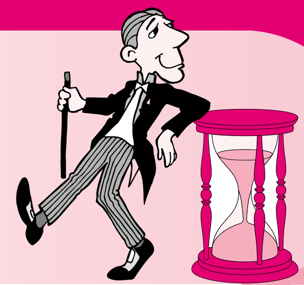

ג'ירולמו קרדנו (1576-1501)

מרגרט פרוים

"עם כל מגבלותיו קרדנו היה איש גדול, ולולא מגבלותיו - לא היו לו מתחרים" - כך כתב על ג'ירולמו קרדנו המתמטיקאי הדגול גוטפריד וילהלם לייבניץ (Ore,1953)

תולדות חיים

ג'ירולמו קרדנו (Girolamo Cardano) נולד במילנו כבנו מחוץ לנישואים של פאציו קרדנו. אביו היה מיודד עם

מרגרט פרוים

מרצה ומדריכה פדגוגית בתחום המתמטיקה לפרחי הוראה ולמורים בפועל במכללת תלפיות. לימדה מתמטיקה כ-20 שנה בבי"ס יסודי, חט"ב ותיכון, הדריכה מורים למתמטיקה בבתי ספר והעבירה השתלמויות מטעם מוסדות אקדמיים. עבדה כחוקרת במחלקה למתמטיקה שימושית במכון ויצמן למדע. מחברת חוברות לימוד בחשבון, הנדסה וסביבה מתמטית, וחברת מערכת כתב העת מספר חזק 2000.

ליאונרדו דה וינצ'י ונהג לשוחח עמו על בעיות בגיאומטריה ועל מכונות מעופפות. בספרו האוטוביוגרפי **החיים שלי**[1], כמו ברבים מספריו האחרים, חושף קרדנו פרטים רבים מחייו. הוא מספר, למשל, בפרטי פרטים על מראהו: גובהו בינוני, צווארו ארוך, זרועותיו דקיקות, רגליו קטנות וקולו חזק.

בגיל 19 החל ג'ירולמו קרדנו ללמוד רפואה. הוא היה סטודנט מבריק, אך לא אהוד במיוחד בשל היותו ביקורתי ודעתן. וכך העיד קרדנו עצמו על חסרונותיו: "...ממגרעותיי הגדולות ביותר... לומר מה שאני יודע שאינו נעים לאוזני שומעיי...אני ממשיך בכל זאת, מודע לאויבים אותם אני יוצר" (Ore,1953). מעדויות אחרים עולה שהיה "בעל לשון חריפה ומוח מתוחכם" (Frietz ,1983).

לאחר שנפטר אביו, ניצל קרדנו את כספי הירושה למשחקי הימורים, ולמעשה אף התפרנס ממשחקי קלפים וקוביות. הבנתו בתורת ההסתברות הקנתה לו יתרון על פני יריביו, ובסך הכול הוא ניצח במשחקי המזל יותר משהפסיד.

בגיל 25 השלים קרדנו את לימודיו באוניברסיטת פדואה (Padua) וקיבל דוקטורט ברפואה. עם הדיפלומה בידו, הוא ביקש להצטרף לסגל אוניברסיטת מילנו, אך הנהלת האוניברסיטה סירבה לקבלו, שכן למרות הכבוד לו זכה כסטודנט מצטיין, הוא נודע לשמצה כאדם קשה, בעל דעות קיצוניות ובלתי מתפשר. העובדה שנולד מחוץ לנישואים שימשה עילה לאוניברסיטה לדחות את מועמדותו. בנסיבות אלה מצא עצמו קרדנו עוסק ברפואה בעיירה קטנה ליד פדואה, שם בילה כשש שנים. לימים התייחס קרדנו אל אותן שנים כאל התקופה המאושרת בחייו, או כפי שהוא עצמו כתב: "הימרתי, ניגנתי, טיילתי, הייתי במצב רוח טוב ובקושי למדתי. לא פחדתי, לא כאבתי והתייחסו אליי בכבוד ואדיבות. בקיצור הייתי באביב של חיי". (Ore,1953)

קרדנו נישא בגיל 30 ונולדו לו שני בנים ובת. הכסף שהרוויח

[1] הספר האוטוביוגרפי **החיים שלי - De Propria Vita** פורסם במהדורות שונות במהלך כ- 400 שנה לאחר מותו של קרדנו.

