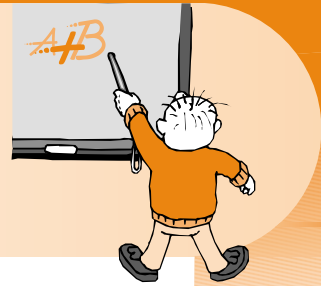
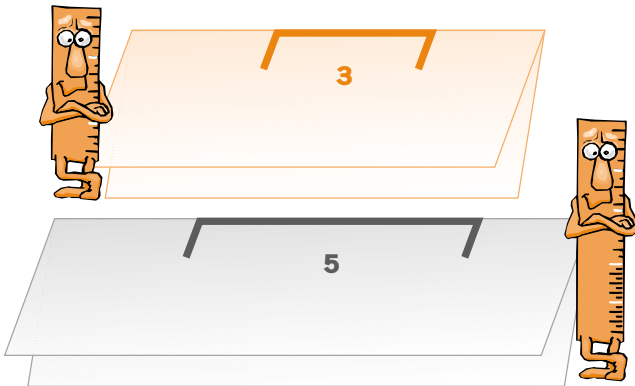


# אפשר גם אחרת



## סיפורים על קטע באורך 5 וקטע באורך 3

ג'רי (גרשון) רוזן



### הוראות לתלמידים הן:

- 1 בעזרת הקטעים המסומנים על הדף המקופל סמנו על ישר לפניכם, קטע  $AB$  באורך 5 יח'.
- 2 בעזרת הקטעים המסומנים על הדף המקופל סמנו על ישר לפניכם, קטע  $CD$  באורך 3 יח'.
- 3 בעזרת הקטעים המסומנים על הדף המקופל סמנו על ישר לפניכם, קטע  $EF$  באורך 10 יח'.

ההוראות ממשיכות באותו אופן עד שמקבלים 13 קטעים המסומנים כל אחד בשתי אותיות, מבין 26 האותיות של ה-  $A, B, C$ . אורכי הקטעים המבוקשים הם: 5, 3, 10, 8, 6, 15, 2, 1, 4, 7, 9, 11, 0.

### דיווח על הפעילות בכיתה

התלמידים נרתמו למשימה בהתלהבות והועלו רעיונות רבים לצירופי הקטעים האפשריים כדי לבצע כל אחת מהמשימות. התלמידים ניסו למצוא יותר מפתרון אחד בכל אחד מהמקרים הן על-ידי חיבור קטעים והן על-ידי חיסור, ואם מצאו יותר מדרך אחת ליצור קטע מסוים התווכחו ביניהם איזו דרך טובה יותר. בטבלה שלפניכם תוכלו לראות חלק מהצעותיהם של התלמידים.

בעולם המספרים חמש ועוד חמש הן עשר, חמש ועוד שלוש הן שמונה וחמש פחות שלוש הן שתיים. מה יכול להיות יותר פשוט מזה? אבל בהצצה יותר מעמיקה בעובדות הפשוטות האלה אפשר לגלות הרבה יותר מתמטיקה ממה שמגלים במבט ראשון.

מתברר שגם בתרגילי מתמטיקה פשוטים, בדיוק כמו בקריאה חוזרת של רומן קלסי, מגלים עוד פרטים שונים ומעניינים שלא היו מובנים קודם. וכמו בהתבוננות ביצירת אמנות שכל פעם מגלים בה עוד ועוד, כך גם התבוננות חוזרת בעובדות מתמטיות מאפשרת למידה של דברים חדשים. זוהי למידה ספירלית - חוזרים למצב מוכר, מגלים דברים חדשים ולומדים יותר על המתמטיקה.

במאמר זה אני רוצה להדגים כמה רחוק אפשר להגיע כשעוסקים במשימה פשוטה. אתחיל בדף עבודה פשוט, שרמת החשבון הדרושה בו היא חיבור וחיסור חוזר של 3 ו-5. בהמשך אראה שבלמידה ספירלית ניתן ללמוד מדף עבודה זה הרבה מאוד מתמטיקה.

### דף העבודה

מקפלים שני דפי נייר ומציירים עליהם ישרים. על כל דף ישר באורך אחר. (הישרים נמצאים בדיוק על קו הקיפול). על הישרים מסומנים קטעים באורך נתון. את התלמידים מציידים רק בשני קטעים אלו: קטע אחד ( $a$ -אפור) באורך 5 יחידות (5 ס"מ, 5 אינצ'ים), בדיד של 10 ס"מ, 3 אינצ'ים, וקטע אחר ( $k$ -כתום) באורך 3 יחידות (3 ס"מ, 3 אינצ'ים, בדיד של 6 ס"מ, וכו'). לתלמידים אין סרגלים. לתלמידים יש דף נייר חלק, עליו יבצעו את המשימה.

