתמודד עם חמש עד שבע משימות, במשך 55 דקות בדיוק, ולספק תשובה כיתתית אחת ומוסכמת לכל משימה. התארגנות הכיתה לקראת ביצוע המשימות נתונה כולה לאחריות התלמידים: התלמידים מתחלקים בעצמם לקבוצות, מקצים משימה לכל קבוצה, פותרים ביחד את הבעיה ומחליטים כיצד להציג את התשובה וכיצד לתאר את דרך הפתרון. למבוגרים הנוכחים בכיתה אסור להתערב בעבודת התלמידים.

התפיסה הפדגוגית המונחת בבסיס הראלי המתמטי שמה לה למטרה לקרב את המתמטיקה לחיי היומיום, לפתח יצירתיות וכושר התמדה בקרב התלמידים ולהעצים את

## לוחית רישוי של מכונת עתיקה

תמי, גד ויואל מתבוננים בלוחית רישוי של מכונת עתיקה.

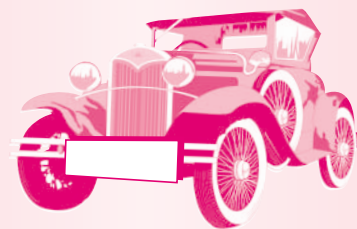
תמי אומרת: "המספר שעל לוחית הרישוי מורכב משש ספרות והוא מתחלק ב-3".

גד בודק ומוצא שאם קוראים את המספר משמאל לימין, כל ספרה גדולה מן הספרות שקודמות לה. יואל מוסיף: "זוגות הספרות, כלומר הספרה הראשונה והספרה השנייה, הספרה השלישית והספרה הרביעית, הספרה החמישית והספרה השישית - יוצרים שלושה מספרים ראשוניים". (זכרו: למספר ראשוני יש שני מחלקים בדיוק - 1, והמספר עצמו).

## מה מספר לוחית הרישוי של המכונת?

הסבירו איך הגעתם לתשובה.

שאלה זו, שהוצגה בידי הכותבים בכנס לקידום החינוך המתמטי, תשס"ד, היא דוגמה אופיינית לבעיות המוצגות לתלמידים בתחרויות הראלי המתמטי.



(על חוברות הראלי המתמטי ראו בעמוד 53)

### פרופ' מירי עמית

ראש המחלקה להוראת המדעים באוניברסיטת בן גוריון בנגב, ובעבר מפמ"רית מתמטיקה במשרד החינוך. תחומי המחקר והעיסוק בחינוך מתמטי כוללים: קידום מצויינות מתימטית, דרכי חשיבה ופתרון של בעיות לא שגרתיות, חלופות בהערכת הישגים, והיבטים תרבותיים ו חברתיים בחינוך מתימטי. עומדת בראש הראלי המתמטי הישראלי.

### ד"ר דניאלה לוזון

למדתמטיקה וחינוך מאוניברסיטת פריז. לשעבר מדריכה מחוזית למתמטיקה במחוז ירושלים (על-יסודי) ובמחוז דרום (יסודי) וראש תחום מתמטיקה במרכז מורים דימונה (מטעם אוניברסיטת בן-גוריון), כיום משמשת יועצת מדעית, כותבת ועורכת של "חשבון 10". משתתפת בהפעלת ה"ראלי" מטעם אוניברסיטת בן-גוריון.

להן, קביעת תחומי הידע הנדרשים להתמודדות עם המשימה, בדיקת דרכי פתרון אפשריות, הצגת התשובה המלאה בדרכים שונות, והצעה להערכה מדורגת, על-פי השלבים השונים של הפתרון.



### **ייחודן של משימות הראלי המתמטי בא לידי ביטוי הן ברובד המתמטי והן**

#### **ברובד הפדגוגי, כפי שניתן לראות להלן:**

■ לא קיים אלגוריתם טרומי (pre fabricated) לפתרון הבעיות, ואין נוסחה או משוואה שניתן להציב בה את נתוני השאלה ולקבל את התוצאה הרצויה. על התלמידים לפתח אסטרטגיות פתרון אד-הוק בכל מקרה ומקרה לגופו.

■ המשימות מזמנות אפשרות להשתמש באסטרטגיות פתרון מגוונות, ובהן: ניסוי וטעייה, אלימינציה, שימוש במקרי קצה, קיבוע משתנה (invariant) וכדומה.

■ המשימות מזמנות אפשרות להשתמש בדרכי ייצוג רבות, הן כאמצעי עזר לפתרון והן לצורך הנמקה והסבר, ובהן: שרטוט דיאגרמות או גרפים, צביעה, גזירה, המללה וכדומה.

■ לעתים הפתרונות אינם סינגולריים (יחידים) - כלומר, יש יותר מפתרון נכון אחד - ואלה תלויים בהנחות היסוד, בדרכי הגישה ובמסקנות של התלמידים.

