

מתמטיקה בארץ ובעולם

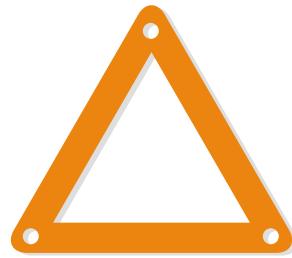


האתנומתמטיקה: זיו פניה של המתמטיקה הבוקע ועולה מתרבויות תבל שונות

עדה קצף

התכנים המתייחסים לאתנומתמטיקה ייעודם לעזור לתלמידים ולמורים לגלות את היחסים בין שלושת קדוקדי המשולש: **מתמטיקה, העולם הריאלי, וחיי בני תרבותם של התלמידים.**

העולם הריאלי



מתמטיקה **חיי בני תרבותם של התלמידים**

ראיית הדברים מנקודת מבט זו להבהרת מושגים מתמטיים ולמציאת דרך להתחבר לבעיות מתמטיות, תוביל להכרה במתמטיקה כרב-גונית, ומכאן ולהבא תסייע לגזור יותר מאינטרפרטציה אחת, בהצגתם ובפירושם של המושגים והבעיות המתמטיות. האינטרפרטציה הראשונה תתבסס על הגדרה פורמלית, שניתנה למושג על-ידי המתמטיקאי והיא אבסולוטית, מבחינת תפיסתה לגבי הלומדים בכל ארצות תבל.

האינטרפרטציה השנייה תנבע מהרחבת עולם המושגים המתמטיים על-ידי הוספת ההיבט הפורמלי אל ההיבט הלוקלי. לא זו בלבד, אלא שאינטרפרטציה זו תושפע מפירושים תרבותיים, תקופתיים (זמן בהיסטוריה) ואחרים, אשר מעשירים את המושג וממלאים אותו במשמעות, המאפשרת ללומד למצוא בו אינטרס אישי ואפילו רגשי. יש לציין כי אינטרפרטציה זו תאפשר הסתכלות על המושגים המתמטיים כמטען רוחני השייך למסורת והרגלים של חברה מסוימת, והיא פותחת חלון לעולם מתמטי בעל אופן ביטוי תרבותי. עולם שבו לצידם של הדיוק הפורמלי והלוגיקה, הבאים מעולם התבונה, עומדות הפעילות האנושית היצירתית והמסורת הבאים מעולם האמוציה (קצף, 2004). זוהי דרך

האם בימינו, בתחילת המאה ה-21, המאה המאופיינת בתהפוכות והתחזקות תופעת הגלובליזציה, אנו טורחים להזכיר לסובבים אותנו שיש לנו תרבות משלנו, מסורת משלנו ומתמטיקה משלנו? אכן אין זו מעידה לשונית, ניתן בהחלט לדבר על המתמטיקה במונחים של 'שלנו'. שיח חינוכי על מקום המתמטיקה בתרבות העם, יכול לעורר אמוציות, שהחינוך המתמטי חסר אותן בדרך כלל, ובה בעת, הוא יכול לסייע ללומדים לרכוש כבוד והערכה לבני עמם ודתם, שתרומתם למתמטיקה התבטאה ברתימת הידע המתמטי, אם וכשהיתעורר הצורך, למילוי מצוות בהתאם לדיני ההלכה והמסורת ולקיום חברה תקינה.

אודות האתנומתמטיקה

המתמטיקאי הברזילאי דה אמברוסיו (D' Ambrosio, 1985) שהגה, לפני 20 שנה, תחום מתמטי חדש 'אתנומתמטיקה' (Ethnomathematics) נתן לגיטימיות לשיח מתמטי בהקשר תרבותי-חברתי. דה אמברוסיו התייחס לשני חלקי המילה אתנומתמטיקה:

