צורת ההתנהגות של ערך השבר ככלי להבנת מושגים במתמטיקה

משה סטופל ושלמה חריר

הקדמה

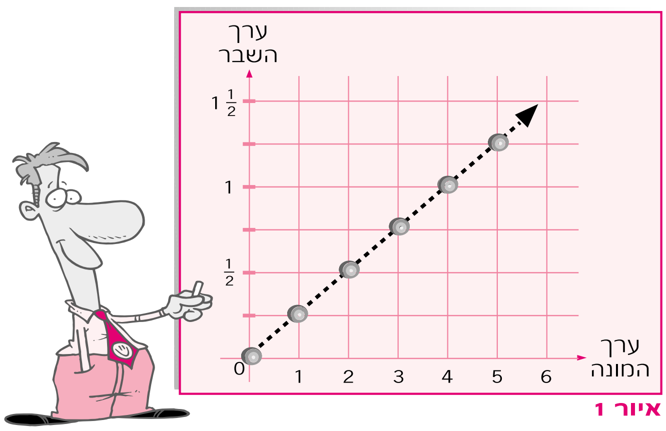
נושא השברים, מהווה נקודת תורפה, הן במהלך לימודי החשבון בחינוך היסודי והן בלימודי המתמטיקה בחינוך העל-יסודי. הצגה גרפית, המתארת את צורת ההתנהגות של ערך השבר כתוצאה משינויים במונה ובמכנה, עשויה לתרום להבנת המושג של יחס, ותלותו בערכי המונה והמכנה, וכן להוות בסיס למושג הגבול של ערך ביטוי. בנוסף לכך, ניתן להשתמש בהתנהגות של ערך השבר להסברת המושגים עלייה וירידה, במקביל, או לאחר לימוד הנושא של יחס ישר ויחס הפוך.

שינויים במונה

בדרך כלל, ידוע שערכו של שבר גדל עם הגדלת המונה, כאשר ערכו של המכנה נשמר קבוע.

כדוגמה ניקח את השברים הבאים: $\frac{0}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ שבהם המכנה קבוע והמונה גדל בפסיעות של 1. במקרה זה, מידת הגידול בערכו של השבר, בין הגדלה להגדלה היא קבועה בעלת ערך $\frac{1}{4}$.

בהתאם לכך, התיאור הגרפי (איור 1) מראה על עלייה לינארית (לאורך קו ישר). מגמת העלייה רצופה ונמשכת עם הגדלת ערכו של המונה.

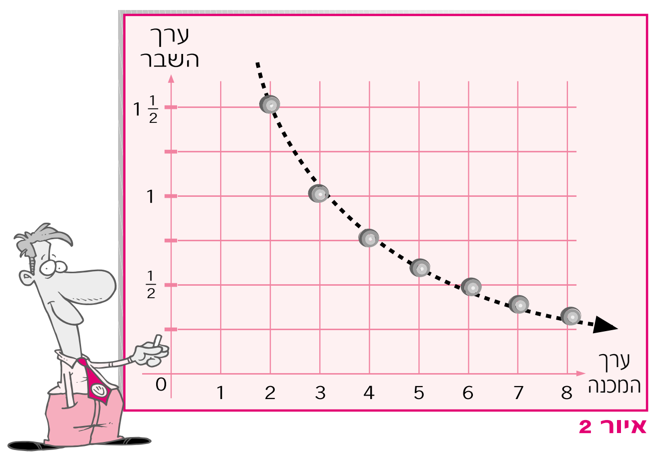


איור 1

שינויים במכנה

במקרה שהמונה נותר קבוע, אך המכנה גדל, ידוע שערכו של השבר קטן, כי, למשל, כאשר מחלקים סכום כסף נתון לקבוצת תלמידים, הרי שהתלמיד הבודד יקבל פחות כסף ככל שמספר התלמידים בקבוצה יגדל. כדוגמה ניקח את השברים הבאים: $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$ שערכיהם במספרים עשרוניים מעוגלים הם:

0.38,0.43,0.50,0.60,0.75,1.00,1.50 במקרה זה, בניגוד למקרה הקודם (סעיף א- שינויים במונה), מידת הירידה של השבר בין הגדלה להגדלה של המכנה אינה קבועה ומידת הירידה פוחתת ככל שמגדילים את המכנה, כפי שניתן לראות בתיאור הגרפי (איור 2).



איור 2

דר' משה סטופל
פיסיקאי ומתמטיקאי בעל תואר שלישי בהנדסת חומרים מהטכניון. ראש החוג למתמטיקה במכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" בקריית שמואל, חיפה. בעבר מנהל בית-ספר תיכון דתי לבנות.

