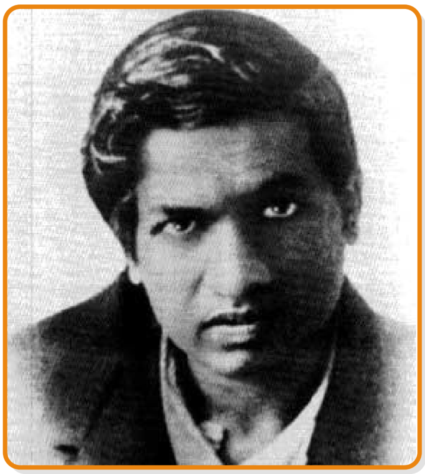
א-ב היסטורי

סריניוואסה איינגר רמנוג'אן (1920-1887)

מרגרט פרום



סריניוואסה איינגר רמנוג'אן (Srinivasa Aiyangar Ramanujan) היה בן לעם הטמילי שחבריו חיים בהודו וסרילנקה.

גילויו של רמנוג'אן

כשנשאל המתמטיקאי הבריטי הנודע ג' ה' הארדי (1947-1877), מומחה עולמי בתורת המספרים, מה הייתה תרומתו החשובה ביותר למתמטיקה, ענה ללא היסוס: "גילויו של רמנוג'אן". הארדי כיוון בדבריו למכתב שקיבל בינואר 1913 מסריניוואסה איינגר רמנוג'אן - ללא ספק אחד המכתבים המפורסמים ביותר בתולדות המתמטיקה. המכתב המפורסם נפתח במילים אלו:

"אדון נכבד, אני מבקש להציג את עצמי לפניך כפקיד במחלקת החשבונות של משרד הנמל במדראס (עיר בדרום הודו) המשתכר 20 ליש"ט בלבד בשנה. אני היום בן 23. אין לי השכלה אוניברסיטאית, אבל סיימתי את הלימודים הרגילים בבית הספר (...) את זמני הפנוי אני מקדיש לעבודה במתמטיקה (...) אני מפלס לי דרך חדשה."

מרגרט פרום
מרצה ומדריכה פדגוגית לפרחי הוראה במכללת תלפיות ולמורים בפועל בתחום המתמטיקה. לימדה מתמטיקה כ-20 שנה בבי"ס יסודי, חט"ב ותיכון והדריכה מורים למתמטיקה מטעם משרד החינוך. עמדה בראש "מדור מתמטיקה" במרכז הפדגוגי בחולון ועבדה כחוקרת במחלקה למתמטיקה שימושית במכון ויצמן. מחברת חוברות לימוד בחשבון, הנדסה וסביבה מתמטית, וחברת מערכת כתב העת מספר חזק 2000.

באותו מכתב היו רשומות 120 טענות מתמטיות בתורות שונות, שנפרסו על-פני עשרה עמודים (רק חלק מהטענות היה ידוע). לאחר שעיינו בהן עיון מעמיק הכריזו הארדי ועמיתו המתמטיקאי ג' א' ליטלווד כי: "הטענות חייבות להיות נכונות, כיוון שלולא כן, לא היה בנמצא ולו אדם אחד שניחן בדמיון הנדרש כדי להמציא אותן".

קורות חייו של רמנוג'אן

סריניוואסה איינגר רמנוג'אן נולד בשנת 1887 בביתה של סבתו שבארוד - עיירה קטנה בדרום הודו. אף-על-פי שהוריו היו שייכים לקסטה הגבוהה בהודו- הברהמינים, הם היו אנשים קשי-יום וחסרי כול. כאשר היה רמנוג'אן בן שנה לקחה אותו אימו לעיר קומבקונם - מרכז תרבותי טמילי עתיק בדרום הודו. ארבע שנים מאוחר יותר, בהיותו בן 5 החל סריניוואסה רמנוג'אן ללמוד בבית הספר היסודי. בילדותו היה ילד רגוע, שלו ושקוע במחשבות, בגיל 9 כבר מילא תפקיד של משגיח על ילדים אחרים, וכך זכה לפטור ממחצית שכר הלימוד. הוא היה תלמיד מצטיין וגרף פרסים ומלגות. כשהגיע לגיל 15, ולאחר שלמד לפתור משוואה מהמעלה השלישית, הוא מצא שיטה לפתרון משוואה ממעלה רביעית ואפילו ניסה למצוא פתרון למשוואה ממעלה חמישית, בלא שידע שהדבר בלתי אפשרי (ראה, פרום, 2005).

בשנת 1903, כאשר מלאו לרמנוג'אן 16 שנה, הוא גילה את הספר: "תוצאות אלמנטריות במתמטיקה תיאורטית ושימושית". גילוי ספר זה היווה נקודת מפנה בחייו. הספר הכיל אוסף של אלפי משפטים ונוסחאות, כולם ללא הוכחות. למרות מיעוט ההסברים, ואולי בשל כך, עורר בו הספר עניין רב והוא החל לחקור את הטענות שבספר בהתלהבות גדולה. אפשר לומר שספר זה הוא אשר עורר את גאוניותו של רמנוג'אן, למרות שהוא חזר וטען שדמות אלוהית שהופיעה בחלומותיו היא זו שהעניקה לו את נוסחאותיו המתמטיות. כך או כך, עובדה מדהימה ומעוררת פליאה

היא שאכן לעתים קרובות היה רמנוג'אן מתעורר משנתו ורושם במהירות משפטים ונוסחאות (נכונים!) גם אם לא תמיד היה ביכולתו להוכיחם. את תוצאותיו רשם רמנוג'אן בפנקסו, שאותו נהג להציג לפני מתמטיקאים שגילו התעניינות בעבודתו.