האתנו (ethno) בהיבט החברתי-תרבותי, ככזה המכיל בתוכו שפה, לקסיקון מילים, נורמות התנהגותיות וסמלים של קבוצה מסוימת, והמתמטיקה- (mathematics) בהיבט המתמטי, לדעת, להבין, להסביר ולבצע פעולות כמו הצפנה, מדידה, מיון, סידור, הסקת מסקנה והדגמה. ניתן להעמיק את פירושו המונח ethno שהוגדר על-ידי דה-אמברוסיו ולהגדירו כך:

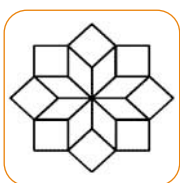
- (א) האתנו תלוי בתרבות הקבוצה;
- (ב) מושפע מתהליך ההתפתחות ההיסטורית של הקבוצה;
- (ג) מתבסס על הניסיון המתמטי שנצבר על-ידי הקבוצה.

ד"ר עדה קצף

מרצה למתמטיקה ולחינוך המתמטי במכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי בבאר-שבע. תחומי ההתעניינות והמחקר שלה הם החינוך המתמטי ההומניסטי, האתנומתמטיקה וההיסטוריה של המתמטיקה ושילובם בהוראת המתמטיקה הבית-ספרית.

באלי (Bali) נקבע המושג "שבועות" (weeks) הדומה לזה שנקבע בתרבות המערבית. לוח זה מכיל את חלוקת הימים והשבועות לאורך השנה ומותאם למאורעות החברתיים של החברה הבאליאנית.

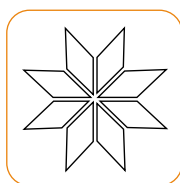
באשר למושגים המתמטיים מעולם הגיאומטריה, האתנומתמטיקאים מתמקדים בארכיטקטורה של מבנים, ובעיצובים, המופיעים באריגת שטיחים, רקמה, סריגה וקישוטים, בהם התבניות הגיאומטריות הן פונקציה של התרבות המקומית הייחודית לקבוצה זו או אחרת. גירס מדגים ומנתח את הניואנסים הקלים העושים את ההבדל בין תרבות אחת לאחרת, כאשר הם מעצבים את אותה צורה מתמטית על-גבי האריגים, השטיחים וקישוטים אחרים. כך למשל, ממחיש גירס (Gerdes, 2002) כיצד בעזרת סגנון בו מצויר כוכב מתומן נוכל להבדיל בין אריג שעוצב בתורכיה לאריג שעוצב בנורווגיה או בהודו. להלן תשע דוגמאות לתבנית של הכוכב המתומן המסורתי כפי שהוא מעוצב בארצות שונות:



מצריים



מצריים



נורווגיה



טורקיה



רדז'סטן, הודו המערבית



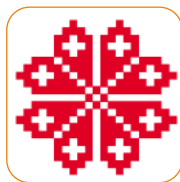
קפרי, הודו



תוניסיה



תוניסיה



הואסטקו, אינדיאנים במקסיקו

למאגר הפעולות הבסיסיות במתמטיקה הפרקטית, שנקבע על-ידי דה אמברוסיו (D' Ambrosio, 1985), הוסיף בישופ בספרו "תירבות מתמטי" (Mathematical Enculturation): את הפרספקטיבה התרבותית בחינוך המתמטי (Bishop, 1988), פעולות המתבססות על עיצוב, איתור, ביאור, ושחזור. אם נחבר את הפעולות עליהן הצביעו שני

חדשה - לימוד המתמטיקה בפרספקטיבה תרבותית, מחד גיסא, ולימוד המתמטיקה בפרספקטיבה אינטרדיסציפלינרית, כאשר ההתחברות עם התחומים האחרים הולכת ומסתעפת, מאידך גיסא.

גדולתה של האתנומתמטיקה, לדבריה של אשר (Ascher, 2002) היא יכולתה להימצא "בכל מקום" (Elsewhere) ולקשר בין הניסיון האנושי, הנובע מצורכי קיום הפרט וצורכי החברה אליה משתייך הפרט, לבין המתמטיקה. האדם, מאז ומעולם, ניסה להבין את העולם הסובב אותו דרך יצירת תבניות גיאומטריות או באמצעות פתרון בעיות מעשיות.