מעבודתו כרופא לא הספיק לכלכלת המשפחה המורחבת והוא פנה שוב להימורים. הפעם, שלא כמו בשנים עברו, ההצלחה לא האירה לו פנים והוא נאלץ למשכן את תכשיטי אשתו ואף כמה רהיטים. אך המצב עוד המשיך להידרדר עד שהמשפחה עברה להתגורר בבית מחסה. לאחר פרק זמן התקבל קרדנו כמרצה למדעים בבית ספר לצעירים מעוטי יכולת במילנו. עם השיפור במצבו הכלכלי, הצליח קרדנו להרחיב את מעגל מטופליו לקבוצת בעלי הממון, ואלה חשו אסירי תודה והפכו לתומכיו הגדולים. באותה תקופה נחשב קרדנו לאחד משני הרופאים הטובים ביותר באירופה, הפך לאיש עשיר ומצליח עד מאוד. כאשר נענה לבקשתו של הארכיבישוף של סקוטלנד להתארח אצלו כדי לרפאו מאסטמה, הוא התקבל בהרבה כבוד והערכה בקהילות המדעיות שבהן ביקר בדרכו אל משימתו. היחס לו זכה היה כאל המדען החשוב ביותר של התקופה. עם שובו לאיטליה, התמנה כפרופסור לרפואה באוניברסיטת פאביה. למרות כל הצלחותיו בתחום המקצועי, המזל לא האיר לו פנים בעת הזו, וחייו האישיים היו רצופי מהלומות. בשנת 1560 בנו הבכור והאהוב הוצא להורג באשמת הרעלת אשתו הבוגדנית. לאחר מות בנו לא הצליח קרדנו להתאושש והאשים את עצמו בכך שלא מנע את האסון. כאב לרוצח הפך עתה קרדנו לאדם שנוא ונאלץ לעקור מעירו. בהתערבות חברו הוותיק והמסור, **לודוביקו פרארי,** תלמידו ועוזרו לשעבר, התמנה קרדנו לפרופסור לרפואה באוניברסיטת בולוניה. ואולם הצרות לא הרפו ממנו: גם בנו השני שעסק בהימורים לא הסב לו נחת, ובשנת 1569, כאשר היה קרדנו בן 68, הפסיד בנו את כל רכושו, עד אחרון בגדיו. בניסיון להשיג מזומנים פרץ הבן לבית אביו וגנב סכום כסף גדול ותכשיטים. קרדנו נאלץ, בצער רב, להסגירו לשלטונות. לא עברה שנה, וקרדנו עצמו נכלא באשמת כפירה בדת (הנוצרית) ונחקר על-ידי האינקוויזיציה. לאחר מספר חודשים הוא שוחרר, אך נאסר עליו להחזיק במשרה באוניברסיטה או לפרסם את עבודותיו. לאחר שחרורו עבר ג'ירולמו קרדנו לרומא, שם הצליח לזכות בחסדיו של האפיפיור, שהעניק לו קצבה לשארית חייו. ברומא, בשנת חייו האחרונה, כתב קרדנו אוטוביוגרפיה שחשפה כמעט כל פרט בחייו מלאי התהפוכות. בגילו המתקדם, כך כתב, מתכונותיו הטובות "נשארו רק מוחו החד ונפשו הלוהטת המלאה בתכניות בלתי אפשריות" (Cardano,1963). מספרים, כי קרדנו בנה לעצמו הורוסקופ שעל-פיו ניבא במדויק את יום מותו. אחרים טוענים, כי נבואתו התגשמה כיוון ששלח יד בנפשו...לאלוהים פתרונים.