באותה שנה (1903) החל רמנוג'אן את לימודיו בקולג', כשהוא נהנה ממלגה על סמך הצלחותיו במתמטיקה. ואולם ככל שגברה התעמקותו בלימודי מתמטיקה כך הלכה ופחתה השקעתו במקצועות האחרים, ובשל כך לא חודשה המלגה. למרות זאת הוא לא זנח את עבודתו המתמטית, וכעבור שלוש שנים, בשנת 1906, הוא החל להכין את עצמו לבחינה אשר הצלחה בה אמורה הייתה להעניק לו את הזכות ללמוד באוניברסיטה של מדראס. למרבה הצער, פעילותו השקדנית בתחום המתמטיקה הפכה למחסום עבורו, מאחר שבגינה לא התמקד כראוי בתחומים שהיו דרושים לבחינת הכניסה, ונחל בה כישלון חוזר ונשנה. לאחר אותם כישלונות בבחינה במשך שלוש שנים, לא הייתה לרמנוג'אן תעסוקה מוגדרת והוא חי על נדבת לבם של חבריו. כל אותה עת המשיך רמנוג'אן לשקוד על פיתוחם של רעיונותיו המקוריים, בלא שהייתה לו ידיעה על מחקרים אחרים שכבר היו קיימים בעולם בעת ההיא. אין ספק שאילו עמד לרשותו הידע הקיים בעולם המתמטי בזמנו, הדבר היה מהווה נקודת זינוק ויתרון עצום עבורו. פרסומו של מאמר מעולה מפרי עטו בשנת 1910 בכתב העת ההודי החשוב העוסק במתמטיקה:
"Journal of the Indian Mathematical Society"
זיכה את רמנוג'אן בהכרה כמתמטיקאי מוכשר ומבריק.

בקיץ 1909 ארגנה לו אימו נישואי שידוך, כמיטב המסורת ההודית, לג'אנאקי אמל, ילדה בת 9. הם באו בברית הנישואין, אך חייהם המשותפים החלו רק כעבור 4 שנים כשמלאו לילדה 13 שנה. כל עתותיו של רמנוג'אן היו קודש למחקריו המתמטיים, ועל כן נהגו אשתו ואימו להאכילו כך שיוכל להמשיך בעבודתו באין מפריע, אפילו בזמן הארוחות. בגששו אחר תמיכה כלכלית ביקר רמנוג'אן במשרדו של ראו רמנכנדרה, אחד המייסדים של הארגון המתמטי ההודי.

וכך כותב ראו רמנכנדרה על רמנוג'אן בעקבות אותו ביקור: "בעל מבנה גוף רחב ממדים, נמוך קומה, לא מגולח ואף לא נקי במיוחד, אך בעל סממן בולט אחד: עיניים יוקדות (...) מהלך עם מחברת בלויה תחת זרועו. הוא היה עני מרוד (....) שאלתי אותו מה רצונו. הוא ענה כי רצונו בקצבה קטנה ממנה יוכל לחיות, כך שיוכל להמשיך במחקריו" (Berndt & Rankin,1995). בעזרתו של רמנכנדרה קיבל רמנוג'אן מלגה חודשית, ולאחר מכן, בשנת 1912, משרה במחלקת החשבונות של משרד הנמל במדראס.

מאותו משרד נמל הקטן והאפרורי נשלח מכתבו המפורסם של רמנוג'אן בינואר 1913 - אותו מכתב שתוצאותיו המפתיעות עוררו את התעניינותו וסקרנותו של המתמטיקאי הנודע ג', ה', הארדי. אותו הארדי אמר פעם: "אינני מעוניין במתמטיקה אלא כאמנות יצירתית", ומאה ועשרים הטענות המתמטיות שהיו רשומות במכתבו של רמנוג'אן היו, אכן, יצירה יפה ומקורית לכל הדעות.

הארדי השיב למכתבו של רמנוג'אן. בעת חילופי המכתבים ביניהם הוא עמד על גאוניותו יוצאת הדופן של בן-שיחו, ובשנת 1913 הוא הזמין את רמנוג'אן לעבוד אתו בקיימברידג'. הייתה רק בעיה אחת: הודים השייכים למעמד הגבוה (ורמנוג'אן כזכור היה שייך לקסטה הברהמינית) נמנעים מלנסוע אל מחוץ לגבולות מדינתם. כיוון שכך, סירבה תחילה אמו של רמנוג'אן לאפשר את נסיעתו. לבסוף, כנראה בשל חיזיון שנגלה לה, חזרה בה, ובמרץ 1914 יצא רמנוג'אן, על סיפון אוניית קיטור, לאנגליה, כשהוא משאיר במולדתו את אמו ואת אשתו. באפריל של אותה שנה הגיע רמנוג'אן לקיימברידג' ונכנס לתקופה של חמש שנות עבודה מתמטית אינטנסיבית במחיצתו של הארדי. החיים בתרבות הזרה היו קשים מאוד עבורו - הודי אדוק וצמחוני - החל בירקות הבלתי מוכרים שלא ערבו לחיכו, עבור למזג-האוויר הסגרירי, וכלה בנעליים שכפות רגליו לא היו מורגלות בשכמותן במהלך 26 שנותיו במולדתו. אולם, הוא היה אדם שמח בחלקו, השתלב היטב בחברה המתמטית והיה נערץ על הסטודנטים ההודים. נאמר עליו שהיה חברותי מאוד, מנומס, בעל חוש הומור מפותח ואיש שיחה. "היה תמיד מעניין לדבר אתו גם על נושאים שונים ממתמטיקה"(Berndt & Rankin,2001).