האתנומתמטיקאים, המבקשים לחקור את המתמטיקה בהקשר התרבותי, מתמקדים בעיקר בשני נושאים: **"עולם המספרים" ו"גיאומטריה"**. ספרות ענפה התפרסמה בתחום האתנומתמטיקה, וראוי לציין את שמותיהם של זסלבסקי (Zaslavsky), אשר (Ascher), בישופ (Bishop) וגירס (Gerdes), על תרומתם הרבה לתחום. ספריהם לוקחים את הקורא למסע מרתק החושף בפניו את יופיה של המתמטיקה הנמצאת בארצות המתפתחות. המושגים המתמטיים, שהועלו לדיון על-ידי החוקרים בנושא "עולם המספרים" הם: מנייה, שיטות ספירה, סימון מספרים, והבאה לידי שימוש מעשי של מושגים אלה בחיי היום-יום של התרבויות השונות. כאמור, מדובר בחברות המוגדרות כמתפתחות, והן עדיין משמרות את הדרך הייחודית לחישוב המתמטי. ספרה של זסלבסקי "מנייה באפריקה: מספר ותבנית בתרבות אפריקאנית" (Zaslavsky, 1973), היה הסנונית הראשונה בחשיפה של המתמטיקה הנמצאת בתרבות האפריקאנית לעולם כולו. זסלבסקי כותבת בספרה על אודות החשיבה המתמטית בתהליך המנייה באפריקה, ומתארת דרכים להבעת המנייה, הן בשימוש בשפה מילולית והן בתנועות ידיים. היא מסבירה שהנחיצות להמצאת שיטת מנייה ושיטת ספירה נבעה מהצורך לבצע חישובי זמן, מרחק, משקל, ומהרצון לסייע ביצירת קצבים מוסיקליים, שירה, אומנות, משחקים ועוד.

בספר "מתמטיקה בכל מקום", שכתבה אשר (Ascher, 2002) היא מוקירה את נכונותם של העמים המתגוררים באסיה ואפריקה להתייחס בכבוד ראש לחישובי לוח השנה. היא מספרת שעל עריכת הלוח היו מופקדים כוהנים, הבקיאים בדתם, שידעו לחשב בדיוק רב, על-פי מסלולי השמש והירח את זמני הפולחן הדתי. כך, בלוח השנה של

המורים העריכו במידה רבה את התועלת שיש בשילוב נושאים מתחום האתנומטמטיקה בהוראת המתמטיקה. ברשימת מאפייני התועלת שנוסחה על-ידי המשתתפים הופיעו, בין היתר, המאפיינים הבאים:

א. שינוי גישה כלפי המתמטיקה בעקבות הזיקה בין המתמטיקה לעם ולשורשיו.

ב. הוקרה כלפי הקהילות שידעו להשתמש במתמטיקה מבלי להכיר את המושגים המתמטיים.

ג. יצירת אינטראקציה בין-תחומית.

אחד הגילויים אליהם התוודעו המורים היה, שהמתמטיקה הפרקטית פועלת כיום בשכבות חברתיות בישראל, המזוהות עם שמירה על המסורת והדת. להלן יינתן הסבר לגבי שניים מבין הנושאים שחוברו במהלך הקורס הנ"ל.



החוקרים, נקבל מגוון יישומי רחב המאפשר להסביר את התהליכים המאפיינים את המתמטיקה הפרקטית במלאכה המסורתית, בה באות לידי ביטוי באופן שכיח למדי בעיות מעשיות והדרכים לפתרונן. **מדובר בידע מתמטי, שהפך ברבות הימים ל"תורה שבעל פה המועברת מהורים לצאצאיהם, מאב לבנו ומאם לבתה" אף שממרומי המתמטיקה המודרנית, אנו עשויים להכתירו כידע "פרימיטיבי."** (Katsap, 2004)