דר' שלמה חריר
מהנדס תעשיה וניהול. בוגר תארים ראשון ושני מהטכניון ותואר שלישי במתמטיקה והוראת המדעים. ראש המכללה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" בקריית שמואל, חיפה ויועץ פרויקטים הנדסיים בתחומים שונים. בעבר מנהל בית-ספר תיכון מקיף.

לאן ישאף השבר עם הגדלת ערכי המספרים שבמכנה למספרים גדולים מאוד? התשובה - כמובן לאפס. מספיק להראות שעם הגדלת המכנה ל- 3000 ירד ערך השבר, בירידה מתונה מאוד לערך של אלפית. לדעתנו, יש מקום לשלב את המושגים **הערך הגבולי ואינסוף**, בשלבים מוקדמים של הלמידה. לימוד המושגים הללו, בשלב מוקדם של הלימודים, יקל מאוד על הטמעתם במהלך לימודי המתמטיקה בתיכון.

ראוי להדגיש שהגדלת ערך המונה כאשר המכנה קבוע מביאה למגמת עלייה בערכו של השבר והגדלת ערך המכנה כאשר המונה קבוע מביאה למגמת ירידה בערכו של השבר.

שינויים במונה ובמכנה

במקרה זה, מדובר על שינויים בו-זמניים הן בערך המונה והן בערך המכנה. האפשרויות הכלולות במקרה זה הן: הגדלה בשניהם, הפחתה בשניהם, הגדלה באחד מהם והפחתה בשני או להיפך.

להצגת הנושא נביא משימה דומה לזו שהופיעה באחד מספרי המתמטיקה:

"רווק זקן בן 50 התחתן עם צעירונת בת 19. בני כמה יהיו הבעל והאישה כאשר יחס הגילים ביניהם יהיה 2?"

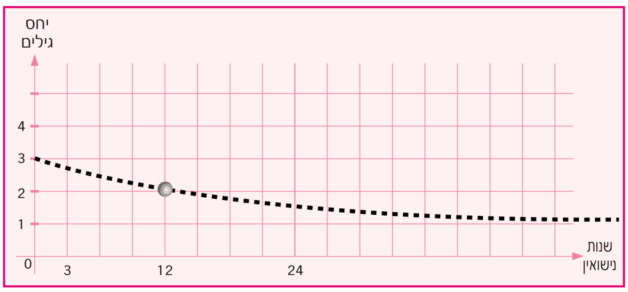
כל אחד יודע שבחלוף כל שנת נישואין גדל הגיל של כל אחד מהם בשנה, ובשיטה של ניסוי וטעייה, תוך שימוש במחשבון, ניתן להגיע לתשובה. התהליך מתואר בטבלה 1.

יחס הגילאים	שנות הנישואין	גיל האשה	גיל הבעל
2.632	יום הנישואין	19	50
2.550	1	20	51
2.476	2	21	52
2.409	3	22	53
⋮	⋮	⋮	⋮
2.069	10	29	60
2.033	11	30	61
2.000	12	31	62

טבלה 1

מהתבוננות בטבלה רואים שיחס הגילים בין הבעל לאישה יורד באופן רציף מערך של 2.632 ביום החתונה ליחס של 2, כעבור שתיים עשרה שנות נישואין, כשגיליהם 62 ו-31. בתום שנת הנישואין הראשונה פחת היחס בכ- 8 מאיות. לעומת זאת, בשנת הנישואין ה- 12 פחת היחס בכ- 3 מאיות. יחס גיליהם ממשיך לרדת באופן מתון גם בהמשך חייהם המשותפים. כשהבעל יגיע לגיל 100 יהיה יחס הגילים 1.449. בגיל המרבי 120 שנה, ירד יחס הגילים ל- 1.3348. בהנחה שהרפואה המודרנית תוביל למאות שנות חיים, הרי, כאשר יהיה הבעל בן 500 שנה יהיה יחס הגילים 1.066, ובגיל 1000 שנה יהיה היחס 1.032.

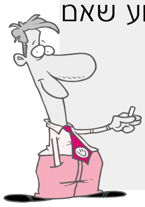
עד לאיזה ערך ירד יחס הגילים במקרה התיאורטי שהנישואין ימשכו לעד? ההתנהגות של יחס הגילים כתלות בשנות הנישואין מתוארת בגרף. קיימת ירידה רצופה של היחס ואחרי שנות נישואין רבות מאוד הוא מתקרב (שואף) לערך 1, כפי שניתן לראות בתיאור הגרפי (איור 3).



איור 3

הגדלת המונה והקטנת המכנה

באחד מספרי החידות והשעשועים במתמטיקה הופיעה השאלה הבאה:



"שני חברים עמי ודני החזיקו בידיהם שקיות עם אגוזים. סך כל מספר האגוזים של שניהם היה בין 20 ל- 27 (לא כולל). לעמי יש יותר אגוזים מאשר לדני, אך ידוע שאם הוא יעביר לדני 2 אגוזים ישתווה מספר האגוזים של שניהם. כמה אגוזים צריך להעביר עמי לדני, כדי שלדני יהיה פי 2 אגוזים מלחברו?".