מבחינת הפעילות המתמטית שלו, השנים אותן בילה רמנוג'אן באנגליה היו פוריות ויצירתיות במיוחד, והוא זכה להכרה לה ייחל. בשנת 1916 הוענק לו תואר שווה-ערך לתואר דוקטור במדעים על מחקריו, ובשנת 1917 הוא היה להודי הראשון שנבחר כחבר בחברה המלכותית למדעים. שיתוף פעולה פורה חיבר בין ההארה הפנימית והאינטואיציה, הכמעט בלתי טבעית, של רמנוג'אן (אשר

מהיעדר חינוך מתמטי פורמלי לא ידע מה היא הוכחה פורמאלית או שיטות מתמטיות "קפדניות") לבין מיומנותו הנפלאה של הארדי בפן הפורמלי של המתמטיקה. על הארדי, אמר פעם, גדול הפילוסופיים של זמננו, ברטרנד ראסל את הדברים הבאים: "אם הארדי מסוגל למצוא הוכחה שאני - ראסל - עומד למות תוך 5 דקות, הוא כמובן יצטער לאבד אותי, אולם צערו יתגמד לעומת התענוג שבהוכחה". ההצלחה אכן האירה פנים לרמנוג'אן, אך בד בבד החלה בריאותו להתרופף מאוד בשל פגעי האקלים ונוהגי התרבות הזרים לו. רמנוג'אן, שבילה את כל שנותיו באקלים טרופי, נאלץ עתה להתמודד עם מזג האוויר הבריטי הצונן. יתרה מכך, הוא, שבכל שנות חייו בהודו הוכנו עבורו ארוחותיו על-ידי אימו ואשתו, נאלץ עתה באנגליה לבשל את ארוחותיו בעצמו, כדי שיוכל להמשיך ולדבוק בחוקי הקסטה הנוקשים. עם פרוץ מלחמת העולם הורע מצבו עוד יותר בשל המחסור במזון. לאחר כל התלאות הללו אושפז רמנוג'אן ב-1917 והיה חשש ממשי לחייו. בסוף שנת 1918 השתפרה בריאותו והוא חזר להודו. אולם מצבו הבריאותי שב והדרדר, ובשנת 1920 הוא הלך לעולמו.

ארבע המחברות המפורסמות של רמנוג'אן

בהודו היה הנייר יקר מאוד, ועל כן נהג רמנוג'אן לכתוב את רוב עבודות הטיוטה שלו על לוח צפחה, שהשימוש בו אפשר לו למחוק את החישובים בשרוולו ולחזור לכתוב עליו שוב כאוות נפשו. בסופו של התהליך הוא העביר את התוצאות הסופיות בלבד אל מחברותיו.

תוצאות אלו ייהפכו למפורסמות ברבות הימים, ומתמטיקאים רבים המשיכו לנסות לפענח וללמוד את תגליותיו של הגאון המופלא עד עצם היום הזה. מספרים, שהמתמטיקאי והמורה הדגול ג'ורג' פוייה אשר שאל מהארדי את מחברתו הראשונה של רמנוג'אן, החזיר אותה בבהלה באומרו ש"המחברת היא כל כך מרתקת שהוא חושש שאם ימשיך להחזיק בה, הוא לעולם לא יוכל להוכיח עוד תוצאות משלו (...) והוא ימשיך לנסות להוכיח את נוסחאותיו של רמנוג'אן". גם מתמטיקאים שונים בני זמננו "כעסו" לא פעם על רמנוג'אן באומרם: "איך נוכל אנחנו לאהוב אותו כאשר הוא כל הזמן מושיט יד מקברו וחוטף את התוצאות הטובות ביותר שלנו" (Berndt & Rankin,1995).

סוף דבר

גאונים יש מעטים, גאונים דגולים - רק קומץ, גאון מכושף היה אחד - רמנוג'אן בלבד.

רמנוג'אן היה תופעה מתמטית יחידה במינה. בהקשר זה נוכל לומר על רמנוג'אן מה שאמר הארדי על ארכימדס: "**ארכימדס ייזכר גם לאחר שאייסכילוס יישכח, משום ששפות מתות, שלא כמו רעיונות מתמטיים**".