פועלו המתמטי של ג'ירולמו קרדנו

על המשוואה מהמעלה השלישית

המשוואה הכללית מהמעלה השלישית היא מהצורה:

$$ax^3+bx^2+cx+d = 0$$

(כאשר a,b,c,d הם מספרים ממשיים ו- a שונה מאפס.) היוונים ידעו לפתור משוואה מהמעלה השנייה, אך פתרונה של משוואה מהמעלה השלישית לא היה ידוע להם. במאה ה-11 מצא המתמטיקאי והמשורר עומר כיאם פתרון גיאומטרי למשוואה מהמעלה השלישית. בשנת 1494, בספרו הידוע בשם **סיכום- Summa** ספר בעל השפעה גדולה על מתמטיקאים בני דורו ומעין אנציקלופדיה מתמטית - טען לוקה פצ'ולי, מבלי להוכיח, שאין פתרון למשוואה הכללית מהמעלה השלישית. קביעה זו גרמה להתעוררות קהילת המתמטיקאים ולרצון עז דווקא לנסות ולמצוא פתרון למשוואה זו.

"המאבק" - סיפור על קרדנו והמשוואה מהמעלה השלישית

המשוואה מהמעלה השלישית כיכבה כ"דמות ראשית" באירוע ססגוני ביותר שבו נטל קרדנו חלק פעיל. זה קרה במרכזים האוניברסיטאיים של איטליה במאה ה- 16.

באותה תקופה הספרים באוניברסיטאות היו מעטים, ועל כן המרצים היו מקור הידע העיקרי. שמה הטוב של אוניברסיטה היה תלוי ביכולתה להציע את המלומדים הטובים ביותר, ואחת הדרכים לקבוע מיהו המרצה הטוב ביותר הייתה תחרות פומבית שבה על כל מועמד היה לענות על בעיות שהציב מתחרהו. מומחיות שאינה ניתנת לערעור בנושא מסוים הייתה מביאה על-פי-רוב לניצחון בתחרות, וניצחון כזה היה מקנה לבעל הידע תהילה גדולה וגם יתרונות מעשיים, כגון, משרה באוניברסיטה המלווה במשכורת נכבדה. התחרות נחשבה לאירוע חגיגי שהתנהל בפני שופטים ובנוכחותם של אנשי סגל האוניברסיטה ומכובדים בעלי השפעה בעיר. המתחרים הופיעו מלווים בתומכיהם ובתלמידיהם, והימורים בסכומים גדולים על המנצח היו אף הם חלק מהאירוע. כיוון שכך, אם מועמד רצה לזכות, היה עליו לגייס לעזרתו כל תכסיס אפשרי. התחרות שהיא נושא סיפורנו התרחשה ב- 1535. כעשרים שנה קודם לכן, בשנת 1515 לערך, גילה **שיפיונה דל פרו**, מתמטיקאי ופרופסור באוניברסיטת בולוניה, שיטה לפתרון המשוואה הכללית מהמעלה השלישית החסרה

את האיבר הכולל את x^2 , שצורתה היא:

$$x^3 + c x = d$$

(כאשר c ו- d הם מספרים שלמים וחיוביים).
דל פרו שמר על גילויו בסוד ולא פרסמו. אבל בשנת 1526, קצת לפני מותו, גילה דל פרו את סודו לשני אנשים: לחתנו, אשר ירש את משרתו באוניברסיטה, ול**אנטוניו מריה פיור** מוונציה, תלמידו הלא מוכשר במיוחד, והשביע אותם לשמור על סודו.

תשע שנים מאוחר יותר, בשנת 1535, זמם אנטוניו פיור להגיע אל התהילה באמצעות הגילוי השייך למורהו. בטוח לחלוטין בניצחונו, הזמין אנטוניו פיור את **ניקולו טרטליה**, מורה למתמטיקה בעיר וונציה וידוע כבעל ידע רחב, **לדו-קרב מתמטי: "טרטליה נגד פיור"**. "כלי הנשק" בדו-קרב היו 30 בעיות במתמטיקה שכל מתמודד הציג ליריבו. על היריב היה לפתור אותן בפרק זמן שנקבע מראש. חשוב לציין, שעוד לפני התחרות הייתה כבר ברשותו של טרטליה שיטה לפתרון משוואות מהסוג:

$$x^3 + cx^2 = d$$

טרטליה הציג לפיור בעיות מכל הסוגים, ואילו פיור הציג לטרטליה רק בעיות הקשורות בפתרון משוואות מן המעלה השלישית מהצורה $x^3 + cx = d$. משוואות שאת סוד פתרונן למד ממורהו שיפיונה. טרטליה, המתמטיקאי הטוב מבין השניים, החל לעבוד במרץ על פתרון 30 הבעיות שקיבל ממתחרהו, ובלילה שבין ה- 12 ל- 13 בפברואר 1535, הצליח לגלות את השיטה של שיפיונה (קרי: השיטה לפתרון משוואות מן המעלה השלישית החסרה את האיבר מהמעלה השנייה), ובכך פתר את כל הבעיות שהציג לו פיור.

אנטוניו פיור לא הצליח לפתור ולו משוואה אחת מאלו שהציג לו טרטליה. הדו-קרב המתמטי הסתיים, אפוא, בניצחון מזהיר לטרטליה.

ג'ירולמו קרדנו, שהיה אז פרופסור באוניברסיטת מילנו התעניין מאוד בשיטתו של טרטליה לפתרון משוואות מן המעלה השלישית, ובשנת 1539 הזמין את טרטליה, שהיה עני וחסר אמצעים לביתו. קרדנו הבטיח לו להציגו בפני פטרונו, אדם רב השפעה במילנו. טרטליה שחשב שבכך נסללה בפניו הדרך לקבל משרה מכובדת, שוכנע לגלות לקרדנו מארחו, שנשבע לשמור על הסוד, את סוד פתרון המשוואה. את הפתרון מסר טרטליה ללא הוכחה, בצורת שיר הכתוב בחרוזים.

לא חלף זמן רב וקרדנו, יחד עם עוזרו המחונן והמסור **לודוביקו פרארי**[2], הצליח **לפתור את כל סוגי המשוואות מהמעלה השלישית.**

ארבע שנים מאוחר יותר, בשנת 1543, בעת ביקורם בבולוניה פגשו קרדנו ופרארי את חתנו של שיפיונה דל פרו, שלימים היה פרופסור למתמטיקה באוניברסיטת בולוניה. החתן הראה להם "פנקס קטן ובו מוצג הפתרון שבמחלוקת בצורה למדנית וברורה, בכתב ידו של חותנו שיפיונה זמן רב קודם לכן". (Witmer 1968). בדרך זו נודע לקרדנו, ובאמצעותו לעולם כולו, שלמעשה שיפיונה דל פרו, המתמטיקאי מבולוניה, היה הראשון שמצא את הפתרון הכללי של המשוואה מהצורה $x^3 + c x = d$, שנים רבות לפני טרטליה.

עכשיו, משנודעה האמת, חשב קרדנו לעצמו שאין עוד טעם בקיום שבועתו לטרטליה, והחליט לפרסם את שיטת הפתרון, מה גם שטרטליה עצמו לא טרח מעולם על פרסום גילויו.

בשנת 1545 פירסם ג'ירולמו קרדנו את ספרו **"האמנות הגדולה"** ובו הציג את הפתרון לכל סוגי המשוואות מהמעלה השלישית, כולל הפתרון שגילה לו טרטליה. בספרו מספר קרדנו על השתלשלות העניינים ונותן קרדיט הן לחברו טרטליה והן לעוזרו ושותפו, המתמטיקאי פרארי על גילוייהם. וכך הוא כותב:

"טרטליה, נתן לי אותו (את הפתרון) בתשובה לבקשות שלי, אך ללא הוכחות. רדפתי אחר הוכחות של הסוגים השונים. זה היה קשה מאוד" (Bidwell & Lange, 1971).
טרטליה מחה על הפרסום ואף ניהל מסע השמצות נגד קרדנו. קרדנו בחר להתעלם, אך פרארי, החליט לשלוח לטרטליה הזמנה לתחרות מתמטית, וגם דאג להפיץ את ההזמנה בין הלמדנים ידועי השם של התקופה ובין בעלי ההשפעה בקהילת המדענים. טרטליה נענה להזמנה, אלא שהפעם לא צלחה דרכו.