■ המשימות דורשות בדרך כלל הסבר והנמקה מלאים, ואלה מחייבים תיעוד מלא של תהליך החשיבה ודרכי הפתרון.

■ השימוש במושגים וברעיונות מתמטיים נעשה בתוך תחומים שונים של המתמטיקה - וזאת בשונה מאוד מן המסגרת המושגית של תכניות הלימודים בבתי הספר.

■ המשימות מבוססות על אינטגרציה של תחומים שונים, הן בתוך המתמטיקה והן בין המתמטיקה לחיי היומיום.

גם דרכי ההערכה של התוצאות אינן שגרתיות, שכן, לא רק התשובה הסופית חשובה אלא גם תהליך החשיבה, יכולת ההסבר וההנמקה. כל אלה עשויים להעיד על הבנה, גם אם התשובה הסופית שגויה בשל טעות חישוב. ואכן, ביצוע נכון ומלא של משימות הראלי המתמטי מורכב בדרך כלל משלושה שלבים: א. מציאת הפתרון; ב. הצגה ותיעוד מלא של דרכי הפתרון; ג. נימוק והצדקה של הפתרון על כל שלביו. הערכת התשובה כולה מותאמת לשלבים השונים של הביצוע.

היכולת האינטלקטואלית. משימות הראלי המתמטי נגזרות מתפיסה פדגוגית זו: הן מזמנות אפשרות לשיח מתמטי ולדיון כיתתי, פותחות צוהר להכרת נושאים מתמטיים חדשים, ומעודדות חיפוש אחר חוקים מתמטיים ודרכים ליישם, גם אם אלה עדיין לא נלמדו בכיתה. לראלי המתמטי יש אפוא ערך מוסף: התלמידים נחשפים לפעילות מתמטית מהנה החורגת מן השגרה: למורים ניתנת האפשרות "להיכנס לראש של התלמידים", בלשונם, לא כמורים אלא כאנשי מקצוע הצופים באובייקטיביות מן הצד; ולמורים, במסודות להכשרת מורים מתאפשר לנתח, ביחד עם המורים, עבודות של תלמידים מבתי ספר שונים ומקבוצות גיל מגוונות, לבדוק דרכי חשיבה לא שגרתיות, לעמוד על אסטרטגיות של פתרון בעיות, ולבחון את התוצאות מן ההיבט המחקרי. הראלי המתמטי אינו מכביד על תכנית הלימודים ואינו מחייב למידה של נושאים חדשים, ויחד עם זאת יתרונותיו רבים: הן בהבנה ובצבירה של ידע מתמטי, והן ביצירת עמדות חיוביות כלפי פעילות מתמטית, והן בהתנסות בעבודה משותפת.

תחרויות הראלי המתמטי אינן מזכות את התלמידים בציון בתעודה, הן אינן בודקות את יכולתו של המורה, ותוצאותיהן אינן משוקללות לצורך דירוג בינלאומי (בשונה ממבחני השוואה בינלאומיים), אולם יש בהן הערכה ויש דירוג של מנצחים, הן בבית הספר והן במחוז כולו. יש חדוות ניצחון ואף יוקרה - גם בקרב המורים וגם בקרב התלמידים. לפיכך נושאים אירועי הראלי המתמטי בבית הספר אופיי של חגיגה למורים ולתלמידים גם יחד.

### **משימות הראלי המתמטי**

משימות הראלי המתמטי מעמידות אתגרים מורכבים לפני התלמידים, שכן אין מדובר במשימות שגרתיות המוכרות מספרי הלימוד למתמטיקה. בתהליך בניית המשימות דן צוות הראלי המתמטי הבינלאומי בשאלות כגון:

- מהן דרכי הפתרון האפשריות?
  - כיצד ינמקו התלמידים את התשובות וכיצד יסבירו את דרכי הפתרון?
  - מהן המיומנויות הנדרשות לפתרון המשימה?
  - מהן הטעויות השכיחות הצפויות?
  - מהן המכשלות האפשריות או הצפויות?
  - כיצד ניתן להעריך את הפתרונות האפשריים?
- לכל משימה מצרף צוות הראלי המתמטי הבינלאומי ניתוח שיטתי הכולל: הגדרה של קבוצות הגיל שהמשימה מיועדת

אפשרי ומשני. והנה, בבדיקת התשובות של תלמידים בישראל נמצאו כמה כשלים שחזרו שוב ושוב, בשכיחות גבוהה. כשלים אלה לא היו ייחודיים לקבוצות גיל, לבתי ספר או לאזורים מסוימים. ננתח, אפוא, את התשובות על-פי האילוצים המובאים בשאלה ונסה לזהות את הכשלים ולהצביע על מקורם.