על מחקריו של רמנוג'אן

רמנוג'אן חקר נושאים בתורת המספרים (ענף במתמטיקה העוסק בתכונות המספרים הטבעיים) ובעיקר בעיות הקשורות לפונקציות אריתמטיות. לדוגמה: נסמן ב-N את קבוצת המספרים הטבעיים, פונקציית הפילוגים $P: N \to N$ מוגדרת כך ש- $p(n)$ הוא מספר האופנים שבהם ניתן לכתוב מספר שלם וחיובי כסכום מספרים שלמים חיוביים.

רמנוג'אן עסק גם בנושאים הקשורים בתורת המספרים האנליטית, תחום אחר של תורת המספרים.

תורת המספרים האנליטית מסתייעת בשיטות של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (העוסק בהשתנותה של פונקציה) ועוד, כדי לחקור, בין היתר, שאלות הקשורות בתכונותיהם של המספרים השלמים, ונושאים הקשורים בקירובים רציונאליים למספרים אי-רציונאליים. בשיטות אלו השתמש רמנוג'אן כאשר הצליח לפתח את פונקציית הפילוגים (התייחסות אליה תובא בהמשך המאמר). את מקומו בהיסטוריה של המתמטיקה קנה לעצמו רמנוג'אן בזכות כישרונו העצום לחוש ולזהות תבניות ודפוסים ובזכות יכולתו הנדירה להכללה. הוא הפגין כישרון במציאת נוסחאות מפתיעות (התייחסות אליהן תובא בהמשך המאמר), בין היתר נוסחאות המשתמשות בקבועים מתמטים כגון π.

גילוין המתמטיים של תלמיד תיכון

עוד בלימודיו בתיכון גילה רמנוג'אן נוסחה מעניינת מאוד

$$e^{i\pi}+1=0$$

אך הוא התאכזב להיווכח שאותה נוסחה כבר נתגלתה יותר מ- 150 שנה לפניו, על-ידי אחד מגדולי המתמטיקאים - לאונרד אוילר. i הוא המספר המקיים את התכונה הבאה $i^2=-1$ (ראה, פרוים, 2005), e הוא בסיס של הלוגריתם הטבעי שערכו מתחיל ב-....2.7182818284590.

נהוג לומר שהיופי של הנוסחה שגילה מחדש רמנוג'אן הוא בכך, שהיא מקשרת בצורה מפתיעה בין "חמשת המספרים החשובים במתמטיקה", כלומר, היא מקשרת בין המספר π, המייצג את הגיאומטריה, לבין המספר i המייצג את האלגברה, ולבין המספר e המייצג את האנליזה ובין המספרים החשובים 0 ו-1.

על כישרונו של רמנוג'אן לזהות תבניות ודפוסים

בשנת 1911 שאל רמנוג'אן במאמר, שכתב בכתב עת למתמטיקה היוצא לאור בהודו, מה הערך של הביטוי הרשום להלן:

$$?=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots}}}$$

מאחר שלא נמצא קורא שיציע פתרון, חשף רמנוג'אן, ואף הוכיח לאחר מכן, את הנוסחה שלהלן המדהימה בפשטותה. כאשר x טבעי מתקיים:

$$x+1=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\ldots}}}$$

($x=2$ ולכן ערכו של הביטוי הוא 3).

רמנוג'אן ותורת הפילוגים

בשנת 1919, שנה לפני מותו, פירסם רמנוג'אן ביחד עם שותפו הארדי מאמר חשוב בו חקרו נושאים בתורת הפילוגים. תורת הפילוגים עוסקת במספר האופנים שבהם ניתן לכתוב מספר שלם וחיובי כסכום מספרים שלמים חיוביים.

לדוגמה, ניתן לפלג את המספר 4 ב-5 אופנים שונים (5 פילוגים):

4=1+1+1+1

4=2+1+1

4=2+2

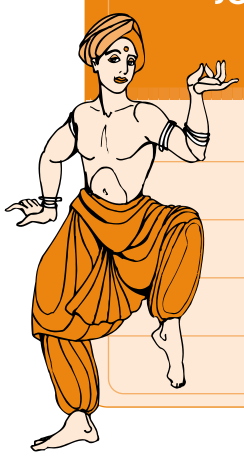
4=3+1

4=4

הערה: 2+1+1 הוא פילוג זהה לפילוג 1+2+1.

באופן דומה, למספר 5 יש שבעה פילוגים.

נערוך טבלה ובה: המספר הטבעי n, הפילוגים של n, ומספר הפילוגים של n אשר סומן $p(n)$. (טבלה 1)



המספר n	הפילוגים של המספר	מספר הפילוגים של המספר $p(n)$
1	1	1
2	1+1, 2	2
3	1+1+1, 2+1, 3	3
4	1+1+1+1, 3+1, 2+2, 2+1+1, 4	5
5	1+1+1+1+1, 2+1+1+1, 2+2+1, 3+1+1, 3+2, 4+1, 5	7

טבלה 1

נוכל לראות בטבלה, למשל, שעבור $n=2$, $p(2)=2$, ועבור $n=4$, $p(4)=5$.

