לגופו של עניין

עיקרון שובך היונים

דן עמיר

כשאנחנו מדברים על הוראת המתמטיקה, מקובל להדגיש את הצד הדדוקטיבי של החשיבה המתמטית, כלומר, הסקת מסקנות צעד אחרי צעד לפי כללי ההיסק הלוגיים. אבל חשיבה דדוקטיבית היא רק ממד אחד של החשיבה המתמטית, זהו הממד האנכי, ומלבדה יש לנו ממד נוסף - הממד האופקי, שהוא ממד אינדוקטיבי - מן הפרט אל הכלל. כאן יש לנו שני תהליכים חשובים - תהליך האסוציאציה ותהליך ההכללה וההפשטה.

אנסה להדגים את שני התהליכים האלה בעזרת בדיחה ישנה.

> יעקב שואל את משה כמה ביצים הוא יכול לאכול על קיבה ריקה. כשמשה משיב "ארבע", אומר לו יעקב שטעה, כיוון שאחרי ביצה אחת קיבתו כבר אינה ריקה. יעקב חוזר הביתה ורוצה להרשים את אשתו ושואל אותה כמה ביצים היא יכולה לאכול על קיבה ריקה. היא משיבה "שלוש", ואז הוא אומר, באכזבה: "חבל, לו אמרת ארבע, אז הייתה לי חוכמה טובה".

כששאלו אדם אחר אם הוא מכיר את הבדיחה הזו, הוא אמר שהוא לא מכיר את הסיפור הזה, אבל הוא מכיר סיפור דומה עם בננות...

ההבנה שבסיפור הזה אין חשיבות עקרונית למספר הביצים - שלוש או ארבע או שבע, ולא אם זה ביצים או בננות, היא חלק חשוב מהחשיבה המתמטית. עצם מושג המספר הוא תוצאה של הכללה והפשטה - ההבנה שלגבי ספירת עצמים אין חשיבות למהות העצמים - ביצים או בננות. זה נשמע קל וברור מאליו, אבל זה ארך דורות רבים עד שהאדם הגיע למושג המופשט הזה. גם אנחנו לא תמיד מצליחים לראות שדברים שונים לכאורה הם תחפושות שונות לאותה מהות מתמטית, וזהו חלק חשוב מהחינוך המתמטי. בהוראה שלנו זה מתבטא בעיקר במה שנהוג לקרוא שאלות מילוליות. שאלות מילוליות הן חלק בלתי נפרד של ההבנה המתמטית ואסור לנו להפריד אותן מהעיסוק במספרים. כשאנו מראים לתלמידים סיטואציות שונות לכאורה, שניתן לפתור אותן על-ידי אותו עיקרון מתמטי, אנחנו משרתים מטרה כפולה: ראשית, אנחנו מסבירים להם יותר טוב את העיקרון, ושנית - אנחנו מפתחים אצלם את יכולת ההעברה של הידע מסיטואציה אחת לסיטואציה אחרת, יכולת שאינה מובנת מאליה.

אנסה להראות זאת כשאני מתחיל במשחק פשוט מאוד מבחינה מתמטית - **משחק הכיסאות המוסיקליים**. ביסודו של משחק הכיסאות המוסיקליים נמצא עיקרון מתמטי חשוב מאוד, עיקרון בסיסי של מושג המספר: אם יש פחות כיסאות מילדים, למשל אם יש 10 ילדים ורק 9 כיסאות, אז אי-אפשר להושיב את כל הילדים, אלא אם שני ילדים ישבו על אותו כיסא. לעיקרון זה כמה שמות: יש שמשתמשים בשם המאוד מכובד, **'עיקרון דיריכלה'**, על שם המתמטיקאי הצרפתי החשוב לזן דיריכלה (Lejeune Dirichlet ,1805-1859). יש שקוראים לו **'עיקרון תיבות הדואר' או 'עיקרון המגירות'** - אם הדוור מחלק 10 מכתבים בין 9 תיבות דואר או מגירות, אז באחת מהן, לפחות, יהיה יותר ממכתב אחד. שם מקובל לא פחות הוא השם שנשתמש בו, **'עיקרון שובך היונים'**: נניח שיש לי 10 יונים אבל בשובך שלי יש רק 9 תאים. אם כל היונים נכנסות לישון בשובך, אז, לפחות, בתא אחד יצטרכו להצטופף שתי יונים.