### החיפוש הנואש אחר חוקיות

#### מונוטוניות ואוטומטיזם

מניתוח תשובות התלמידים התברר שמושג המונוטוניות לא היווה כל מכשול והתלמידים ידעו היטב כיצד לסדר מספרים בסדר עולה, אף שבמקרים רבים התברר שהתלמידים החליפו את הסדר העולה של הספרות - מימין לשמאל במקום משמאל לימין, כנדרש בשאלה. שגיאה זו הייתה אופיינית רק לתשובות התלמידים בישראל; בשום מדינה אחרת לא נמצאה שגיאה מעין זו. סביר להניח שהדבר נובע מכך שעברית כותבים מימין לשמאל, והתלמידים הכלילו את כיוון הכתיבה על המונוטוניות של הספרות. ואולם, תופעה מפתיעה אחרת חזרה על עצמה לעתים קרובות: הוספת חוקיות למונוטוניות. מסתבר שתלמידים רבים הציבו לעצמם אילוץ נוסף וחיפשו רק מספרים עוקבים, ואילו אחרים החליטו על חוקיות שונה במונוטוניות - למשל "קפיצה" של שתי ספרות, או "קפיצה עולה" - או חיפשו מספרים "עוקבים וקודמים", כפי שניתן לראות באיור 1.

כעת, לאחר הצגת הראלי המתמטי ועקרונותיו, נחזור לבעיית מספר לוחית הרישוי של המכונית העתיקה, כדי להדגים באמצעותה את האופי הייחודי של משימות הראלי המתמטי. תחילה נדון בבעיה ואחר כך נציג כמה כשלים שעלו מניתוח תשובות של תלמידים בארץ. ננסה להבין את דפוסי החשיבה שהובילו לכשלים אלה, ונצרך כמה המלצות דידקטיות. לבסוף, בנספח למאמר, נציג את ניתוח המשימה ואת דרכי הפתרון הצפויות, כפי שאלה הוצעו בידי צוות הראלי המתמטי הבינלאומי.

### חזרה למכונית העתיקה

#### התמודדות עם אילוצים

הבעיה שכאננה כאן "לוחית רישוי של מכונית עתיקה" ניתנה לכיתות ה-ו וניתן לראות בה דוגמה מובהקת לבעיה לא שגרתית. מצד אחד, הבעיה לקוחה מחיי היומיום. כל תלמיד יודע מהו מספר לוחית רישוי של מכונית, ותלמידים רבים אף מכירים חוקים בנוגע למספרים אלה-כמו, למשל, ששתי הספרות האחרונות ציינו בעבר את שנת הייצור של המכונית, או שהספרה 0 לעולם אינה הספרה הראשונה משמאל. (כיום, מספרי לוחיות רישוי במדינת ישראל מורכבים משבע ספרות, ולכן החלנו את הבעיה על מספר של מכונית עתיקה, המורכב משש ספרות בלבד.) מצד אחר, אין אלגוריתם או "מתכון" לפתרון הבעיה, אי-אפשר לתייג אותה כבעיה מילולית מוכרת, כגון "בעיית תנועה" או "בעיית מחירים", ובוודאי שאין בעיות דומות לה בספרי הלימוד. לכן, כדי להתמודד עם המשימה, על התלמידים לפתח אסטרטגיות פתרון משלהם.

למעשה, הבעיה מורכבת משלושה אילוצים מתמטיים המתקיימים בעת ובעונה אחת: **מונוטוניות של שש הספרות המרכיבות את המספר; התחלקות המספר ב-3, וקיומם של שלושה מספרים דו-ספרתיים ראשוניים זה לצד זה.** פתרון הבעיה תלוי בהכרת מושגים ורעיונות מתמטיים מרכזיים, כגון: ההבחנה בין ספרה למספר, סימני התחלקות ב-3 (או התחלקות ב-3 ללא שארית), מספרים ראשוניים, מונוטוניות וסדרות מספרים. כל הנושאים הללו נכללים בהקשרים שונים בתכנית הלימודים בבתי הספר.

בניתוח המקדים צפו מפתחי השאלה קשיים בהכרה ובהבנה של שני מושגים מרכזיים - סימני התחלקות ב-3, ומספרים ראשוניים. מורכבות הבעיה, כלומר, הדרשה להתמודד עם שלושה אילוצים בבת אחת, נצפתה כקושי

מה הוא המספר של לוחית הזיהוי של המכונית?  $1234564$  -  $\frac{1234564}{3711}$  אם רישוי

הסבירו איך מצאתם את התשובה.

- נתנו נתונים
- השאלה היא אם אפשרי הולנונים לשים אותם מחיכים מספרים עוקבים וקודמים
- חי' בתי יות הכיף יחך אג'ני את התשובה!