### ג'רי (גרשון) רוזן

M.A. במתמטיקה. מורה למתמטיקה כ-40 שנה מתוכן 30 שנה בבית חינוך. תיכון אזורי גליל מערבי ו-10 שנים באנגליה. תלמידיו מכל הגילאים: ילדי גן, יסודי, תיכון, מורים וסטודנטים באוניברסיטה. כתב הרבה חומרי למידה, בין השאר חוברות הגאומטריה של חוליות בהוצאת מכון וייזמן ופעילויות "חומשי-רוח המתמטיקה", שהתפרסמו במקומות שונים. הופיע בכנסים בינלאומיים ופרסם מאמרים בארץ ובעולם בנושאים שונים הקשורים להוראת המתמטיקה.

תיאור אלגברי	דוגמאות לציורים	אורך הקטע
$a$		5
$k$		3
$2a$		10
$5k - a$		10
$a + k$		8
$(4a - 4k)$		8
$(a - k)$		2
$4(a - k)$		8



לאחר זמן קצר התחלנו לרשום על הלוח את אורכי הקטעים שהתקבלו. על הלוח נרשמו אורכים שונים, ותלמידי הכיתה התחילו לנחש ולחפש אסטרטגיות שבעזרתן יוכלו לגלות מה אורכי של הקטע השחור בכל אחד מהמקרים.

#### הדוגמה של גליה

גליה אמרה שציירה קטע באורך 18 יחידות. אדם צייר את הסקיצה הבאה על הלוח:



אדם טען: הקטע של גליה שווה ל-18. כלומר, 18 שווה ל-6 קטעים שחורים ועוד 2 קטעים שכל אחד מהם שווה

#### הרחבת הידע לפתרון משוואות עם נעלם אחד

הפעילות של חיבור וחסור הקטעים 5 ו-3, ויצירת תרגילים תואמים, הפכה למשעשעת מאוד והגיע הרגע להרחיב את המושג.

לתלמידים הוצגה המשימה הבאה.

- החליפו את הקטע האפור בקטע שאורכו שונה מ-5, לפי בחירתכם, מבלי לגלות לאחרים מה אורך הקטע שבחרתם. צבעו אותו בשחור (b).
- השתמשו בקטע השחור (b) שש פעמים ופעמיים בקטע שנשאר באורך 3 (k) וציירו קטע חדש.
- ספרו לכיתה מה אורכי של הקטע שיצרתם.





לתלמידים הוצגה המשימה הבאה.

ציירו קטע בעזרת שני קטעים שאתם תקבעו את אורכם.

אחד מהם יסומן באפור (a) והשני יסומן בכתום (k)

(שימו לב שאורך הקטעים האפור והכתום יהיה שונה מאורכם במשימה הקודמת).

**עירד דיווח שהשתמש בשלושה קטעים כתומים ובשני קטעים אפורים כדי לצייר קטע באורך 18 יחידות.**

תלמידי הכיתה ניסו לגלות מה אורכו של הקטע הכתום של עירד ומה אורכו של הקטע האפור שלו. צבי הציע שהכתום הוא 2 והאפור הוא 6, סנדרה הציעה שהכתום הוא 3 והאפור הוא  $4\frac{1}{2}$ , וליה הציעה שהכתום הוא 4 והאפור הוא 3.

ליה שמה לב שקיימות הרבה אפשרויות לאורכם של הקטעים ולא ניתן לקבוע מהו הצירוף שעירד חשב עליו. היא ביקשה מעירד מידע נוסף.

**עירד הוסיף מידע: ארבעה כתומים ושלושה אפורים הם 25.**

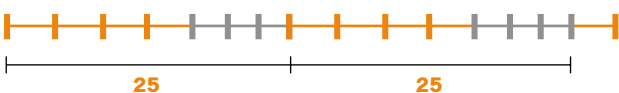
ליה חשבה כמה רגעים ואז ציירה שלושה קטעים כתומים ושני אפורים מבלי לדעת מה אורך כל קטע. היא אמרה: שרטוט זה מייצג 18 יחידות.



אם נכפיל אותו פי 2 נקבל 36 יחידות. אם נשלש אותו נקבל תשעה כתומים ושישה אפורים והאורך יהיה 54 יחידות.



