

צורה ומרחב - גאומטריה

הוראת הסימטריה באמצעות מגזרות נייר

חנה לב-זמיר

יכולת לנבא איך תיראה המגזרת, זיהוי חוקיות, הבנת עקרונות מתמטיים, יכולת לתכנן מגזרות בהתאם לעקרונות והבנות שנרכשו, והכול תוך שימוש בשפה המתמטית. מרבית המפגשים עם המושגים, נעשים בצורה אינטואיטיבית, במהלך העשייה. כמו כן גם המסקנות שמגיעים אליהן נובעות מההתנסויות, ללא הוכחות פורמליות, אם כי, ניתן עם קבוצות מתאימות, להעמיק ולהוכיח מסקנות אלה. הפעילויות מדורגות ומשלבות מעברים מפעילויות מוחשיות, הכוללות קיפולי נייר, ציור, גזירה, הדבקה, לעיסוק בשרטוט קווי השיקוף, סימון נקודות תואמות, מדידת מרחקים ביניהן, שאילת שאלות, העלאת השערות, אימות והסקת המסקנות ועוד. כל אלה מהווים חלק בלתי נפרד מההתנסות. הפעילויות מתחילות ממגזרת עם קו שיקוף אחד (בהן נקבל תמונה בעלת סימטריה שיקופית), והמשכן במגזרות בעלות מספר קווי שיקוף מקבילים (בהן נקבל תמונות של שיקוף והזזה לסירוגין), ובמגזרות בעלות קווי שיקוף נחתכים (בהן נקבל סדרת שיקופים היוצרים מגזרת ובה תמונת שיקוף וסיבוב לסירוגין). לכל פעילות מושגים מתמטיים הרלוונטיים לה.

ברוב העבודות שאנחנו מבצעים, אנו יוצרים קיפול אחד, מצירים צורה מסוימת, גוזרים ובכך מכפילים אותה, מרבית האנשים, כמרבית האמנים, יוצרים מגזרות עם קו שיקוף אחד. במגזרות בעלות קו שיקוף אחד, באים לידי ביטוי שני מצבים:

א. מצב, שבו לתמונת המקור אין נקודת שבת עם ציר השיקוף.

ב. מצב, שבו לתמונת המקור יש נקודת שבת. ברוב המקרים, כשהתמונה המבוקשת סימטרית, אנו מצירים חצי צורה (חצי כד, חצי לב, חצי חנוכיה, חצי רימון) ואז, כשנגזור, נקבל צורה שלמה.

מגזרת החלזונות (איור 1), מדגימה פעילות אפשרית על

הסימטריה מופיעה בשלוש צורות בסיסיות: שיקוף, הזזה וסיבוב. על-פי תכנית הלימודים של משרד החינוך, נלמד הנושא באופן פורמלי, בכיתות א-ד ואמורים להקצות לו 22 שעות לימוד. בשלב מאוחר יותר ייעשה שימוש בידע שנצבר לצורך זיהוי תכונות במצולעים, בגופים ובהוכחות גאומטריות.

היופי בסימטריה, מקנה תחושת איזון, שלימות ובריאות בחי, בצומח בדומם, ובני האדם יודעים לנצל תכונה זו לצורך עיצוב הסביבה, בעזרת יכולתם להבין את העקרונות המתמטיים שמאחורי היופי ועשיית שימוש נבון בהם כדי להעצימו.

בכנס השנתי האחרון של הארגון לקידום החינוך המתמטי האחרון (אפריל 2005), בחרתי להציג דרך להוראת הנושא באמצעות מגזרות נייר, תוך שאני משלבת את תחום היצירה והאמנות עם הגאומטריה (דבר המאפשר שיתוף פעולה עם המורה לאמנות וחיסכון בזמן יקר).

הפעילות במגזרת הנייר מוכרת לכל ילד עוד מהגן, זוהי פעילות מהנה, מפתיעה וכל תוצר יש בו יופי. הגורם המזמן לפעילות מסוג זה, יכול להיות כל חג. עיצוב ברכות לראש השנה, קישוטי סוכה, קישוטים לחנוכה, מסכות לפורים, מגזרות לחג השבועות ועוד.