איור 1

במקרה זה (איור 2) ההסבר שניתן על-ידי התלמידים הוא: "הגענו למסקנה כך: בשלב הראשון שרטטנו שישה ריבועים, ואחר כך, בשלב השני, חשבנו על מספרים שאם נחבר את סכומם הוא יתחלק ב-3. בשלב השלישי והאחרון בדקנו אם כאשר מחלקים את המספרים לזוגות, סכומו של כל זוג יהיה מספר ראשוני, וזכינו להצלחה". בתשובה זו, התלמידים בחרו את סדרת המספרים העוקבים הבאה כמספר לוחית הרישוי של המכונית העתיקה: 1 2 3 4 5 6 (שימו לב: המונטוניות היא מימין לשמאל!). ההתחלקות ב-3 נבדקה באמצעות חיבור הספרות ונמצאה, כאמור, תוצאה בת מזל. ייתכן, כמובן, שהתלמידים פעלו על סמך הכרה של סימני ההתחלקות ב-3, אולם מתשובתם ניתן להסיק שבמקום להתייחס למספרים עצמם התייחסו התלמידים בכל שלב לסכום הספרות. ללא ההסבר המפורש אפשר היה לחשוב שהתלמידים הסתמכו על סימני התחלקות.

אם כן, סביר להניח שהתלמידים לא הכירו במקרה זה את סימני ההתחלקות ולמעשה לא ניסו כלל לחלק את המספר עצמו, אלא את סכום הספרות. הנחה זו, לפיה התלמידים חילקו את סכום הספרות ב-3 בגין הבנה או פרשנות שגויה של האילוץ, ולא על סמך הכרה של סימני ההתחלקות, מתחזקת לנוכח העובדה שאף-על-פי שתלמידים נוהגים בדרך כלל לנמק את תשובותיהם בראיית המתמטי בעזרת הסתמכות על חוקים שונים, אף לא תלמיד אחד ציין במפורש את כלל ההתחלקות ב-3. הנחה זו מתחזקת אף יותר לנוכח טעות דומה מאוד בהבנת האילוץ הבא.

### ראשוניות: הכללה שגויה, ניסוח מטעה

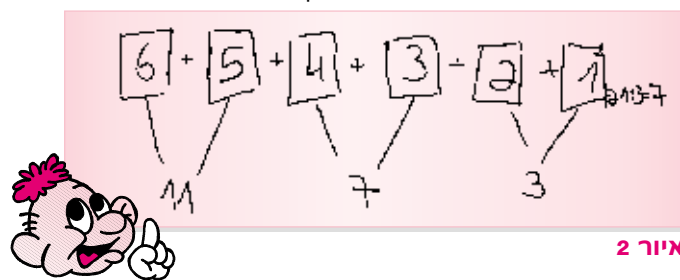
על-פי האילוץ האחרון המוצג בשאלה, זוגות הספרות יוצרים מספרים דו-ספרתיים ראשוניים. הצוות הישראלי ציפה שהתלמידים יכתבו תחילה את המספרים הדו-ספרתיים הראשוניים, ואחר כך יסדרו אותם בסדר עולה; ציפיה זו התממשה רק במקרה אחד. רבים מן התלמידים חישובו את סכום הספרות של המספר הדו-ספרתי ובדקו אם סכום זה הוא מספר ראשוני, במקום לבדוק אם המספר עצמו הוא מספר ראשוני. כך, למשל, בתשובה המובאת באיור 2, התלמידים בחרו, כאמור, את

תופעה זו נובעת ככל הנראה מהתנסות רבה ושיטתית של התלמידים בחשיבה "על-פי חוקים". בבית הספר, התלמידים מתנסים במנייה ב"קפיצות" קבועות, אחורה או קדימה, בבניית סדרות שיש בהן חוקיות, ואילו בשאלה מוצג מקרה של "היעדר חוקיות" במונטוניות. תופעה זו הייתה זרה ככל הנראה לרבים מן התלמידים, והם ניסו למלא את החסר בחוקיות משלהם. ייתכן אפוא שהוספת אילוץ זה נבעה מנטייה לאוטומטיזם<sup>1</sup> (auto-math), כלומר, התלמידים קשרו- מתוך הרגל- בין עלייה מונטונית ובין עלייה במרווחים קבועים.

### סימני התחלקות ב-3: ידע או מזל?

האילוץ הראשון המובא בשאלה, התחלקות ב-3, נבדק בדרך כלל בשתי דרכים. הדרך הראשונה היא יישום ישיר של האילוץ, כפי שהוא מנוסח בשאלה: מספר לוחית הרישוי מתחלק במלואו ב-3 כלומר, ללא שארית. התלמידים חילקו את המספר בן שש הספרות ב-3 ובדקו אם התקבל מספר שלם. ואכן, למעט שגיאות חישוב פה ושם, דרך זו הובילה לפתרון הנכון.