ועל-פי הרמז השני, ליה המשיכה, ארבעה כתומים ושלושה אפורים הם באורך של 25 יחידות, אני יכולה להכפיל אותם פי 2 ולקבל אורך של 50. היא הניחה את שני הקטעים אחד מתחת לשני, כך:



ל-3. לכן, נחסר מ-18 את שני הקטעים הכתומים ונקבל  $18-3-3=12$ , כלומר, שישה קטעים שחורים שווים ל-12, לכן כל קטע שחור הוא באורך 2 יחידות. הפתרון האלגברי הוא:

$$k + k + k + k + k + k + k + 3 + 3 = 18$$

$$k + k + k + k + k + k + k + 3 + 3 = 12 + 3 + 3$$

$$k + k + k + k + k + k = 12$$

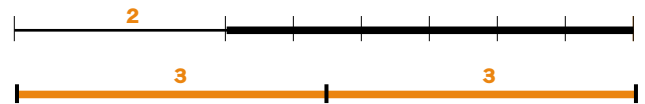
$$k + k + k + k + k + k = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$k = 2$$

רוב הקטעים שהתלמידים ציירו היו ארוכים יותר משש יחידות (שני הכתומים) אבל להפתעת כולם לואיז כתבה על הלוח שהקטע שלה הוא באורך של 2 יחידות.

**הדוגמה של לואיז**

ליאור ניסה לפענח את תשובתה של לואיז וצייר על הלוח את הציור הבא:



ליאור טען: לא ייתכן שלואיז עשתה תרגיל חיבור כי שני כתומים, כלומר שש, יותר גדול משתיים. לדעתו ששת הקטעים השחורים משלימים את שתיים לשש. לכן ששת הקטעים השחורים הם ביחד 4, וכל קטע שחור שווה ל- $\frac{4}{6}$ , כלומר, אורכו -  $\frac{2}{3}$  יחידה. הפתרון האלגברי הוא:

$$2 + k + k + k + k + k + k = 3 + 3$$

$$2 + k + k + k + k + k + k = 2 + 1 + 3$$

$$k + k + k + k + k + k = 4$$

$$k + k + k + k + k + k = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \frac{4}{6}$$

$$k = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

**הרחבת הידע לפתרון משוואות עם שני נעלמים**

אחרי תקופת הסתגלות שבה התלמידים התרגלו לעבודה עם שני קטעים שאורך אחד מהם ידוע והם צריכים לגלות את אורכו של הקטע השני, הגיע הרגע להרחיב את המושג עוד יותר.

## סיכום

במהלך השנים התלמידים לומדים אלגוריתמים רבים המטפלים במצבים מתמטיים שונים. לתלמידים קשה למצוא חוט המקשר את הנושאים השונים שהם לומדים, ועל כן הם מתקשים ביישום הידע לתכנים אחרים. קשה להם לראות את הקשר בין פרק אחד לאחר, והמתמטיקה נראית להם כפיסות פיסות שאינן מתחברות לשלמות אחת. במאמר זה ניסיתי להראות קשר בין נושאים שונים העשויים ליצור שלמות והבנה מעמיקה יותר של הפעולות האריתמטיות ושל האלגברה. הקשרים מאפשרים לתלמידים לפתור משוואות מבלי להישען על אלגוריתמים הנלמדים כדרך לפתרון משוואות, שבדרך כלל הם מנותקים מהאלגוריתמים שהתלמידים עסקו בהם בלימודי החשבון.

חשוב לזכור שפעילות הפתיחה הייתה חיבור שני קטעים ונשענה על ידע בחיבור וחיסור עד 10. פעילות זו היוותה את נקודת הזינוק לכל אחת מהפעילויות הנוספות.

את הפעילויות האלו ניסיתי בפעם הראשונה עם תלמידים מתקשים בגיל 15-16, שחוו כישלונות רבים בלימודי האלגברה. התחלתי אתם בחיבור הקטעים ועברנו למערכת משוואות בשני נעלמים. לאחר מכן עברנו לתיאור פורמלי ולאלגוריתמים לפתרון מערכת משוואות.

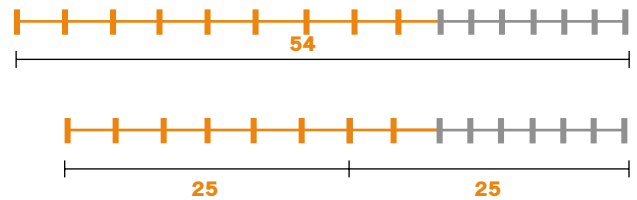
התנסיתי בפעילויות אלה גם עם תלמידים צעירים, שאינם לומדים אלגברה. באמצעות קטעים אלו הצלחתי לשוחח איתם על חוקי האלגברה בשפת הקטעים, ובדרך זו ליצור הטרמה של מושגים רבים.

כלומר, בשפה אלגברית נקבל:

$$9k+6a=54$$

$$8k+6a=50$$

אם נסדר את הקטעים לפי הסדר שבו המשתנים מסודרים במשוואות נקבל:



ליהי הראתה שההפרש בין שני הקטעים הוא הכתום הבודד שאורכו 4 יחידות.

לאחר שסימנה את כל הכתומים, כל אחד באורך 4 יחידות, מצאה שאורכו של האפור הוא 3 יחידות.