"הטרגדיה של טרטליה היא", כתב אור "שיצא חוצץ דווקא נגד היריבים היחידים בעולמו אשר ידעו יותר ממנו" (Ore,1953).

על ספריו של ג'ירולמו קרדנו

בגיל 38 פרסם קרדנו "ספר קטן וקל לעיכול" שבו הוא מסביר את "השימוש במספרים". בתחילת הספר הוא פונה

[2] המתמטיקאי לודוביקו פרארי גילה שיטה לפתרון משוואה ממעלה רביעית.

אל הקורא בזו הלשון: "אם תקרא (ספר זה) תאמר: אני חב לו (לספר האחד) כמו לאלף ספרים" (Ore,1953).
פרסום הספר היה אות לתחילתה של עשייה מבורכת ומלאת השראה: הקרירה הספרותית- מדעית הפורה של קרדנו הכוללת מעל 200 עבודות, שמתוכן פורסמו 131. הנושאים שבהם התעניין קרדנו הם מגוונים: רפואה, מתמטיקה, פיזיקה, דת, פילוסופיה, מוזיקה וחינוך ילדים וגם פירוש חלומות. קרדנו החשיב עצמו בראש ובראשונה כרופא, והעיסוק במתמטיקה שימש עבורו סוג של תענוג ובילוי. חברו, המתמטיקאי פרארי כתב עליו פעם כך: "לא רק במקצועו, רפואה, הוא בקי ביותר, אלא גם במתמטיקה, שבה הוא משתמש לעתים רק כדי להתבדר ולהשתחרר" (Frietz,1983).

הספר האמנות הגדולה

בשנת 1545 פרסם קרדנו את ספרו **האמנות הגדולה** שנועדה לו חשיבות רבה בהתפתחות המתמטיקה. כדי לנסות ולהבין את הקשיים בהם נתקלו קרדנו ומתמטיקאים אחרים בני דורו, כאשר ניסו לכתוב על פתרון בעייה מתמטית, עלינו לזכור כי לא יכלו להשתמש בסימנים המודרניים כיוון שהמתמטיקה בתקופה זו הייתה עדיין מילולית בלבד. כלומר, פתרון בעיה נכתב ללא קיצורים וסימנים, אלא בצורת ביטוי מילולי שגור, כמעט כמו סיפור. גילם של חלק גדול מהסימנים שמשתמשים בהם בימינו, סימני החיבור, חיסור, סוגריים, סימן השורש ועוד, הוא צעיר מ- 450 שנה.

א. נושאי הספר

בספר זה הציג קרדנו לראשונה שיטה לפתרון משוואה מהמעלה השלישית (הוא מנה 13 סוגים של משוואות כאלה), כולל הוכחה גיאומטרית לפתרון.
בספר הוצגה גם שיטתו של תלמידו ועוזרו, המתמטיקאי פרארי, לפתרון משוואה ממעלה רביעית (קרדנו מנה 20 סוגים של משוואות כאלה), כאשר הרעיון לפתרון רוב המשוואות האלו הוא השלמה לריבוע. לנוסחה להתרת משוואה מהמעלה השלישית הייתה משמעות תיאורטית שבאה לידי ביטוי בעידוד התפתחות המחקר האלגברי בכיוונים שונים. (כיום ידוע לנו שאין נוסחה אלגברית לפתרון משוואה כללית ממעלה הגדולה מ- 4).
על תרומתו של קרדנו להתפתחות המחקר המבוסס על הכללות כותב אונגרו: "עבודתו של קרדנו הביאה בעקבותיה גם עניין רב בכלליות ובהכללה כעיקרון חשוב בעבודתם של מתמטיקאים. ההתעניינות הגוברת הזאת בכלליות ובהכללה תהווה ציון דרך חדש שיאפיין את המחקר המתמטי" (אונגרו, 1989).