ברור שגם אם מדובר לא ביונים אלא בברווזים, העיקרון נשאר נכון. אנחנו גם מבינים איך להכליל את זה למספר אחר, נאמר 30 ילדים, ומספר קטן יותר של תאים. כך, אם בכיתה יש יותר מ-12 ילדים, אז מכיוון שבשנה יש רק 12

דן עמיר
פרופסור אמירטוס למתמטיקה ורקטור לשעבר של אוניברסיטת תל-אביב. לאחר פרישתו החל להתעניין בהוראת המתמטיקה בבתי הספר וכיום הוא יושב ראש וועדת המקצוע מטעם משרד החינוך.

חודשים, יהיו, לפחות, שניים מהילדים שיום ההולדת שלהם נופל באותו החודש, ואם יש לנו יותר מ-31 ילדים, אז מכיוון שבאף חודש אין יותר מ-31 ימים, יהיו, לפחות, שניים מהילדים שיום ההולדת שלהם נופל באותו תאריך בחודש. כאן הילדים היו היונים, והחודשים או ימי החודש היו התאים.

בעיה מאותו סוג, ואפילו פשוטה יותר, היא בעיית זוג הגרביים:

> במגירת הגרביים שלי יש גרביים משני צבעים - כחול ואדום. אני ממהר ומוציא ממנה, בחושך, מספר גרביים. כמה גרביים עלי להוציא כדי שאהיה בטוח שיש ביניהן זוג באותו צבע?

כאן יש לי שני תאים - אלו שני הצבעים, והיונים כאן הן גרביים, ולכן שלוש גרביים יבטיחו שיימצא ביניהן זוג. ברור שלו היו במגירה גרביים משלושה צבעים, הייתי עלול להידרש להוציא ארבע גרביים כדי להבטיח שייצא זוג, ואילו היו ארבעה צבעים - חמש גרביים, וכן הלאה.

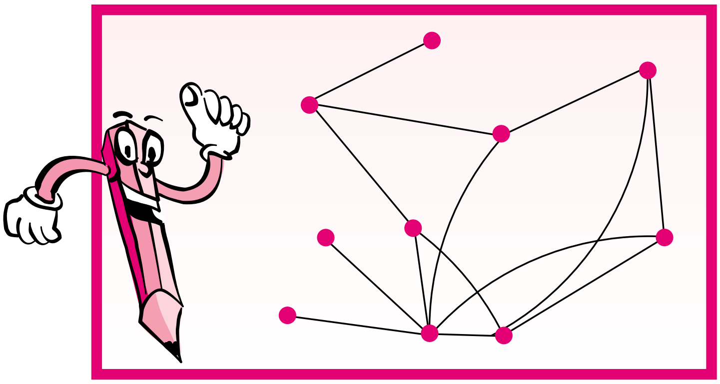
והנה דוגמה אחרת: נניח שקבוצה של 10 ילדים ניגשה למבחן שבו 8 תרגילים. אז, לפחות, שניים מהם ענו נכון על אותו מספר של תרגילים (כי מספר התרגילים הנכונים יכול להיות רק אחד מ- 9 המספרים 0, 1, 2, 3...8 ואנחנו יכולים להתייחס אל כל אחד מתשעה מספרים אלה כאל תא).

מה בדבר הבעיה הבאה:

> אני מניח שלכל ילד בכיתה יש, לפחות, חבר אחד בכיתה, אבל אולי לא כל אחד הוא חבר של כולם. עלינו להראות שאם כל שני חברים בכיתה ילחצו יד זה לזה, אז תמיד יהיו שניים מהם שילחצו אותו מספר ידיים.

לשם כך נבקש מכל ילד בכיתה להרים פתק שעליו כתוב מספר הידיים שלחץ. כמה פתקים נושאי מספרים שונים יכולים להיות?
לכל היותר מספר הילדים פחות אחד, כי איננו לוחצים יד לעצמנו. למשל, אם יש 10 ילדים בכיתה, המספרים שהם יניפו יהיו מבין המספרים 1 עד 9. כאן הילדים בכיתה הם היונים והמספרים הם התאים.
ומה אם יש ילדים בכיתה שאין להם אף חבר? לכאורה יש לנו כאן בעיה, כי אז יניפו גם את המספר 0. אבל כל ילד כזה מוריד את מספר לחיצות הידיים האפשריות - בדוגמה שלנו המקסימום האפשרי יהיה אז רק 8, ושוב יש לנו רק 9 תאים וחייבים להיות שניים שילחצו אותו מספר ידיים.