הדרך השנייה היא, לכאורה, יישום של כלל ההתחלקות ב-3: אם סכום הספרות של מספר מתחלק ב-3, המספר עצמו מתחלק ב-3. ואכן, התלמידים סיכמו את הספרות של מספר המכונית ובדקו אם הסכום מתחלק ב-3. תחילה הסקנו, בשמחה רבה, שהתלמידים מכירים את סימני ההתחלקות ב-3 ופעלו בהתאם, אולם מסקנה זו הועמדה בספק לאחר מכן. שכן, מניתוח התשובות, ההסברים וההנמקות התברר שרבים מן התלמידים טעו בהבנת האילוץ והסיקו שהוא חל על **סכום** הספרות המרכיבות את המספר, ולא על המספר עצמו. התלמידים אף השתמשו בביטויים כגון "התוצאה של כל המספרים מתחלקת ב-3", או "המספרים יוצרים מספר המתחלק ב-3". כך או כך, תהליך הסכימה לבדיקת ההתחלקות נכון, יהא המניע אשר יהא, כפי שניתן לראות באיור 2.



איור 2

<sup>1</sup>כאן, כמו במקרים אחרים שידונו בהמשך, ריאיון אישי עם התלמידים היה מבהיר את מניעיהם ואת דרכי המחשבה שהובילו להוספת האילוץ. בהעדר ריאיון, הנמקות התלמידים הן קצה חוט שאפשר להיאחז בו כדי לנסות להבין את דרך החשיבה ואת מקור הטעויות.

ג. ייתכן שתלמידים שזכרו את סימני ההתחלקות של מספר באמצעות סכימה של ספרות, גם אם לא ציינו זאת במפורש, גלשו לביצוע סכימה דומה בנוגע לאילוץ הבא, לפיו המספרים הדו-ספרתיים הם מספרים ראשוניים, אף-על-פי שהדבר אינו עולה כלל מן השאלה. את סימני ההתחלקות של המספר ב-3 הם הרחיבו והחילו גם על בדיקת הראשוניות. במילים אחרות, את הכלל לפיו אם סכום הספרות של מספר מתחלק ב-3 אז המספר כולו מתחלק ב-3 הם הרחיבו ויצרו כלל שגוי, לפיו אם סכום הספרות של מספר הוא מספר ראשוני, גם המספר הוא ראשוני.

### עמידה באילוצים: "ניהול פתרון בעיות"

כדי למצוא את מספר לוחית הרישוי של המכונית העתיקה יש להסתמך על ידע והכרה של מושגים מתמטיים ולקיים שלושה אילוצים בעת ובעונה אחת: מונוטוניות, התחלקות ב-3, וראשוניות. מניתוח התשובות עולה שאת הקשיים בפתרון הבעיה ניתן לייחס במידה רבה לניהול כושל של תהליך הפתרון, היינו, לחוסר יכולת להפעיל במקביל כמה כללים מתמטיים, גם אם הם מוכרים וידועים. כך, למשל, בתשובות רבות בלטה לעין ההתעלמות מלכתחילה מאחד מן האילוצים, או מציאת פתרון העומד באילוץ אחד ונטישתו לטובת פתרון שעומד באילוץ אחר אך אינו מקיים את האילוץ הפותח. בדרך כלל עמדו

סדרת המספרים העוקבים 1, 2, 3, 4, 5, 6 ובמקום לבדוק אם כל זוג ספרות סמוכות יוצר מספר דו-ספרתי ראשוני, בדקו התלמידים אם סכום ספרותיו של המספר הדו-ספרתי הוא ראשוני, כלומר:  $3=2+1$ ,  $7=4+3$ ,  $11=5+6$ . מסכום כל זוג ספרות התקבל סכום שהוא מספר ראשוני, ובכך התקיים, לשיטתם ועל-פי דרכם של התלמידים, האילוץ השלישי.

כך גם בדוגמה באיור 3: המספר הוא 0 3 6 7 8 9 ניתן להניח שהכשלים בהבנת אילוץ זה נובעים מכמה סיבות:

א. כזכור, האילוץ מנוסח בשאלה באמצעות ו"ו החיבור: "זוגות הספרות - כלומר, הספרה הראשונה והספרה השנייה, הספרה השלישית והספרה הרביעית, הספרה החמישית והספרה השישית - יוצרים שלושה מספרים ראשוניים". בלימוד פתרון בעיות מילוליות, ו' החיבור היא מעין רמז מקובל לביצוע פעולת חיבור. ייתכן שכאן נעוץ מקורו של הכשל.

ב. כאשר נתונים מספרים, תלמידים נוטים לבצע פעולה חשבונית ביניהם. תופעה זו נמצאה בניתוח תוצאות מבחני הישגים ארציים. ייתכן ששוב ניכרת כאן הנטייה לאוטומטיזם, המתבטאת בנטייה לביצוע אוטומטי של פעולות בין מספרים<sup>2</sup>. בהנמקותיהם לתשובות ציינו התלמידים במפורש שביצעו פעולות חיבור בין הספרות.



מה הוא המספר של לוחית הרישוי של המכונית?

הסבירו איך מצאתם את התשובה.