שילוב האתנומטמטיקה בשיעורי מתמטיקה

מחקר, שנערך בקורס "תולדות המתמטיקה" במכללת קיי, בחן, בין היתר, מהי התכלית שניתן להפיק מהידע הפדגוגי והתוכני בתחום האתנומטמטיקה שנרכש על-ידי המורה בקורס. סטודנטים מורים, משני מגזרים, יהודים ובדווים, חקרו, אספו חומרים, הכינו מערכי שיעורים ולימדו בכיתת המכללה שבעה נושאים, שנכללו בשני פרקים המזוהים עם תחום האתנומטמטיקה: "תבניות גיאומטריות" ו"חישובי זמן".

פרק חישובי זמן הופיעו הנושאים הבאים:

א. שמונה מי יודע? בחגי ישראל

ב. מתמטיקה בלוח השנה העברי

ג. מתמטיקה בלוח השנה ההיגרי.

פרק תבניות גיאומטריות הופיעו הנושאים הבאים:

א. כיפה, מעגל ומה שביניהם

ב. סימטרייה ברקמת השמלה הבדווית

ג. זיהוי טרנספורמציה בשטיחים הבדווים

ד. גילוי המתמטיקה בסמלי היהדות.

בחיפוש אחר החומר המזוהה עם תכנים של האתנומטמטיקה פנו המשתתפים למקורות מידע באינטרנט וספרי מקורות, כגון: התנ"ך, התלמוד וספרי פרשנות נוספים, אצל היהודים, והקוראן אצל הבדווים. מקור נוסף ששימש את המורים היה עבודות יד או יצירות מכוּנה, כגון: סריגה, אריגה, רקמה ויצירות אחרות בהן משולבות תבניות גיאומטריות בעלות אופי תרבותי, מסורתי. כמו כן נבחנה ספרות בה מופיעים תיאורים של פעילויות המבוססות על מנייה, חישוב, מדידה, סידור ומיון הנדרשות לעריכת לוח השנה, לקביעת תאריכים בהם חלו החגים הדתיים ולספירת ימי החגים. מקורות משמעותיים, עליהם לא פסחה אף קבוצה בחיפוש החומר היו דמויות, אתם נמנו: בעלי סמכות או מומחיות בתחום המדובר; אישיות דתית; והנפוצות ביותר, בני משפחה (אימא, אבא או זקני המשפחה).

קבוצת מורים בדווים, שהציגה את נושא הרקמה הבדווית, פתחה את דבריה ואת הצגת הנושא במבוא, בו נחשפו משתתפי השיעור למידע לגבי האישה הבדווית ואופן לבושה. בהמשך הוצגו בהרחבה המאפיינים המיוחדים של הרקמה הבדווית המבדילים אותה מרקמות אתניות אחרות, והתנהל דיון סביב המסקנות של טל לגבי הסימטריה המופיעה ברקמות השמלה. לאחר מכן חולקו משימות למשתתפים. ביניהן, בניית דוגמה חדשה, בהסתמך על הידע המתמטי שנרכש בחקירת הרקמה שחולקה לקבוצה. בפעילות זו היה צורך לזהות את סוגי הסימטריה ברקמה ולבנות דוגמה חדשה בעלת סימטריה זהה. בנוסף, הוצגו גם משימות התנסות במתמטיקה מעשית כגון: סריגת קטע רקמה על-פי הוראות ומתן הסבר מתמטי לחישובים ולבניית הצירופים של התבניות הגיאומטריות, הנדרשים לביצוע הרקמה. בדיון שנערך בתום שלב ביצוע המשימות הביעו המשתתפים הסכמה כללית כי שילוב נושא 'הרקמה הבדווית' בהוראת הגיאומטריה בבית הספר הבדווי יכול לסייע למורים לעודד מוטיבציה ורצון ללימודי הגיאומטריה, ומאידך, להעביר מסר לתלמידים שהמתמטיקה התיאורטית והמעשית אינה כה רחוקה מהעולם הריאלי שלהם, מהבית והסביבה הקרובה.