והנה אותה הגברת באדרת נוספת: **גרף מתמטי** (איור 1) מורכב מנקודות, הנקראות **'קדקודים'**, ומקווים הנקראים **'קשתות'** המחברים חלק מזוגות הנקודות שבגרף. האם בכל גרף מתמטי יהיו שני קדקודים שיוצא מהם אותו מספר של קשתות? אם נחשוב כל קדקוד כמסמן את אחד הילדים בכיתה, וכל קשת כמסמנת לחיצת ידיים בין שני קדקודים, נחזור בדיוק לבעיה הקודמת.



איור 1

יותר מאוחר, כשהתלמידים לומדים להכיר ולאמוד מספרים גדולים, אנחנו יכולים לשאול אותם גם שאלות הדורשות יותר ידע כללי, כגון:

> האם יש בישראל שני אנשים שבראשם אותו מספר שערות?

חיפוש באנציקלופדיה או באינטרנט יכול ללמד אותם שמספר השערות בראשו של אדם, אפילו השעיר ביותר, אינו עולה על 140,000. לכן אפילו רק בתל-אביב שמספר תושביה הוא כ-365 אלף, או רק בירושלים שמספר תושביה הוא כ-706 אלף, נוכל למצוא זוג אנשים "שווי שיער".

שימוש בעיקרון שובך היונים בנושאים מתמטיים שונים

המספרים הטבעיים

אנחנו יכולים ללכת מעבר למושג הספירה ולהשתמש בעיקרון שלנו גם בצירוף אריתמטיקה אלמנטרית. במיוחד שימושי עיקרון שובך היונים בחשבון מודולרי, כלומר, בהתייחסות לשארית לגבי חלוקה במספר נתון - כמו

שיקולי זוגיות (שארית בחלוקה ל-2) או ספרות אחרונות בכתיבה עשרונית (שארית בחלוקה ל- 10, 100 וכן הלאה). כך, למשל, אם יש לנו שלושה מספרים טבעיים, אז יש שניים מהם שסכומם הוא זוגי - כי שניים מן המספרים חייבים ליפול באחד מבין שני התאים: זוגי ואי-זוגי, ואז- או שיש לנו, לפחות, שני זוגיים וסכומם זוגי, או שיש לנו לפחות שני מספרים אי-זוגיים ושוב סכומם זוגי.

המצב שונה כשאנחנו רוצים לקבל שני מספרים שסכומם אי-זוגי. כעת אנחנו צריכים שיהיו לנו בשני התאים - גם מספר זוגי וגם מספר אי-זוגי. את זה נוכל להבטיח, למשל, כשניקח שישה מספרים שונים בין 1 ל-10 (כי אז לא ייתכן שכולם זוגיים או שכולם אי-זוגיים).

דוגמה אחרת: אם ניקח 11 מספרים טבעיים כלשהם, ונחלק אותם לעשרה תאים לפי הספרה האחרונה שלהם, נמצא שבשניים מהם, לפחות, תהיה אותה ספרת יחידות. מאחר וספרת היחידות מציינת את השארית בחלוקה ל- 10, נוכל לאמר שבאופן כללי: מתוך N+1 מספרים טבעיים, לשניים מהם, לפחות, תהיה אותה שארית בחלוקה ל-N. כאן N התאים יהיו N השאריות האפשריות בחלוקה ב-N(השאריות האפשריות הן: 0,1...N-1).

ועוד דוגמה:

> כמה מספרים עלינו לקחת אם אנחנו רוצים להבטיח ששניים מהם הפרשם או סכומם מתחלק ב- 10?

כאן יספיקו לנו שבעה מספרים: נסתכל בששת התאים הממוספרים 0,1,2,3,4,5 ונכניס בראשון את אלה שספרת היחידות שלהם 0, בשני - את אלה שספרת היחידות שלהם 1 או 9, בשלישי - 2 או 8, ברביעי - 3 או 7, בחמישי - 4 או 6, ובשישי - את אלה שספרת היחידות שלהם היא 5. מכיוון שיש לנו שבעה מספרים ורק שישה תאים, יימצאו שניים מהם בתא אחד. נשים לב שספרות היחידות של שני מספרים הנמצאים באותו התא או שוות זו לזו, ואז הפרש המספרים מתחלק ב- 10, או שהן משלימות ל- 10, וגם סכומם מתחלק ב- 10. (באותו אופן, מכל 52 מספרים טבעיים נוכל למצוא שניים שסכומם או הפרשם מתחלק ב- 100).