אם נמשיך את הטבלה נוכל לראות שככל שהמספר הטבעי n גדל, מספר הפילוגים שלו "מרקיע שחקים" במהירות. לדוגמה, מספר הפילוגים עבור 10 הוא 42, מספר הפילוגים עבור 20 הוא 627. אם נמשיך נוכל לראות שמספר הפילוגים עבור 50 הוא 226,204 ועבור 200 הוא 3,972,999,029,388. במאמרו כתב רמנוג'אן:

> "כאשר חקרתי את הטבלה הזאת (של המספרים הטבעיים מ-1 עד 200 ומספר פילוגיהם) "הבחנתי בכמה תכונות מוזרות אשר לכאורה שייכות ל-p (n)".

רמנוג'אן הבחין בכך שהחל מהמספר 4, מספר הפילוגים של כל מספר חמישי (...4, 9, 14, 19) הוא מכפלה של 5 לדוגמה, מספר הפילוגים של המספר 4 הוא 5, מספר הפילוגים של 9 הוא 30, למספר 14 יש 135 פילוגים וכן הלאה. כמו כן, החל מהמספר 5, מספר הפילוגים של כל שלם שביעי (...5, 12, 19, 26), הוא כפולה של 7. החל מהמספר 6, מספר הפילוגים של כל מספר טבעי בדילוג של 11 מקומות, הינו כפולה של 11.

רמנוג'אן והארדי הצליחו למצוא נוסחת קירוב מדהימה למספר הפילוגים p(n) של מספר נתון טבעי n.

$$p(n)\approx\frac{1}{4n\sqrt{3}}\,e^{\pi\sqrt{2n/3}}$$

אין ספק שבנוסחה הזאת מסתתרת תעלומה מסוימת: בצד שמאל שלה יש מספר טבעי אך צד ימין מכיל קבועים מתמטיים שהם מספרים אי-רציונאליים, π ו- e. קל להבין שמקורה של "התעלומה" הוא בקיומה של נוסחת הקירוב. אם נחשב (בעזרת מחשבון) נוכל להבחין בכך שככל ש- n גדול יותר כך האומדן מדויק יותר. לדוגמה, עבור n =200 נקבל:

$$p(200)\approx3,972,999,029,388.004$$

המספר הזה קרוב מאוד לערך האמיתי, שהוא מספר האופנים שבהם ניתן לכתוב את 200 כסכום מספרים שלמים חיוביים: 3,972,999,029,388

על המספר 1729 "המשעמם" ואחרים

על אהבתו של רמנוג'אן למספרים הטבעיים ניתן ללמוד מהדברים שאמר עליו הארדי: "רמנוג'אן היה מסוגל לזכור את תכונותיהם הייחודיות של המספרים באופן ממש לא טבעי (...) אני זוכר שכשנסעתי לבקרו במיטת חוליו בפאטני, הזמנתי מונית שמספרה היה 1729. כשהערתי לרמנוג'אן שזה מספר משעמם למדי, ושאני מקווה שזה איננו סימן רע, הוא השיב לי כך: לא, זה מספר מעניין מאוד; זה המספר הקטן ביותר שניתן לבטאו כסכום של שתי חזקות שלישיות בשתי דרכים שונות' (Hardy, Seshu & Aiyar, 2000).

ואכן: $1729=9^3+10^3=1^3+12^3$.

רמנוג'אן ומספרים פריקים במיוחד

בשנת 1916, עם סיום את לימודיו בקמברידג', הוענק לרמנוג'אן התואר דוקטור. עבודת המחקר שלו כללה שבעה מאמרים שבהם חקר את "המספרים הפריקים במיוחד", ש"הם שונים מן המספרים הראשוניים ככל האפשר "They are as unlike a prime as a number can be- (Kanigal ,2005).

מספר ראשוני הוא מספר גדול מ-1 המתחלק רק ב-1 ובמספר עצמו, ולכן למספר ראשוני יש רק שני מחלקים שונים: המספר עצמו ו-1. נוכל לדמיין ש"בקצה" האחר, "בקוטב המנוגד" למספר הראשוני, יימצא מספר בעל הרבה מאוד מחלקים. יתר על כן, אם נרצה "לכמת", נוכל לחפש מספר שיש לו יותר מחלקים מאשר לכל מספר טבעי קטן ממנו. קל לראות, למשל, שלמספר 12 יש 6 מחלקים: 1, 2, 3, 4, 6, 12. אם נחקור את מספר המחלקים של המספרים הטבעיים הקטנים מ- 12. נגלה כי ל- 12 יש מספר רב יותר של מחלקים בהשוואה לכל מספר טבעי קטן ממנו (למספר 4 יש רק 3 מחלקים, למספר 9 יש 3 מחלקים ולמספרים 6, 8, 10 יש 4 מחלקים). מספר כמו 12 הוגדר על-ידי רמנוג'אן כ**"מספר פריק במיוחד"** או כפי שהוא מכונה על-ידי כמה מהמתמטיקאים - **מספר פריק ברמה גבוהה**. המספר הפריק במיוחד הבא לאחר 12 הוא 24 ולו "מספר שיא" של מחלקים. אם נחקור את מספר המחלקים של המספר 24 נגלה שיש לו יותר מחלקים (8) מאשר לכל מספר שלם וחיובי הקטן ממנו. נערוך עתה טבלה של כל המספרים הטבעיים מ-1 עד 24 ונציב בה את המחלקים ואת מספר המחלקים של כל מספר.