כיפה, מעגל ומה שביניהם

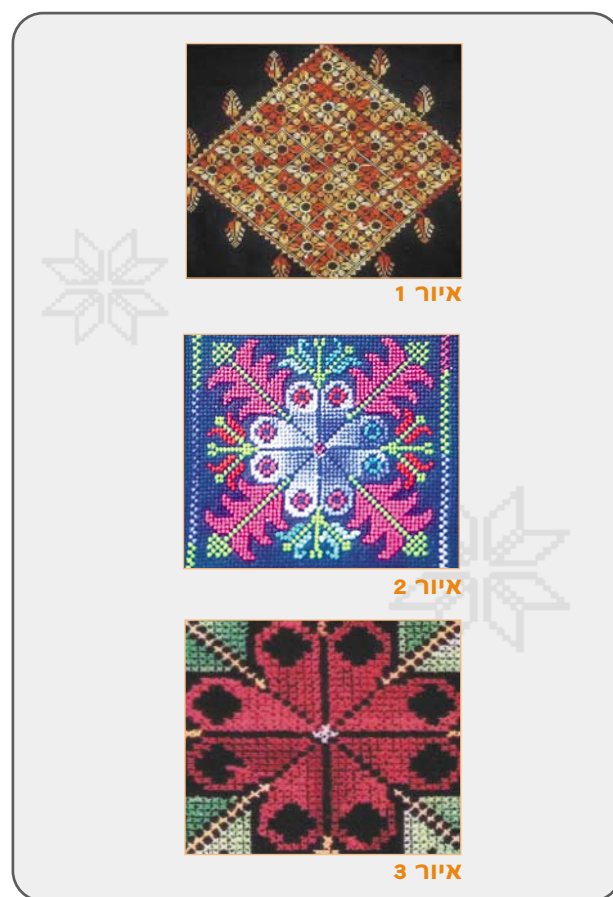
ניתן לעקוב מעל דפי ההיסטוריה של העם היהודי, אחר התפתחותה של המתמטיקה המעשית, ששירתה בנאמנות את צורכי החברה. עובדה זו מתועדת בפירוט רב בספרי התלמוד, אשר פירשו בדייקנות, תוך השגחה על כל פרט, כיצד לערוך חישובים מתמטיים, כל זאת על מנת שהבאים לקיים מצוות יעמדו בדרישות הביצוע, הלכה למעשה. מדובר במאגר עשיר הן לחקירה המתמטית, והן, לפיענוח תהליכים בהתפתחות תרבות העם.

הגברים היהודים חובשים כיפה על ראשם מימי משה רבנו. והחל מהמאה השש-עשרה לספירה, הפך המנהג לחובה, כאשר רבי יוסף קארו (1575-1488) מטולדו שבספרד, הורה לכל הגברים היהודים שלא להופיע בציבור ללא כיסוי ראש (Raskin, 1990). בתחילת המאה השמונה-עשרה, בחלק מהקהילות היהודיות באירופה הופיע סוג מיוחד של כיסוי ראש, אותו כינו בשם "ירמילקה" (Yarmulke), שפירושו בשפה האידיש "יראה מלכה", או בשם המקובל בישראל - "כיפה", שפירושו, כובע המכסה את הגולגולת, והוא כדורי כמו כיפת הגג. הכיפה מופיעה בצבעים שונים, עשויה מחומרים שונים (בד, עור וסריג),



- א. סימטריה של חצי ורבע, בה כל חצי או רבע סימטרי לחצי או לרבע השני, ולעיתים יש גם חלוקה לשמיניות.
- ב. סימטריה של חזרה רציפה על דוגמה בסיסית - בדרך כלל הפוכה.
- ג. סימטריה של יהלום, בה המעוינים חוזרים על עצמם מהמרכז.
- ד. סימטריה בצבע - הנובעת מחזרה על סדר צבעים.