מגזרת הנייר נמנית עם הענפים המעניינים והיפים ביותר של היצירה העממית.

במשמעות הפשוטה ביותר מגזרת, משמעה, יצירה בגזירה. יצירה זאת אינה חייבת להיות סימטרית, עם זאת, מרבית המגזרות מושתתות על עיקרון הקיפול והגזירה, המאפשרים יצירת סימטריה.

מעבר להפתעה ולהנאה מהיופי של התוצר, הדגש בפעילויות הוא על עשייה, הסתכלות, ניתוח של התוצר, הבנת קשרים,

חנה לב, זמיר

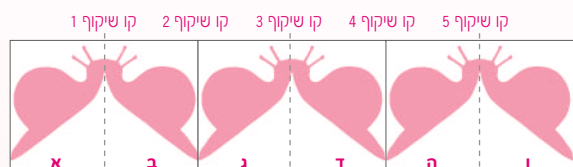
מורה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה במכללת אורנים ויועצת לסטודנטים ומורים במרכז לחינוך מתמטי באורנים.

ויש, כמובן, מקום להשערות, כמו: ומה קורה כאשר אין לתמונת המקור נקודות שבת? איזו תמונה תתקבל? פעילויות מסוג זה אפשריות כבר בכיתות א-ב.

במגזרות בהן מועתקת תמונה יותר מפעם אחת או מדברים על סדרת שיקופים: **סדרת שיקופים** בקווים מקבילים וסדרת שיקופים בקווים נחתכים. **סדרת מגזרות בקווים מקבילים**, מפגישה עם תמונת שיקוף והזזה לסירוגין, מגזרות מסוג זה, נדיר למצוא בין מגזרותיהן של אמנים. אדגים בעזרת מגזרת החלזונות פעילויות אפשריות על סדרת מגזרות בקווים מקבילים.

דוגמה לפעילות 2

אחרי שמקפלים את רצועת הנייר ואחרי שמציירים את תמונת המקור, אפשר לשאול שאלות הדורשות חשיבה על התוצר עוד לפני שגוזרים, כמו: א. האם לתמונת המקור יש נקודת שבת עם קו השיקוף? ב. איך תראה המגזרת, האם נקבל שרשרת של תמונות המקור, או אולי נקבל רצועה ובה חלונות בתבנית תמונת המקור?

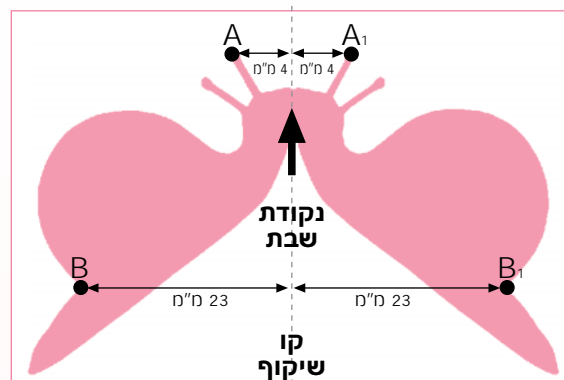


איור 2

א. כמה חלזונות במגזרת? זהו את תמונת המקור ושרטטו את כל קווי השיקוף במגזרת, כמה קווי שיקוף שרטטתם? ב. השלימו: מספר קווי השיקוף גדול/קטן ב... ממספר החלזונות במגזרת. ג. סמנו את החלזונות באותיות א, ב, ..., ד. האם חילזון א וחילזון ב מתקבלים זה מזה על-ידי שיקוף או הזזה? ה. מה בקשר לחילזון א וחילזון ג? ו. איזו תמונה נקבל אם "נעלים" את חילזון ב וחילזון ד? או אם נעלים את חילזון א וחילזון ג?

מגזרת בעלת קו שיקוף אחד (במקרה זה, עם נקודות שבת), ניתוחים דומים טוב שיעשו על המגזרות שהילדים יצרו.