המספר	מחלקים	מספר המחלקים
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	4
8	1,2,4,8	2
9	1,3,9	3
10	1,2,5,10	4
11	1,11	2
12	1,1,3,4,6,12	6
13	1,13	2
14	1,2,7,14	4
15	1,3,5,15	4
16	1,2,4,8,16	5
17	1,17	2
18	1,2,3,6,9,18	6
19	1,19	2
20	1,2,4,5,10,20	6
21	1,3,7,21	4
22	1,2,11,22	4
23	1,23	2
24	1,2,3,4,6,8,12,24	8

קל להבחין במספרים הפריקים במיוחד שבטבלה. נרשום אותם ונרשום בסוגריים את מספר מחלקיהם כך: 2 (2), 4 (3), 6 (4), 12 (6), 24 (8).

רמנוג'אן, אשר ניחן בכישרון רב בכל הקשור לחישובים, ערך רשימה של קרוב ל- 102 מספרים פריקים במיוחד (הוא פסח רק על מספר אחד: 29,331,862,500). דוגמאות בודדות למספרים אלו הופיעו הרבה זמן לפניו, למשל אצל הפילוסוף היווני אפלטון. היום קיימים אלגוריתמים ליצירתם בעזרת מחשבים. המספר המאה ברשימתו של רמנוג'אן הוא 3,212,537,328,000 והוא בעל 8,192 מחלקים. נרשום להלן את המשך הסדרה של המספרים הפריקים במיוחד עד המספר 5040 ונרשום בסוגריים את מספר מחלקיהם:

36 (9), 48 (10), 60 (12), 120 (16), 180 (18), 240 (20), 360 (24), 720 (30), 840 (32), 1260 (36), 1680 (40), 2520 (48), 5040 (60).

רמנוג'אן גילה כי למספרים פריקים במיוחד קיימת תכונה אופיינית, הקשורה לפירוק לגורמים ראשוניים. הוא טען כי אם נציג מספר פריק במיוחד כמכפלה של גורמים ראשוניים, לדוגמה:...$2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$ כאשר המעריכים ...d, c, b, a הם מספרים טבעיים, אזי המעריך a (המעריך של הגורם הראשוני הקטן ביותר) יהיה תמיד שווה או גדול מהמעריך b, אשר הוא שווה או גדול מהמעריך c וכן הלאה. רמנוג'אן מצא גם כי המעריך של המספר הראשוני הגדול ביותר במכפלה של מספרים פריקים במיוחד הוא 1 (תכונה זו אינה מתקיימת בשני מספרים פריקים במיוחד 4 ו -36). לדוגמה:

$6=2^1 \times 3^1$

$12=2^2 \times 3^1$

$24=2^3 \times 3^1$

$48=2^4 \times 3^1$

$60=2^2 \times 3^1 \times 5^1$

התועלת שבמספרים הפריקים במיוחד

נפתח בדוגמה מחיי יום-יום: קבוצה אחת בצופים מונה 37 ילדים (37 הוא מספר ראשוני). המדריך יכול לחלק את הקבוצה לקבוצות קטנות יותר, אך כמובן שהקבוצות החדשות שיווצרו לא תהיינה שוות. אילו היו בקבוצתו 36 ילדים (36 מספר פריק במיוחד) היו קיימות שבע אופציות לחלוקת הקבוצה לקבוצות שוות, קטנות יותר (בכל קבוצה 2 או 3 או 4 או 6 או 9 או 12 או 18 ילדים). הבבלים השתמשו במספרים פריקים במיוחד למדידה: המעגל נחלק ל-360 מעלות, השעה נחלקת ל-60 דקות, הדקה נחלקת ל-60 שניות; וגם לספירה: הם השתמשו בשיטת ספירה בבסיס 60. כדאי לציין עובדה מעניינת בהקשר זה: ב-1586 המתמטיקאי והמהנדס סימון סטווין אשר פיתח את תורת השברים העשרוניים, (ראה פרוים, 2003) הציע את הבסיס 12 כבסיס ספירה. היכן נמצא את המספרים הפריקים במיוחד בימינו אלה? קיימות דוגמאות רבות לשימוש במספרים האלו: 12 חודשים בשנה; 12 בתריסר, 12, 24, 36 תמונות בגליל של סרט צילום, 24 שעות ביממה, 12 אינץ' ברגל (בבריטניה עדיין משתמשים במידת האורך הזו), ובל נשכח את 12 הנקודות בתחרות האירוויזיון.

קל יותר לארוז או לחלק שווה בשווה בעזרת המספרים הפריקים במיוחד. נראה אם כן, שלפעולות כגון אריזה, חלוקה שווה, מיון, עריכת חישובים - המספרים הפריקים

במיוחד מביאים תועלת רבה, בהופכם אותן לקלות יותר ונוחות יותר לשימוש.