לעיל הוזכר כוכב מתומן, כפי שגירדס (2002) מצא אותו מעוצב באופנים שונים בארצות השונות. גם ברקמה הבדווית ניתן לראות כוכב מתומן. באיורים 1-3 מוצגות דוגמאות לרקמה הבדווית, וניתן לראות שבאיורים 2-3 החלקים הפנימיים (כחול באיור 2 ואדום באיור 3) הם וריאציה של כוכב מתומן.





איור 4

המשימות, שהוטלו בהמשך על משתתפי השיעור, כונו בשמות המזוהים עם התכנים המתמטיים: "סימטריה", "חתכים מעגליים בגופים הנדסיים" ו"היקף המעגל". הדוגמה הבאה מתארת התמודדות עם פעילות בה התבקשו המבצעים לתת הסבר מתמטי לדרך סריגת הכיפה, ולענות על השאלה:



כיצד יש לחשב את מספר השורות אותן יש לסרוג בכיפה מסוימת?

הקבוצה שקיבלה פעילות זו מצאה דרך מקורית להסבר. להלן תשובתם: ראשית, מדדו את היקף ראשו של אחד ממשתתפי הקבוצה, במקום בו הוא רצה שהכיפה תסתיים. בהמשך, על-פי מידת היקף הראש והנוסחה להיקף המעגל חישוב את רדיוס הכיפה (כיפה נסרגת בצורה שטוחה בדומה לעיגול, ובשלב מסוים מצמצמים "עיניים" כדי ליצור את הקמירות של הכיפה). לאחר מכן סרגו מספר שורות על מנת לחשב את כמות השורות הממלאת 1 ס"מ אורך. ולבסוף חישוב את מספר השורות אותן יש לסרוג על מנת לקבל כיפה בהתאם להזמנת חובש הכיפה. הפעילויות השונות הדגימו למורים המשתתפים בשיעור כיצד ניתן לשלב את האתגור המתמטיקה בהוראת נושא המעגל. הדיון הרחיק לכת אף למהות נוסחת היקף המעגל ($2\pi r$) ונוסחת שטח העיגול (πr^2). זאת ועוד, הובאו פרטים נוספים לגבי

מקושטת עיטורים ולעיתים אינה מעוטרת כלל. שני מרכיבים משותפים לכל הכיפות הם: צורתה היא צורה תלת-ממדית, ושוליה, הקו התוחם את הראש, בצורת מעגל. גודל הכיפה מאפשר לזהות את חובש הכיפה כשייך לקהילה דתית מסוימת: כיפה סרוגה של שומרי מסורת שונה מזו של דתיים אורתודוקסיים, ומזו של יהודי בוכרה. לאחרונים לא רק הגודל אלא גם הדגם בעל ייחוד משלו ומזכיר את הכיפות בתרבות האסלאם. בישראל לחבישת כיפה יש משמעות חברתית, הגברים החובשים כיפה מזוהים כאנשים דתיים. באיור 4 כיפות שונות, הן בצורתן והן בעיטורים המופיעים עליהן.

בדברי הפתיחה של קבוצת מורים יהודים, שבחרו בנושא הכיפה, נסקרה ההיסטוריה של כיסוי הראש במסורת היהודית, ותוארה דרך חישוב האזור בו רשאי האדם לנוע ללא כיסוי ראש. המציגים הסבירו, שאזור זה הוא בן ארבע אמות. השימוש במושג 'אמה' הוביל לדיון כיצד להפעיל את התלמידים בלימוד הנושא 'מידות', כאשר המטרה הייתה הקניית ידע בהשוואת המידות המופיעות במקורות היהדות עם המידות הנהוגות בשיטה המטרית, שהיא השיטה למדידה המקובלת כיום בישראל. נזכיר, שמידת אורך של 'אמה' היא כ- 48-65 ס"מ (המרחק שבין המרפק לבין קצות האצבעות של אדם מבוגר), והיא משמשת כיום כמידת אורך לענייני הלכה. למשל, מידתו של תחום שבת היא אלפיים אמה.