מהנתון שעל-ידי העברת 2 אגוזים מעמי לדני ישתווה מספר האגוזים שלהם, לומדים שלעמי היו בהתחלה 4 אגוזים יותר מאשר לדני.

מהנתון שהמספר הכולל של האגוזים היה בין 20 ל-27 (לא כולל), הרי שקיימות האפשרויות הבאות למספר האגוזים שהיו בידיהם בהתחלה: 22, 24, 26, (טבלה 2).

נשאלת השאלה: **מדוע הכמות הראשונית של האגוזים אינה יכולה להיות: 21, 23, 25?**

סה"כ אגוזים	מספר האגוזים של דני	מספר האגוזים של עמי
22	9	13
24	10	14
26	11	15

טבלה 2

בשלב ראשון בודקים את האפשרויות שלעמי ולדני היו בהתחלה 13 ו- 9 אגוזים בהתאמה.
לצורך הבדיקה נבנה טבלה. שבה ישובץ היחס בין מספר האגוזים של דני לבין מספר האגוזים של עמי, לאחר העברת כל אגוז (טבלה 3).

היחס בין מספר האגוזים	מספר האגוזים של דני	מספר האגוזים של עמי	
$\frac{9}{13}=0.692$	9	13	בהתחלה
$\frac{10}{12}=0.833$	10	12	לאחר העברת אגוז 1
$\frac{11}{11}=1.000$	11	11	לאחר העברת 2 אגוזים
$\frac{12}{10}=1.200$	12	10	לאחר העברת 3 אגוזים
$\frac{13}{9}=1.444$	13	9	לאחר העברת 4 אגוזים
$\frac{14}{18}=1.750$	14	8	לאחר העברת 5 אגוזים
$\frac{15}{7}=2.143$	15	7	לאחר העברת 6 אגוזים

טבלה 3

ברור שעם הגדלת המונה והקטנת המכנה (העברת אגוזים) היחס בין מספרי האגוזים גדל. לפי הנתונים ההתחלתיים שבדקנו, באף אחת מהעברות היחס לא יהיה 2 ולכן אפשרות זו נפסלת.

מבין האפשרויות האחרות, רק האפשרות שלעמי היו 14 אגוזים ולדני היו 10 אגוזים, מראה לאחר בדיקה, שלאחר העברת 6 אגוזים מעמי לדני יהיה לדני פי 2 אגוזים ממה שנותר לעמי.

הפתרון התקבל על-ידי ניסוי וטעייה. מי ששולט בטכניקה אלגברית יכול להגיע לפתרון פשוט יותר, המאפשר קבלת תשובה עבור כל תחום של מספר אגוזים.

מסמנים: x - מספר האגוזים של דני בהתחלה.
x+4 - מספר האגוזים של עמי בהתחלה.
y - מספר האגוזים, שיש להעביר מעמי לדני כך שלדני יהיו פי 2 אגוזים מאשר לדני.

מכאן המשוואה: $\frac{x+y}{x+4-y}=2 \blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright x=3y-8$

מהקשר האחרון ניתן לקבל טבלה של ערכים המתאימה לכל תחום של מספר האגוזים (טבלה 4).
ערכי האיברים בסדרה החשבונית: ...1,4 ,7,10,13,16 הם מספרי האגוזים האפשריים שיהיו לדני.
ערכי האיברים בסדרה החשבונית: ... 6 ,12 ,18 ,24 ,30 ,36 הם מספרי האגוזים האפשריים שיהיו לשני החברים.

סה"כ האגוזים	x+4	x	y
6	5	1	3
12	8	4	4
18	11	7	5
24	14	10	6
30	17	13	7
36	20	16	8
⋮	⋮	⋮	⋮

טבלה 4

דוגמאות נוספות

ניתן בעזרתן לבדוק את צורת ההתנהגות של ערך השבר (ללא הצגת הפתרון)

דוגמה 1

סבא שלמה הוא סבא צעיר הן בגילו והן ברוחו הצעירה. יש לו 5 ילדים נשואים ו- 4 נכדים. לקראת חג האורים הכין סבא שלמה 100 שקל, על-מנת לחלקם באופן שווה כדמי חנוכה לנכדיו. השמחה במשפחה הייתה גדולה ולפי בקשת סבתא בתיה הסכים סבא שלמה להגדיל, מאותה עת, את סכום הכסף המיועד לדמי חנוכה ב- 50 שקל עבור כל נכד נוסף או נין שיוולד במשפחה.