מציאת מספרים שספרותיהם יחדיו  
 כפי שגיה יאורה הפקודת:

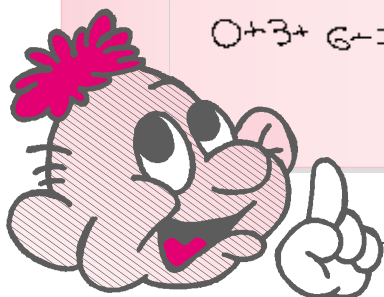
חיבור בין כל מספרים ראשוניים  
 מספר ראשוני

$$0+3=3 \quad 6+7=13 \quad 8+9=17$$

$$0+3+6+7+8+9 = 33 \quad \text{חיבור בין כל הספרות ראשוני}$$

$$\underline{\underline{33}} \quad \text{מפתח ה-3}$$

איור 3



<sup>2</sup>המרכז הארצי לבדיקת מבחני הישגים במתמטיקה, 1996

קל מאוד לברוח אל הטענה האומרת שהתלמידים לא הבינו את השאלה, אולם הכשלים שנחשפו בניתוח התשובות חורגים הרבה מעבר ל"אי-הבנת הנקרא". מדובר בשגיאות לא מקריות, השכיחות מאוד הן בקבוצות גיל שונות והן בבתי ספר במקומות שונים זה מזה. יתרה מזאת, בניתוח תשובות התלמידים לא ניתן להתעלם מגורמים דידקטיים, שכן, לא זו בלבד שבבעיה זו מתקיימים שלושה אילוצים במקביל, קשיים נוספים נובעים מאופי האילוצים, מתוכם ומן האינטראקציה שבין אילוח לאילוח. למעשה, מניתוח תשובות התלמידים עלו שני כשלים מרכזיים:

א. כשל הנובע מקיומם של הרגלים מתמטיים והכללתם, או הרחבתם והחלתם, על סיטואציות לא מתאימות. כשל זה הוגדר כאן כ"אוטומטיזם", "הכללה שגויה" או "חיפוש אחר חוקיות".  
 ב. כשל הנובע ממורכבות הבעיה ומן הדרישה לקיים שלושה אילוצים שונים בעת ובעונה אחת. כשל זה הוגדר כאן כ"כשל בניהול פתרון הבעיה".

בהצבעה על שני כשלים מרכזיים אלה אין משום המעטה בחשיבות השליטה במושגים המתמטיים ובפעולות החשבון הבסיסיות. אלה אכן מהווים תנאי הכרחי לפתרון בעיות-אך לא תנאי מספיק.

כדי לפתור בעיות מורכבות ולא שגרתיות יש לדעת כיצד להימנע מאוטומטיזם ובעיקר כיצד לנהל את תהליך הפתרון. למה הדבר דומה? לשחקן כדורסל שיודע כיצד לכדרר או לקלוע כדור לסל אך עליו ללמוד כיצד "לנהל" את כל פעולותיו כדי לנצח. נביא דוגמה (איור 4) לניהול מצוין של פתרון הבעיה, אף שהתוצאה שגויה עקב טעות חישוב.

הדרך שאני היא כאלה: זחרני מספר ראשוני 13-ספרתי  
 מספרת האחזות 12 היא 9, כי היא הספרה הגדולה ביותר  
 האפשרית, ומשמאלה 8, שקטנה באחד. צדקני וראוין  
 89- הוא מספר ראשוני. הולג השני הוא מספר ראשוני  
 13-ספרתי המסתיים 2-7. זחרני את המספר 57.  
 הולג השלישי הוא מספר 13-ספרתי ראשוני שחייב להסתיים  
 2-3. 4 איננה יכולה להיות ספרת האחזות כי יתקבל  
 מספר זוגי. זחרני זמספר 23 שהוא מספר ראשוני,  
 אולם המספר כולו לא מתחלק ל-2, 3, ולכן זמקום  
 23 זחרני 13.  
 שכשיו המספר מתחלק ל-2, 3.