עד עכשיו דיברנו על הכנסת יונה אחת בתא אחד שבשובך. בדרך כלל, כשאנחנו חושבים על זוג יונים, אנחנו מתארים לעצמנו שברוב אהבתן הן מוכנות גם להצטמצם ולחלוק ביניהן תא אחד. אבל אם יש לנו, כמו קודם, רק 9 תאים בשובך ואילו מספר היונים שלנו הוא 19 או יותר, שוב נימצא בבעיה, כי באחד התאים יצטרכו להצטופף שלוש יונים. כך, למשל, בכל קבוצה של 21 מספרים טבעיים יהיו לפחות שלושה מספרים שיש להם אותה ספרת יחידות - כאן עשר ספרות היחידות הן התאים, והמספרים הם היונים ומספרן גדול מ- 10x2.

קל לראות שאם נושיב 7 ילדים על 12 כיסאות בשורה, לפחות שניים מהם ישבו בסמוך זה לזה.

> כמה ילדים אפשר להושיב על 12 כיסאות בשורה מבלי ששלושה ילדים ישבו בשלושה כיסאות סמוכים?

התשובה היא די ברורה באופן אינטואיטיבי: נושיב שני ילדים בכיסאות הראשונים, נשאיר כיסא ריק, נושיב עוד 2 וכו' - כלומר, אפשר להושיב כך 8 ילדים (אפילו ב-11 כיסאות). מה קורה כשיש לנו 9 ילדים?

כשאנחנו מנסים להושיב אותם באותו אופן, נראה לנו שלא נוכל להסתדר בלי ששלושה ילדים ישבו בכיסאות סמוכים - אנחנו יכולים גם לנמק את זה במאמץ קטן ולהראות שהסידור שהיצענו הוא החסכוני ביותר. אבל ישנה הוכחה קצרה בעזרת עיקרון שובך היונים: את הכיסאות נמספר והם יהיו התאים. היונים במקרה זה יהיו כדורים. לכל ילד שנושיב נכניס "כדור- יונה" לא רק בתא שמספרו כמספר הכיסא, אלא גם לתאים השכנים לו. כלומר, אנחנו שמים עבור כל ילד 3 כדורים, אלא אם הושבנו אותו באחד משני הכיסאות הקיצוניים, ואז אנחנו שמים רק 2 כדורים. כך נכניס לפחות 25 כדורים. לכן יהיה בסוף לפחות תא אחד שבו 3 כדורים, כלומר: כיסא שיושבים גם בו וגם בכסאות בשני צדדיו.

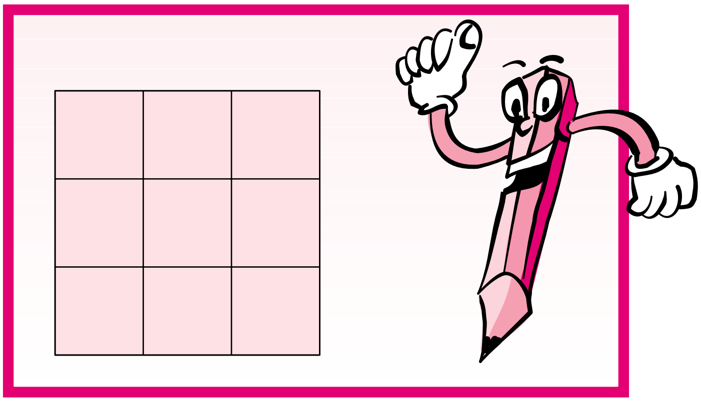
אם בבית ספר יש 30 כיתות ויש בו 1,000 תלמידים, אז, לפחות, באחת מהכיתות יהיו יותר מ- 33 תלמידים - כאן הכיתות הן התאים (n=30) והתלמידים הם היונים, ומספרם גדול מ- 30x33.

אם במדינה יש יותר משבעה מיליון תושבים, וכאמור מספר השערות בראשו של אדם, אפילו השעיר ביותר, אינו עולה על 140,000, אז יש במדינה לפחות 51 אנשים עם אותו מספר שערות בראשם.

גיאומטריה

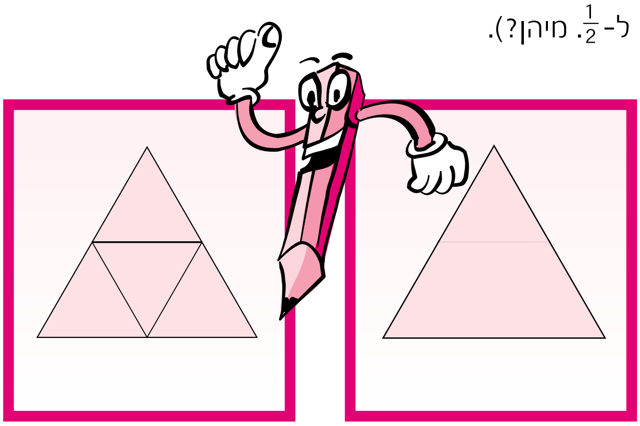
נסתכל כעת בכמה בעיות בעלות אופי גיאומטרי. יש כאלה שבהן בחירת התאים היא פשוטה מאוד: למשל, אם יש

לנו 10 נקודות בתוך ריבוע (בשטחו או בהיקפו) של 3x3 משבצות (איור 2), אז לפחות שתיים מהן נמצאות באותה משבצת.