א.כמה דמי חנוכה קיבל כל אחד מארבעת נכדיו בחג הראשון?
ב. לפני חג האורים הבא נולד נכד נוסף. כמה יקבלו כעת כל אחד מנכדיו כדמי חנוכה?
ג. אם a מסמן את מספר הנכדים או הנינים, שנוספו להם מעבר לארבעת הנכדים הראשונים, יש לבנות תבנית מספר שתביע את סכום הכסף שיקבל כל אחד מהנכדים או הנינים.
ד. כמה צאצאים צריכים להתווסף למשפחה (מעבר לארבעת הראשונים) כך שכל נכד או נין יקבל 40 שקל כדמי חנוכה?
ה. כמה צאצאים צריכים להתווסף למשפחה (מעבר לארבעת הראשונים) כך שכל נכד או נין יקבל 45 שקל כדמי חנוכה?
ו. למשפחתם של סבא שלמה וסבתא בתיה נוספו הרבה מאוד נכדים והרבה נינים. איזה סכום מרבי לדמי חנוכה צפוי להם?
ז. איזה נתון מספרי אינו מופיע בסעיפים א-ו?

הערה: סעיפים א ו- ב הם הקדמה לסעיפים ד ו- ה ומיועדים למיקוד ההבנה כי כל נכד או נין הנוסף למשפחה גורם לכך שכל אחד מהם מקבל דמי חנוכה גבוהים יותר. ציור הגרף המתאר את השתנות ערך תבנית המספר של סעיף ג תקל על ההבנה ותמחיש את המגמה.

דוגמה 2

רוכב אופניים התחיל את מסעו במהירות של 320 מטר לדקה. לאחר 10 דקות של נסיעה במהירות זו, הוא נאלץ, בשל כושר גופני ירוד, להוריד את מהירותו ל- 200 מטר לדקה. במהירות זו הוא ממשיך לרכב עוד מספר שעות.
א. איזו דרך עבר ב- 20 דקות הרכיבה הראשונות?
ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת ב- 20 דקות הרכיבה הראשונות?
ג. מה הייתה מהירותו הממוצעת לאחר 100 דקות של רכיבה?
ד. למה תשאף מהירותו הממוצעת לאורך כל הדרך, במידה ויתמיד לרכב ללא הפסקה במהירותו הנמוכה?

ולאלו שרוצים להעמיק

נתונות תבניות ההצבה הבאות:

א. $y = \frac{2x+3}{x+1}$ ג. $y = \frac{2x-1}{x+3}$

ב. $y = \frac{5x+7}{2x+1}$ ד. $y = \frac{3x-2}{x+2}$

הציבו בכל אחת מהתבניות במשתנה ערכים שונים שהולכים וגדלים, ומצאו לאיזה ערך שואף כל שבר.

התבניות שהוצגו הן מהסוג, $\frac{ax+b}{cx+d}$ כאשר המקדמים b, a d, c הם מספרים קבועים בכל תבנית ו- x מסמן את מספר ההצבה, בעל מעריך 1 (x^1) הן במונה והן במכנה. במונה עבור ערכים גדולים מאוד של מספר ההצבה, הערך של b זניח לעומת הערך של ax. אותו הדבר לגבי d הזניח בהשוואה ל- cx. כלומר, עבור ערכים גדולים של מספר ההצבה, תבנית ההצבה מקבלת את הצורה $\frac{ax}{cx}$. לאחר צמצום ב- x (בהנחה ש-$x\neq0$) סמתקבל שהערך הגבולי הוא $\frac{a}{c}$.
התנהגות של עלייה מתקבלת כאשר ערך התבנית עבור x=1 קטן מהערך הגבולי. התנהגות של ירידה מתקבלת כאשר ערך התבנית עבורx=1 גדול מהערך הגבולי. למסקנות הללו, ניתן להגיע באופן עצמאי, לאחר התמודדות עם הכנת תיאור גרפי של כ- 10 תבניות מהסוג שהוצג.

סיכום

הצפייה בהתנהגות ערך השבר כתוצאה משינויים בגודל המונה או המכנה או בשניהם, מאפשרת להבין את תרומתם של מרכיבי השבר לערכו. הבנה זו, מסייעת להתמודד עם משימות בהן מופיעים שברים או יחס וכן משמשת כאסטרטגיה לפתרון בעיות מילוליות.
במקביל ניתן לנצל את התיאור הגרפי להטמעת מושגים: עלייה וירידה, ערך גבולי, אינסוף.

מקורות

Hart, K.M. (1984). *Ratio: Children's Strategies and Errors.* Windsor: Berkshire: Nfer-Nelson.
Lamon, S.J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding.* Mahwah, New Jersey: Lawrnce Erlbaum Associatiates.
Kalman, D. (1985). Up Fractions! N Divided by M!. *Arithmetic Teacher*, *32*,(8), 42-43.