דוגמה לפעילות 1

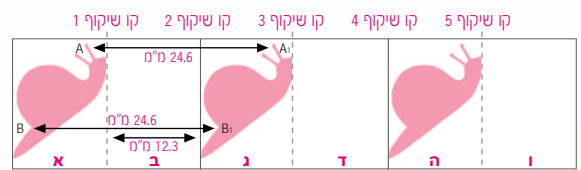


איור 1

כמה חלזונות במגזרת? האם הם פונים לאותו כיוון? א. שרטטו את קו השיקוף (קו הסימטריה) על המגזרת. ב. סמנו שתי נקודות תואמות משני צדי קו הסימטריה. ג. מתחו ביניהן קו. ד. מדדו את המרחק בין שתי הנקודות שסימנתם. ה. מדדו את המרחק משתי הנקודות אל קו השיקוף. ו. סמנו שתי נקודות תואמות אחרות. ז. חזרו על פעולות המדידה מסעיף ד ו-ה. מה ניתן ללמוד מהפעילות? איך ניתן להסביר זאת? ח. החלזונות נושקים זה לזה. סמנו בצבע נקודת השקה. מה המרחק שלה מקו השיקוף? לנקודה שנמצאת על קו השיקוף קוראים **נקודת שבת** - היא יושבת על קו השיקוף. אפשר, כמובן, לקשט את החלזונות תוך שמירה על עקרונות הסימטריה.

במהלך הפעילות מדברים בשפה מתמטית, ומשתמשים במושגים כמו: סימטריה, קו שיקוף, קו סימטריה, נקודות תואמות, נקודת שבת. מחזקים מיומנויות, כמו: קיפול, גזירה, שרטוט, מדידות אורך, קישוט תוך הקפדה על עקרונות הסימטריה. מסיקים מסקנות, כמו: בשיקוף התמונה הופכת כיוון. - לכל נקודה יש נקודה תואמת מצידו השני של קו השיקוף. - המרחק מכל נקודה לקו השיקוף, הוא בדיוק מחצית המרחק שבין שתי נקודות תואמות.

דוגמה לפעילות 3



איור 3

- סמנו שתי נקודות תואמות על זוג חלזונות (רצוי שניים סמוכים), היוצרים תמונת הזזה (חילזון א וחילזון ג או חילזון ב וחילזון ...).
- מדדו את המרחק ביניהן.
- סמנו על אותו צמד חלזונות נקודות תואמות אחרות וחזרו על משימה ב. מה גיליתם?
- מדדו את המרחק בין שני קווי שיקוף. האם יש קשר בין המרחק שבין שתי נקודות תואמות והמרחק שבין שני קווי השיקוף?
- שאלות נוספות שניתן לשאול:
 - איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי הקשר בין מספר קווי השיקוף ומספר התמונות?
 - איזו מסקנה ניתן להסיק לגבי המרחק בין כל שתי נקודות תואמות בתמונת הזזה?
 - במה שונה מסקנה זו מהמסקנה שהסקנו לגבי מרחקים בין נקודות תואמות בתמונת שיקוף למרחקים בתמונת הזזה?

מומלץ לשרטט את קווי השיקוף, לבחון את התמונות המתקבלות, לסמן באותיות א, ב, ג, ..., ולראות שרימון ב הנו תמונת שיקוף של רימון א, ואילו רימון ג הנו תמונת סיבוב של רימון א, וכך הלאה (ראו איור 4). חשוב לתת את הדעת להבדל בין תנועת הסיבוב לתנועת ההזזה שהיכרנו בסדרת השיקופים עם הקווים המקבילים (כמו באיור 3).

סימון נקודות תואמות של תמונות סמוכות, חיבור כל אחת מהן לנקודת המרכז ומדידת הזווית המתקבלת (ראו איור 4), יאפשרו הסקת מסקנה באשר לגודל הזווית בין כל שתי נקודות תואמות בתמונת שיקוף.

לפני שגוזרים, כדאי לעצור ולחשוב: כמה קווי שיקוף למגזרת? כמה תמונות נקבל? האם לתמונת המקור יש נקודות שבת? על מה עלינו להקפיד בעת ציור תמונת המקור, אם אנו מעוניינים במגזרת עם חלונות בתבנית תמונת המקור (איור 5)? או אם אנו מעוניינים בשרשרת של תמונות המקור כשהן מחוברות זו לזו (איור 6)?