איור 2

נסתכל מה יקרה כשנפזר 5 נקודות בתוך (בשטחו או בהיקפו) משולש שווה צלעות שצלעו 1. (איור 3) נוכל לראות שחייבות להיות, לפחות שתיים מהן שהמרחק ביניהן אינו עולה על $\frac{1}{2}$. ואכן, על-ידי שלושת קווי האמצעים אנחנו מחלקים את המשולש ל- 4 משולשים שווי צלעות שצלעם $\frac{1}{2}$ (איור 4), וכיוון ששתיים, לפחות, מ- 5 הנקודות חייבות ליפול באותו משולש חלוקה, המרחק ביניהן אינו עולה על אורך הצלע שהוא $\frac{1}{2}$. (נשים לב לכך שיש לנו במשולש 6 נקודות שהמרחק בין כל שתיים מהן **שווה** ל- $\frac{1}{2}$. מיהן?).



איור 3

איור 4

בעיות נוספות הניתנות לפתרון בעזרת "עיקרון שובך היונים"

לפניכם בעיות נוספות. הקוראים מוזמנים לנסות לפתור את הבעיות בעזרת "עיקרון שובך היונים" ולשלוח את הפתרונות למערכת. בכל הבעיות הבאות יש להראות שהנאמר בהן נכון.

1. אם אכלנו כל יום, לפחות, סוכרייה אחת ובמשך 30 יום אכלנו 45 סוכריות, אז היו מספר ימים רצופים שאכלנו בהם ביחד בדיוק 14 סוכריות.

2. אם ניקח 55 מספרים טבעיים שונים כלשהם במאה הראשונה, אז כל מספר טבעי קטן מ- 14, פרט ל-11 יהיה ניתן להצגה כהפרש של שניים מהם.

3. מכל 52 מספרים טבעיים שונים במאה הראשונה, יש שניים שסכומם שווה לשלישי.

שתי הבעיות הבאות דורשות מעט ידע בקומבינטוריקה אלמנטארית:

4. מכל שבעה מספרים טבעיים שונים עד עשר, נוכל למצוא ארבעה, כך שסכום שניים מהם שווה לסכום שני האחרים.

5. מכל עשרה מספרים טבעיים שונים עד עשרים נוכל להוציא שני זוגות שסכומם שווה.

רמזים לפתרונות

1. בכל יום ננית כדורים בשניים מתוך 45+14 תאים.
2. למשל, כדי לקבל הפרש 10, נראה ש-11 מהמספרים שלנו נופלים ב- 20 תאים. כדי לקבל הפרש 12, נראה ש-11 מהמספרים שלנו נופלים ב- 24 תאים.
3. נכניס את 51 ההפרשים מהמספר הקטן ביותר ב- 49 תאים.
4. יש יותר זוגות מאשר סכומים אפשריים.
5. יש יותר מאלף קבוצות חלקיות ופחות מאלף סכומים אפשריים.

הערות:

א. ישנם מספר פרסומים קודמים בעברית על עיקרון שובך היונים, למשל:
רון אהרוני: עיקרון שובך היונים, אתגר - גליונות מתמטיקה, גליונות 1 ו-2, 1985 (בחלק השני של המאמר מוכלל העיקרון כאשר את המידה המספרית מחליפה מידה גיאומטרית, כמו, אורך, שטח או נפח). שני מאמרים שקדמו למאמריו של רון אהרוני על 'עיקרון שובך היונים' הופיעו ב"שבבים - עלון למורה המתמטיקה": האחד בשם 'עיקרון המגירות' מאת ארתור אנגל והורסט סורון (תרגום חנה ליפסון) במס' 16 (אדר תש"ם), והשני בשם - פתרון בעיות לפי עיקרון המגירות- מאת אברהם קרמר ורוחמה אבן, במס' 18 (אדר א תשמ"א).

ב. מקורן של חלק מהדוגמאות שהבאתי הוא בכתבת האינטרנט: Trapa.p: Pigeon hole principle: http://www.ma.umist.ac.uk/avb/Pigeon.htmk