דה אמברוסיו (D' Ambrosio, 2001), שחקר את היסודות ההיסטוריים והמעשיים של המתמטיקה, אשר לדעתו נוצרה בתרבות מסוימת כצורך קיומי והתפתחותי של החברה המקומית, טוען שלא ניתן להפריד בין תהליכי ההתפתחות של אותה חברה להתפתחותה של המתמטיקה. דבר זה מעלה את הדרישה לגישה הוליסטית בבניית שיעור המתמטיקה בבית הספר, כאשר המורה מחויב להבין שניתן לחזק הפנמת מושג מתמטי חדש על-ידי שילובו עם הידע שהצטבר במאגרי התרבות העממית.

במילים אחרות, **האתנומתמטיקה יכולה לשמש את המורים לדיגום (modeling) כזה, שהספרים הכתובים בלשונה של המתמטיקה המודרנית אינם יכולים לספק.**

הידע המתמטי המעשי הנדרש לקביעת הדרך בסריגת עיטור הכיפה, וכן, התפתח דיון בנושא 'סימטריה סיבובית', גודלה של זווית הסיבוב ומשמעותה של זווית שגודלה 360° .

ניתן לסכם את הנאמר לעיל ולומר, שההתנסות, שחוו המורים במהלך ההכשרה לשילוב האתנומתמטיקה בהוראת המתמטיקה, שכנעה אותם שהכרת המתמטיקה המעשית כחלק אינטגרלי מהתרבות והחברה, מאפשרת לטפח יחס חיובי למקצוע המתמטיקה, ומאידך, מסייעת לגשר בין הכיתה המתמטית לבין העולם שמחוצה לה. מה גם ששיעור בו משולבת האתנומתמטיקה בהוראת נושא מתמטי מסוים הוא שיעור בגישה אינטרדיסציפלינרית, הודות לחלון ההזדמנויות שהאתנומתמטיקה מזמנת למורה ולתלמידיו. ניתן לשתף בשיעור זה תחומים המשויכים בדרך כלל למקצועות מדעי הרוח והחברה, כגון: היסטוריה, תנ"ך, סוציולוגיה, פולקלור, ארכיאולוגיה, בלשנות, ספרות, פילוסופיה ואומנות.

[מקורות]

- Ascher, M. (2002). *Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Cultures*. Princeton University Press.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- D'Ambrosio, U. (2001). What is Ethnomathematics, and How Can it Help Children in Schools? *Teaching Children Mathematics*.
- Gerdes, P. (2002). Twill-Plaited Octagonal Designs, Mozambican Ethnomathematics Research Centre, C.P. 915, Maputo, Mozambique. pgerdes@virconn.com
- Katsap, A. (2004). One Mathematics, Two Cultures, and a History of Mathematics College Course as a Starting Point for Exploring Ethnomathematics. *Proceedings HPM 2004, History and Pedagogy of Mathematics, Uppsala, Sweden, July 12-17, 2004*.
- Tal, S. (1990). *Bedouin Bridal Dress as a Social Indicator, The Negev Bedouin Woman in an Era of Change*. <http://www.snunit.k12.il/beduin/arti/be5.html>
- Raskin, J. (1990). *A History of the Yarmulke*. <http://humane.sourceforge.net/humor/yarmulke.html>.

11+ ועוד בסימן 11...

מספרים שמתחלקים ב-11

כל מספר בן 2 ספרות שוות מתחלק ב-11. קל לראות מדוע.

מספר ששתי ספרותיו שוות הוא:

$$10a+a=11a$$

האם גם המספרים הבאים תמיד יתחלקו ב-11 ללא שארית?

מספרים שצורתם:

aabb (למשל, 5533)

abba (למשל, 5335)

abab (למשל, 5353)

aaabbb (למשל, 555333)

aabbaa (למשל, 553355)

בדקו כל מקרה בעזרת מספר דוגמאות ונסו להוכיח באופן כללי.