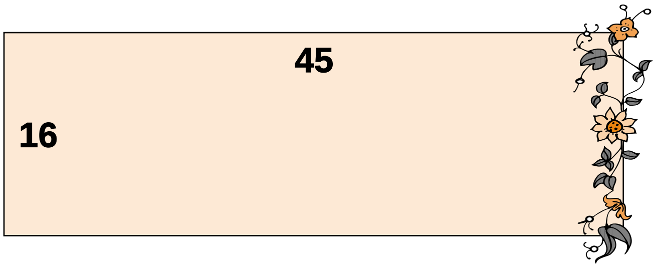
על שברים משולבים

טרם הגעתו לאנגליה, פיתח רמנוג'אן נוסחאות מבריקות אשר מוכיחות את יכולתו המיוחדת לאיתור קשרים ולזיהוי תבניות. לעיתים קרובות הסתמך רמנוג'אן בפיתוחן של נוסחאות אלו במושג "השבר המשולב".

נדגים מושג זה באמצעות דוגמה פשוטה:

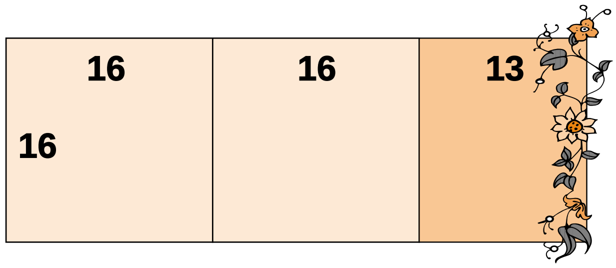
נמיר את השבר הפשוט $\frac{45}{16}$ לשבר משולב.

לצורך המחשה נעזר במלבן בעל מידות של 45 על 16.



ניתן להסתכל על המלבן גם בדרך שונה מעט ולראות שהיחס בין מידותיו הוא $\frac{16}{45}$. נשתמש בהסתכלות שונה זו כאשר נבטא את $\frac{45}{16}$ כשבר משולב. נהפוך את $\frac{45}{16}$ לשבר מעורב: $\frac{45}{16}=\frac{16+16+13}{16}=2+\frac{13}{16}$

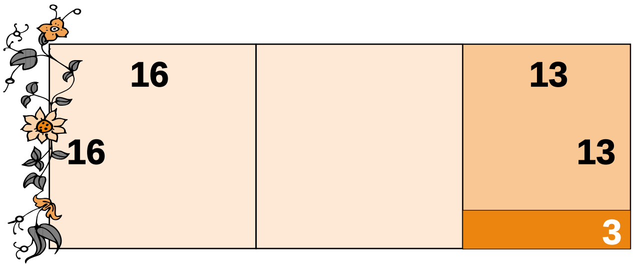
נשוב ונתבונן במלבן:



הפעולה החשבונית שביצענו שקולה לחיתוך המלבן לשני ריבועים בעלי צלע 16 ומלבן שמידותיו הן 13 על 16, ממנו לא ניתן להמשיך ולחתוך ריבועים של 16 על 16. כעת, נתבונן במלבן הנותר באופן שונה: לא כמלבן של 13 על 16, אלא כמלבן של 16 על 13 ונבטא את $\frac{16}{13}$ כשבר מעורב.

$$\frac{45}{16}=2+\frac{13}{16}=2+\frac{1}{\frac{16}{13}}=2+\frac{1}{1+\frac{3}{13}}$$

אנו רואים כי מהמלבן שמידותיו 16 על 13 ניתן לחתוך רק ריבוע אחד שצלעו 13, כך שנותר מלבן שמידותיו 3 על 13.

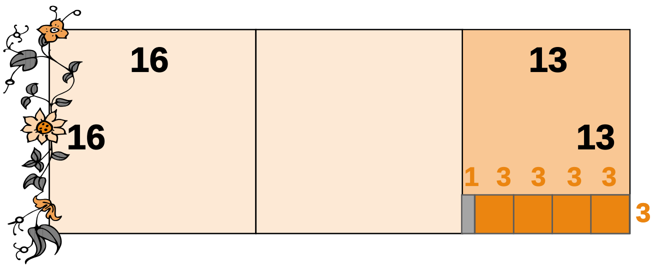


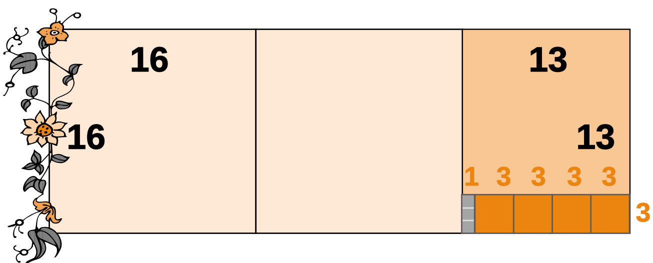
נחזור על התהליך. נתבונן על המלבן שמידותיו 3 על 13 כעל מלבן של 13 על 3.

$$\frac{45}{16}=2+\frac{1}{1+\frac{3}{13}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{13}{3}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{13}}}$$

ובאופן שקול, נקבל 4 ריבועים שצלעם 3 ויישאר מלבן שמידותיו 1 על 3.

נחזור על התהליך עד שנקבל שבר בעל מונה 1.





כעת, איננו יכולים להמשיך את התהליך.