איור 4

התלמידים באילוח המונוטוניות, שהוא אילוח שגרתית ואינטואיטיבי, וכן באילוח נוסף אחד בלבד - או התחלקות ב-3 או ראשוניותם של המספרים הדו-ספרתיים, אף שהיו גם פתרונות שקיימו את שני האילוצים הללו אולם התעלמו מן הדרישה למונוטוניות. כך, למשל, באחת מן התשובות כתבו התלמידים שהמספר הוא 2 1 2 3 2 5 . אילוח הראשוניות נבדק על-פי הסכומים של זוגות הספרות:  $2+1=3$ ,  $3+2=5$ ,  $5+2=7$  באמצעות חלוקת סכום הספרות ב-3, כפי שנכתב במפורש: "2 ועוד 5 ועוד 2 ועוד 3 ועוד 2 ועוד 1 שווה 15 מתחלק ב-3". לעומת זאת, התשובה אינה מקיימת את אילוח המונוטוניות, והאילוח עצמו אינו נזכר כלל בתשובת התלמידים. יחד עם זאת, אין לדעת אם המספרים הראשוניים 3, 5, 7, נבחרו כשלושה מספרים ראשוניים עוקבים או כמספרים המקיימים את אילוח המונוטוניות. אם כן, תשובות רבות היו שגויות משום שלא קיימו את כל תנאי השאלה. כדי לקיים את כל האילוצים המוצגים בשאלה על התלמידים לפתח אסטרטגיה המכונה "control of constrains" - "בקרת אילוצים". הדרך הטובה ביותר לעשות זאת היא לקבוע מראש את סדר ההתמודדות עם האילוצים. לבחור תחילה אילוח אחד, לאו דווקא האילוח הראשון, להתמודד עמו ולקבל תוצאת ביניים ראשונה, על תוצאת ביניים זו יש להפעיל את האילוח השני, עד לקבלת התוצאה הרצויה, המקיימת את שני האילוצים, ולבסוף, על התוצאה החדשה, יש להפעיל את האילוח השלישי, עד לקבלת קבוצת החיתוך המקיימת את כל האילוצים. תהליך זה דורש כושר ניהול של מצבי בעיה ותהליכי פתרון - נושא שאינו נכלל במפורש בתכניות הלימודים בבתי הספר. גם תלמידים שהכירו היטב את המושגים המתמטיים ולא התקשו בהבנת הנקרא- כלומר, קראו נכון והבינו את הנדרש בכל אילוח - נכשלו ב"ניהול" נכון של הבעיה. "ניהול פתרון בעיות" (problem solving management) הוא תורה שיש ללמוד כדי לפתור בעיות בדרך הטובה והיעילה ביותר.

### סיכום והמלצות דידקטיות

הממצא המעניין ביותר בניתוח תשובות התלמידים היה "הממצא שלא נמצא". כמעט לא נמצאו קשיים בהכרת המושגים המתמטיים, כגון מונוטוניות או מספרים ראשוניים, ואף לא בבדיקת ההתחלקות ב-3 של מספר לוחית הרישוי. ובכל זאת, רק מעט תלמידים הגיעו לפתרון הנכון.

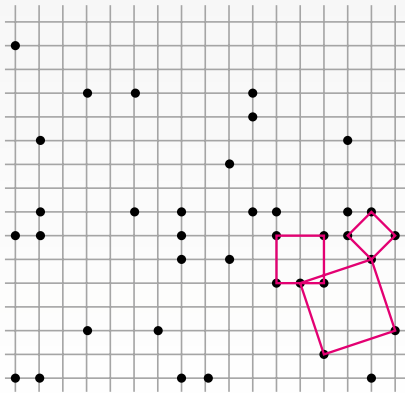


## 10+ ועוד בסימן 10...

### עשרה ריבועים מתחבאים

ברשת שלפניכם מסתתרים ריבועים. קדקודי הריבועים מודגשים בתרשים. על-פי הקדקודים ניתן לשרטט את הריבועים. לדוגמה, בחלק התחתון מצד ימין משורטטים שלושה ריבועים.

**כמה ריבועים נוספים מתחבאים ברשת?**  
הדגישו את הריבועים בצבעים שונים.



מתוך ספר משימות "הראלי המתמטי"

הבחירה במספר 57 כמספר ראשוני היא טעות חשבונית נפוצה הפוגעת כאן בתוצאה אך אינה משבשת את ניהול הפתרון. ואכן, תהליך הפתרון "ניהול" כאן היטב, משום שהתלמידים לא הפעילו אילוץ אחד על כל ששת המספרים בבת אחת אלא בהדרגה, מימין לשמאל, תוך אלימינציה של מקרים שאינם אפשריים (לדוגמה, אי-אפשר שהספרה 4 תהיה ספרת האחדות במספר ראשוני).

יחד עם זאת, התלמידים קיבעו אילוץ אחד לכל אורך התהליך - אילוץ המונוטוניות. אילוץ זה חייב אותם להתחיל בספרה 9, שהיא הספרה הגדולה ביותר מימין, ולרדת בכל פעם במספר אחד או יותר, עד שיתקבל מספר ראשוני. לסיום נבדקה ההתחלקות ב-3, ובעת הצורך שינו התלמידים את המספר (מ-23 ל-13).

בדרך זו התלמידים לא רק פיתחו תהליך של קיבוע משתנים אלא גם השתמשו באסטרטגיות של אלימינציה, ניסוי וטעייה, סתירה ושלילה.

שילוב נכון של ידע אודות מושגים מתמטיים, פיתוח אסטרטגיות של פתרון, ובייחוד ניהול הפתרון - כל אלה עשויים להעצים את יכולתם של התלמידים לפתור בעיות לא שגרתיות.