ב. על הנוסחה לפתרון משוואה מהמעלה השלישית

נבחן כעת מקרוב את הנוסחה לפתרון משוואה מהמעלה השלישית. כזכור, טרטליה העניק את הנוסחה לקרדנו בצורת שיר ולאחר מכן רשם אותה קרדנו בספרו האמנות הגדולה.
נציג את השיר בתרגום חופשי מאנגלית, ולצד כל שורה את הביטוי האלגברי המתאים לה.

1. כאשר החזקה השלישית והדברים הם ביחד שליד (cx) מספר מסוים (d)	$x^3 + cx = d$
2. מצא שני (מספרים) אחרים אשר הפרשם הוא (המספר) האחרון (d).	$u-v=d$
3. מעשה זה יהיה כלל / מכפלתם תמיד שווה / לחזקה השלישית של שליש מספר הדברים, (c המקדם של x).	$u \cdot v= \left(\frac{c}{3}\right)^3$
4. ולבסוף התוצאה הכללית / הפרש השורשים מסדר שלישי / ייתן את הדבר (x) החשוב."	$x= \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

ג. דוגמה לפתרון משוואה מהמעלה השלישית

ננסה לפתור את משוואה על-פי האלגוריתם המבוסס על ה"מרשם" של קרדנו וטרטליה, שתואר לעיל.

$$x^3 + 6x = 2$$

למשוואה יש שלושה שורשים. נציג דרך למציאת אחד מהשורשים:

$$U - V = 2$$

$$U \cdot V = \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$$

נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} U - V = 2 \\ U \cdot V = 8 \end{cases}$$

נפתור את המשוואה:

$$U^2 - 2U - 8 = 0$$

$$U_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

נקבל:

$$\begin{cases} U_1 = 4 \\ V_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_2 = -2 \\ V_2 = -4 \end{cases}$$

נציב את הפתרון הראשון של מערכת המשוואות בנוסחת הפתרון למשוואה מהמעלה השלישית של קרדנו-טרטליה המוזכרת לעיל ונקבל: $X_1 = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$

שורש זה הוא שורש ממשי של המשוואה מהמעלה השלישית.

אם נציב את הפתרון השני ($U_2 = -2, V_2 = -4$) בנוסחת הפתרון למשוואה ממעלה השלישית של קרדנו/טרטליה, נקבל את אותו הערך שקיבלנו עבור X_1 גם עבור X_2. לכן, $X_1 = X_2$ שהוא אחד משורשי המשוואה. כדי לקבל את שני השורשים האחרים משתמשים בחישובים אלגבריים מסובכים שלא נוכל להציגם במסגרת זו.

ד.התחכום ללא תועלת של המתמטיקה

בספרו האמנות הגדולה חקר קרדנו משוואה דומה לזו המוצגת להלן: $x^3 + 3x = 40$

יחד עם זאת, קרדנו נמנע מלטפל במשוואות בעלות מקדם שלילי, כמו: $x^3 - 3x = 40$

ובמקומן תיאר קרדנו שיטה המתאימה לפתרון משוואות, כדוגמת: $x^3 = 3x + 40$

היום אנו יודעים ששתי המשוואות הן משוואות שקולות. אולם הרתיעה שהייתה לקרדנו ולמתמטיקאים בני זמנו ממספרים שליליים, הביאה את קרדנו לטפל בשתי המשוואות בנפרד. למרות חששו, חשוב לומר שהיה זה קרדנו אשר העז לבצע את הצעד הראשון, המהסס משהו, אך בכיוון הנכון, **לקראת מציאת מספרים שאינם ממשיים**. בפרק 37 של ספרו האמנות הגדולה מציג קרדנו את הבעיה הבאה:

"יש למצוא שני מספרים שסכומם הוא 10 ומכפלתם 40".

ננסה לפתור את הבעיה. אם מספר אחד הוא x, המספר השני הוא (10-x) ולכן כדי לפתור את הבעיה יש לפתור את המשוואה הריבועית: $x(10-x) = 40$.