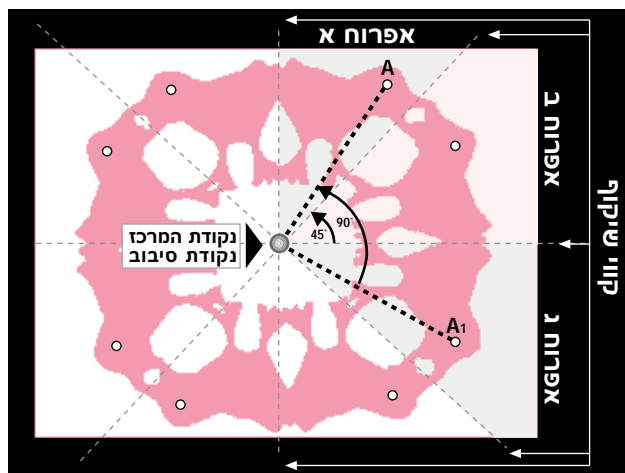


איור 6

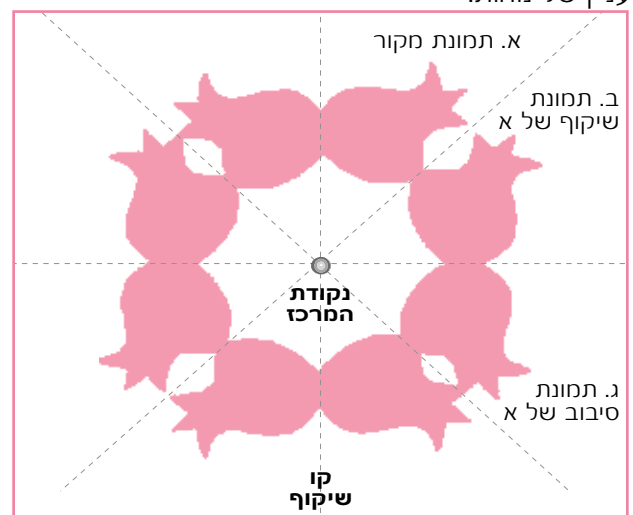


איור 5

אם נבחר לערוך ניתוח של שתי תמונות המתקבלות זו מזו בסיבוב (איור 6 א שהוא ניתוח של איור 6), נמדוד את הזווית בין שני קווי שיקוף סמוכים, נמדוד את הזווית המתקבלת בין שתי נקודות תואמות בתמונת סיבוב (לדוגמה: אפרוח א ואפרוח ג) ונקודת המרכז, נחזור על הפעילות הזו עם נקודות אחרות על אותן שתי תמונות. מה ניתן ללמוד על הקשר בין הזווית שבין קווי השיקוף והזווית שבין שתי נקודות תואמות.



איור 6א



איור 4

מגזרות פופולריות אחרות, מושתתות על עיקרון הקיפול בקווים נחתכים. במקרה זה נקבל **סדרת שיקופים בקווים נחתכים**, המפגישים אותנו עם תמונות של שיקוף וסיבוב לסירוגין. את הנייר מקפלים בדרך כלל ל- 4 חלקים או ל- 8 חלקים, עניין של נוחות.

דוגמה לפעילות 4



איור 11



איור 10

התבוננו באיור 10:

- מאיזו צורה הנדסית "יוצאים" הפרפרים במחול?
- שרטטו את קווי השיקוף במגזרת.
- מה גודל הזווית שנוצרת בנקודת החיתוך של קווי השיקוף?
- מה תוכלו לומר על כל זוג פרפרים סמוכים?
- מה תוכלו לומר על כל זוג פרפרים שאינם סמוכים?
- במגזרת רואים את הצורה הנדסית וחלונות בצורת פרפרים, מה התנאי לקבלת מגזרת כזו? נסו ליצור מגזרת דומה.