הבעיה שנדונה במאמר היא דוגמה אופיינית לייחודיותן של משימות הראלי המתמטי. בדרך כלל, בעיות מילוליות מוצגות לפני התלמידים עם סיום פרק לימודי מסוים. לפיכך, הן המורה והן התלמיד יודעים היטב באילו מושגים מתמטיים יש להשתמש כדי לפתור את הבעיה. אולם משימות הראלי המתמטי הן "מעבר לזמן ולמקום" - הן אינן קשורות לפרק מסוים בתכנית הלימודים ואין הן מגבילות את התלמיד לשימוש במושג זה או אחר. להפך, התלמיד "שולף" את המושג הנחוץ לו מתוך המאגר שעומד לרשותו, על-פי הבנתו ועל-פי יכולתו להשתמש בו, לא משום שנדרש לו על-פי תכנית הלימודים או בשל הוראה מפורשת של המורה, אלא משום שהמושג עשוי לסייע לו בפתרון הבעיה. המושג מותאם לבעיה, ולא להפך.

לסיכום, הבנת מושגים מתמטיים היא תנאי הכרחי אך לא מספיק לפתרון בעיות מתמטיות לא שגרתיות. לשם כך נדרשת גם יכולת "ניהול" של תהליך הפתרון, כלומר, יכולת להתמודד עם כמה אילוצים המוצגים בעת ובעונה אחת ולהביא לידי כך שהפתרון יקיים את כל האילוצים, כנדרש בשאלה. כפי שבחיי היומיום יש לפתח אלגוריתם של ניהול נכון של תהליך ההתלבשות - הרי אי-אפשר לנעול נעליים ורק אחר כך לגרוב גרביים - כך גם יש לפתח יכולת לניהול תהליך הפתרון. בדרך כלל, יכולת זו אינה נובעת ישירות מהתנסות בפתרון בעיות ויש להכלילה כחלק אינטגרלי מתהליך הלימוד של פתרון בעיות. אין די בכתיבת נתונים ובהצבת מטרה סופית. יש לפתח דיון, כחלק מן השיח המתמטי, אודות מסלולי הפתרון השונים, הצמתים שבהם מתאפשרת בדיקה, נקודות רפלקסיה, עידון, ליטוש ועדכון - עד להשגת המטרה הסופית. ההתמודדות עם משימות הראלי המתמטי אינה עוברת ב"דרך המלך" אלא בדרכים צדדיות המובילות למחוזות מעניינים, מתמטיים ואחרים.

**עם הידע הנחוץ, ועם ניהול נכון של הפתרון, גם מכונית עתיקה יכולה לנצח בראלי המתמטי.**

משמאל תהיה 2.  
לפיכך, מספר לוחית הרישוי הוא 234789.

### מחון למתן ציונים

- 4 - תשובה נכונה (234789), בלוויית הסבר, הנמקה ופירוט תהליך הפתרון.
- 3 - תשובה נכונה בלי הסבר מפורט, או תשובה שגויה בשל טעות חישוב בחילוק ב-3 אך בלוויית הסבר מלא.
- 2 - תשובה שגויה 134789 או 236789 בלוויית הסבר לא מפורט, או תשובה נכונה ללא כל הסבר.
- 1 - בנייה התחלתית של המספר.
- 0 - אי-הבנת הבעיה.

### תחום הידע הנדרש לביצוע המשימה

הכרת מספרים ראשוניים, סימני התחלקות ב-3, מונטוניות של סדרה.  
ארגון נתונים, עבודה עם אילוצים, הרחקה, סילוק (exclusion).

### קהל היעד

כיתות ה-10

כאמור, צוות הראלי המתמטי הבינלאומי נוהג להציע ניתוח מקדים של דרכי הפתרון. ניתוח זה, המקובל על נציגי כל המדינות, משמש בסיס מוסכם למחון להערכת התשובות. בבעיה שנדונה כאן - מספר לוחית הרישוי של המכונית העתיקה - הוצע הניתוח הבא. שימו לב: המספרים ב"מחון למתן ציונים" מציינים את מספר הנקודות שניתן להעניק לתלמידים על תשובתם.

### ניתוח המשימה

- יש לבנות סדרה עולה של ספרות באמצעות מספרים 10-ספרתיים ראשוניים.
- יש לבטל את האפשרות לשבץ את הספרות 0,2,4,5,6,8 במקומות הזוגיים.
- יש להבין שאי-אפשר לשבץ את הספרה 1 במקום השני משמאל, ולכן מן ההכרח שהמספר יהיה מן הצורה: 3\_7\_9\_.
- לאחר הכנסת הספרה 8 בין הספרה 7 לספרה 9 יישארו שני מקומות פנויים, כלומר 789\_3\_, בין 7 ל-3 אפשר לשבץ או את הספרה 5 או את הספרה 4. מאחר ש-57 אינו מספר ראשוני, המספר הראשוני הוא 47. בשלב זה, המספר הוא 34789\_.
- כדי שהמספר יתחלק ב-3, מן ההכרח שהספרה הראשונה