כאשר ניסה קרדנו לפתור את המשוואה הריבועית הזו, הוא הבחין בדבר מה שנראה לו מוזר: לא קיימים שני מספרים ממשיים שסכומם הוא 10 ומכפלתם היא 40. קרדנו הציג את הפתרונות הבאים למשוואה:

$$X_1 = 5 + \sqrt{-15}$$

$$X_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

(הערה: נוכל לקבל את הפתרונות האלה כאשר נפתור את המשוואה הריבועית בעזרת הנוסחה המוכרת היום). המספרים האלו הם שהפתיעו את קרדנו, שהרי הריבוע של כל מספר ממשי (חיובי או שלילי) הוא חיובי. קרדנו נהג במספרים "המוזרים המסתוריים" הללו כמספרים הכפופים לאותם הכללים שאליהם כפופים המספרים המוכרים לו. "ברור שהדבר בלתי-אפשרי" הוא כתב. בהמשך, רצה קרדנו לבדוק אם שני הפתרונות שקיבל מקיימים את תנאי הבעיה, כלומר, סכומם הוא 10 ומכפלתם היא 40.

קל לראות שסכום המספרים הוא אכן 10.

קרדנו כותב: "נשאיר בצד את **העינויים** הנפשיים ונפתור (נכפיל) בצורה הזו": (Bidwell & Lange, 1971) (כלומר, נכפיל את הביטויים על-פי הכלל הידוע :

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15)$$

"ונקבל את התוצאה - 40".

ואולם אף-על-פי שמצא כי המספרים מקיימים את תנאי הבעיה, היה קרדנו רחוק מלהיות מאושר מפתרונות המשוואה. "התחכום של המתמטיקה משתכלל עד כדי כך שבסופו של דבר אין לכך כל שימוש", הוא כותב (Crossley,1988).

אף-על-פי שקרדנו לא הבין את החישוב שלו עצמו, ניתן לומר שהוא היה הראשון שהתייחס **למספרים המרוכבים.** דרך ארוכה עבר נושא המספרים המרוכבים עד אשר הגיע לספרי הלימוד במתמטיקה של תלמידי כיתות יא של ימינו: החל מ"המספרים המוזרים" של קרדנו ועבור דרך המספרים ה"בלתי אפשריים" של ניוטון. ניתן לומר שהמספרים המרוכבים נשארו אזרחים סוג ב של מדינת המספרים עד אמצע המאה ה- 18.

היום, כ- 500 שנה לאחר תקופתו של קרדנו, אנו יכולים לגשת להוראת **המספרים המרוכבים** בדרך המוצגת במסגרת שלהלן.

המספרים המרוכבים

נתבונן במשוואה הריבועית נוספת: $X^2 = -1$.
למשוואה ריבועית זו אין פתרון שהוא מספר חיובי או שלילי, כי הריבוע של כל מספר ממשי (חיובי או שלילי) הוא חיובי. אם נחליט להמציא מספר חדש לגמרי, מספר שלא היכרנו עד כה, אשר ריבועו הוא (1-) אזי נוכל למצוא פתרון למשוואה זו.
נכנה ב-**i** את השורש של **1-** ונגדיר אותו כך :
i הוא ערך כלשהו כך שריבועו שווה ל: 1-.
נבחין כי, גם הריבוע של **i-** הוא 1-.
על-ידי הכפלת המספר **i** במספר ממשי, נוכל לקבל קבוצה שלמה של מספרים חדשים.
נוכל לומר, שכל מספר שצורתו **bi**, כך ש- b מספר ממשי, ו- **i** מקיים את התכונה הבאה:
$i^2 = -1$ הוא **מספר מדומה**. נוסף על כך, המספר שצורתו: **a+bi** , כאשר a ו-b מספרים ממשיים, נקרא מספר **מרוכב**. בעקבות זאת נוכל לכתוב את פתרונות המשוואה שהוצגה כך:

$$x^2 = -1$$

$$x_1 = i \quad x_2 = -i$$

את פתרונה של משוואת קרדנו נוכל לרשום כך:

$$5 - i\sqrt{15} \quad , \quad 5 + i\sqrt{15}$$

ספר הסיכויים

ספר נוסף שכתב קרדנו הוא ספר הסיכויים, Liber de Ludo Aleae אשר פורסם רק בשנת 1663, עשרות שנים לאחר מותו. הספר עוסק בצורה מעמיקה בנושא הסיכויים במשחקי מזל. מטרת הספר לא התמצתה בפיענוח בעיות מסוימות, אלא בניסיון שיטתי ליישם עקרונות כלליים לכללי המשחקים. בתוך כך הספר מציג את **"חוק החזקה":** אם p היא ההסתברות לאירוע, ההסתברות שהאירוע יחזור n פעמים היא p^n.
בספר מופיעים גם פתרונות לבעיות העוסקות במשחקי קובייה וקלפים. לספר הייתה השפעה מועטה ביותר על התפתחות תאוריית ההסתברות. הסיבה לכך נעוצה בפרסומו המאוחר של הספר, עשרות שנים לאחר מותו של קרדנו, וחשוב מכך- לאחר שכבר פותחה תאוריית ההסתברות על-ידי המתמטיקאים פייר דה פרמה ובלייז פסקל במהלך ההתכתבות ביניהם, בקיץ 1654. בהתכתבות זו, אשר כללה חמישה מכתבים, הציב פסקל את היסודות לתורה זו. מועד חליפת המכתבים נחשב בעיני המתמטיקאים כתאריך הולדתה של תורת ההסתברות. למרות כל זאת, טען אור (Ore, 1953) בספרו **"קרדנו, המלומד המהמר"**, שיש להתייחס לקרדנו כמו אל פרמה ופסקל, כלומר, כאל אחד מאבות תורת ההסתברות.

סוף דבר

אם בוחנים את קרדנו ביחס לתקופתו, הרי שלפנינו אדם מיוחד שביטא כושר חשיבה יוצא דופן בכל התחומים אשר בהם התעניין. **"ספרו של קרדנו האמנות הגדולה"**, כותב אור "היה מהותי למתמטיקה בדיוק באותה מידה שספרו של קופרניקוס על מערכת הכוכבים (שהופיע באותה עת) היה חשוב לאסטרונומיה".
לאט ובאופן בלתי נמנע הניעה עבודתו של קרדנו את תהליך הולדתה של האלגברה המודרנית. ניתן לומר ש"השורשים" הדמיוניים אשר "נטע" בעולם החקר היצירתי הפכו במתמטיקה המודרנית של ימינו לשורשים "ממשיים" באמת.

"אדם אין לו דבר מלבד שכלו. אם זה (שכלו) אינו תקין, הכול אינו כשורה, ואם השכל תקין, הכול כשורה"
(Cardano, 1963)

מקורות נבחרים

אונגרו, ש. (1989) **מבוא לתולדו המתמטיקה**, חלק ב. תל-אביב: משרד הביטחון
Bidwell,J.,& Lange,B.(1971).Girolamo Cardano, A Defence of His Character. *The Mathematics Teacher,64*
Cardano,G.(1963).*The Book of My Life*. New York: Dover pub.
Crossly, J.N. (1988). *The Emergence of Number*. Singapore: World Scientific.
Feldman, R.(1961).The Cardano-Tartaglia Dispute. *The Mathematics Teacher,54*.
Frietz, M. (1983). *Girolamo Cardano, Physician, Natural Philosopher, Mathematician, Astrologer, and Interpreter of Dreams*. Boston: Birkhauser. New York: Doevr pub
Ore, O.(1953). *Cardano, The Gambling Scohlar.*
Tanner,R.C.H. (1980). The Alien Realm of The Minus: Deviatory Mathematics in Cardano's Writings. *Annals of Science 37* (2),159-178.
Waerden van der, B.L.(1985).*A History of Algebra*. Germany:Springer-Verlag.

תודה למורה למתמטיקה, לאה מנגלוס מחולון, שקראה את המאמר והעירה הערות מועילות ביותר.