התבוננו באיור 11:

- במה דומה מגזרת הפרפרים הורודים למגזרת הפרפרים האפורים? במה הן שונות?
- מה התנאי לקבלת מגזרת כזו?
- נסו ליצור מגזרת דומה.

סיכום

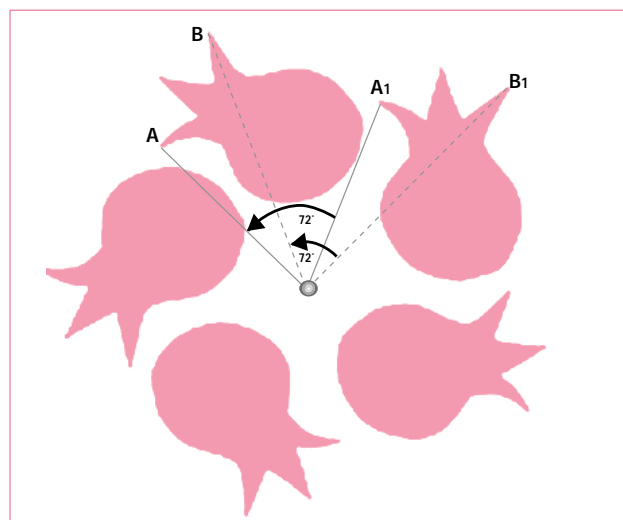
במאמר זה, הובאה הצעה ללימוד נושא הסימטריה באמצעות מגזרות נייר, בליווי מספר דוגמאות. הוראה בדרך זו מזמנת מגוון רחב ביותר של פעילויות השוזרות הנאה, חדות יצירה (של מורים ושל תלמידים), שיתוף פעולה בין מורים למתמטיקה ומורים לאמנות, חיבור נושא מתמטי לחיי היום-יום תוך טיפוח מיומנויות של גזירה, שרטוט, מדידת אורכים ומדידת זוויות, שיח ושאלות שאלות, העלאת השערות, הסקת מסקנות, מגוון רחב של אנליזות במידת ההעמקה התואמת את אוכלוסיית היעד, ושילוב יופי ואסתטיקה עם המתמטיקה.

אם לתמונת המקור לא תהיינה נקודות שבת עם קווי השיקוף משני הצדדים, נקבל את תמונת המקור בתפזורת ונוכל לסדרן בכל דרך שתיראה לנו, כפי שנהג האמן הנרי מאטיס, אשר חלק מעבודותיו הן מגזרות שאינן מבוססות על עקרונות הסימטריה (קיפולים וגזירות), אך ברבות מעבודותיו ניתן לזהות את העיצובים מאותן מגזרות, שנוצרו מתמונות מקור שאין בהן נקודות שבת, בקווים מקבילים או בקווים נחתכים.

מגזרות נייר של מאטיס ניתן למצוא באתר:

www.georgetownframeshoppe.com/henri_matisse3.html

אם ניצור מרימונים שהתקבלו ממגזרת ללא נקודות שבת, תמונות בעלות סימטריה סיבובית (איור 7), נוכל להתייחס למושגים, כמו: נקודת מרכז - נקודת סיבוב, זווית סיבוב.



איור 9

נוכל לבצע פעולות, כמו: שרטוט, מדידת זוויות. ולהגיע להכללות, כמו שמירת הכיוון (או שמירת המגמה) בתמונת סיבוב - זווית הסיבוב בין כל שתי נקודות תואמות תמיד זהה.

בהשראת האמן הנרי מאטיס, אפשר לזמן מפגש עם מגזרות שנותנות תחושה של תנועה.

[מקורות]

גרסברד, י' (1984) **מגזרות נייר, מוטיבים מסורתיים ועיטורים**. גפני, ר' (1999) שיקופים, הזזות וסיבובים - גיאומטריה בכיף. **מספר חזק מס' 2.**

Rich, C. *The Book of Paper Cutting*. New York: Sterling Publishing

Elderfield, J. (1978) *The cutouts of henri matisse*. New York: George Braziller.

Colgan, L., & Sinclair, N. Mathematics, Paper Dolls and Transformational geometry, *Mathematics in school*, January 2000