קיבלנו את המספר המדויק של הריבועים במלבן, ללא כל שארית.

$$\frac{45}{16}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}}$$

קיבלנו:

2 ריבועים (16x16) ◻ 1 ריבוע (13x13) ◻

4 ריבועים (3x3) ◻ 3 ריבועים (1x1) ◼

הצורה הכללית של שבר משולב

נביע את השבר $\frac{P}{Q}$ (P ו- Q שלמים חיוביים) כשבר משולב באופן הבא:

$$\frac{P}{Q}=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\dots}}}$$

כאשר a,b,c ו- d הם שלמים חיוביים. אם $\frac{P}{Q}$ קטן מ-1, אזי a=0. נביע אותו כ- $\frac{1}{\frac{Q}{P}}$ כך שנוכל להציג את ההופכי לו, כלומר את $\frac{Q}{P}$ כמספר מעורב: שלם ועוד שבר הקטן מ-1, אותו שוב נוכל להביע באמצעות ההופכי לו. נכתוב את ההופכי כמספר מעורב. נחזור על התהליך עד שנקבל שבר בעל מונה 1. נמחיש אלגוריתם זה באמצעות דוגמה.

נתבונן ב- $\frac{7}{30}$. זהו שבר קטן מ-1 ולכן נתחיל כך:

$$\frac{7}{30} = 0 + \frac{1}{\frac{30}{7}} = 0 + \frac{1}{4+\frac{2}{7}} =$$

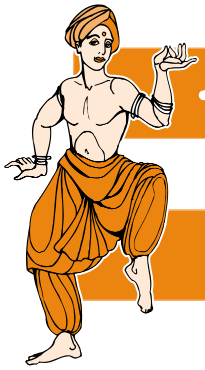
$$0 + \frac{1}{4+\frac{1}{\frac{7}{2}}} = 0 + \frac{1}{4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}$$

קיבלנו את $\frac{7}{30}$ כשבר משולב.

עוד ידידים למספרים

היינו רוצים מאוד להדביק את תלמידינו בחיבתו העזה של רמנוג'אן למספרים ולגרום להם לחוש תחושת נינוחות בחברתם. הנאתם עשויה להתעורר על-ידי עיסוק ב"בילוש" ובחקירה של מספרים. הנה הצעה: כל תלמיד יהפוך ל**"ידידו האישי של כל מספר טבעי"** (כפי שאמר על רמנוג'אן המתמטיקאי ג' א' ליטלווד). למשל, נוכל לבקש מהתלמידים להתבונן על מספר טבעי כלשהו, ולנסות לגלות בו תכונות ויחסים, אשר ייתכן שבחלקם ידועים להם. כדי לעזור להם אפשר להציג לתלמידים לשאול את עצמם, לדוגמה, את השאלות הבאות: האם המספר הוא זוגי או אי-זוגי? מהם מחלקיו? מהי מכפלתו? האם הוא ריבוע של מספר מסוים או שהוא סכום ריבועים של כמה מספרים? האם הוא שורש ריבועי של מספר מסוים? האם הוא שורש שלישי של מספר מסוים? האם הוא חזקה שלישית של מספר מסוים? האם הוא ראשוני? ועוד.

אם נחקור, לדוגמה, את המספר 25 נגלה בקלות שהוא מספר אי-זוגי, הוא ריבוע של המספר 5, הוא הסכום של הריבועים של שני מספרים:



$9=3^2$ $\quad$ $16=4^2$

$25=9+16$

ועוד שתי תכונות מעניינות:

$25=1+3+5+7+9$, $25=1+2+3+4+5+4+3+2+1$.

אפשר להמשיך ולחקור, למשל, אם נחקור את המספר 27 נגלה תכונה מעניינת: 27 מתחלק למספר הראשוני 3 וגם לריבועו - המספר 9.

אם מספר מתחלק למספר ראשוני וגם לריבועו של המספר הראשוני אז הוא נקרא **מספר חזק כשם העיתון שלנו**.

מספרים חזקים אחרים הם:

4, 8, 9, 16, 27, 32, 36, 49, 64.

{מקורות נבחרים}

ארבל, ב' (2005). **קיצור תולדות המתמטיקה**, הוצאת מכון מופ"ת.

פרוים, מ' (2005). ג'ירולומו קרדנו. **מספר חזק 2000**, 10, 41-36.

Berndt, B.C., & Rankin, R. A. (1985) *Ramanujan's notebooks*, New York: Springer-Verlag.

Berndt, B.C., & Rankin, R. A. (1995) Ramanujan: letters and commentary, *History of Mathematics*, vol. 9. Providence, RI: American Mathematical Society.

Berndt, B.C., & Rankin, R. A. (2001) Ramanujan: Essays and Surveys. *History of Mathematics*, vol. 22. London Mathematical Society.

Debnath, L. (1987). Srinivasa Ramanujan (1887-1920): a centennial tribute. *International journal of mathematical education in science and technology*, 18, 821-861.

Du Sautoy, M. (2003). *The music of the primes: searching to solve the greatest mystery in mathematics.* New York: Harper Collins.

Hardy, G. H., Seshu, P.V., & Aiyar (2000). *Collected papers of Srinivasa Ramanujan.* Providence, RI: Ams Chelsea Pub.

Hardy, G. H. (1999). *S.A. Ramanujan*: *Twelve lectures on subjects suggested by his life and work.* Providence, RI: Ams Chelsea Pub.

Kanigel, R. (1991). *The man who knew infinity*: *A life of the genius Ramanujan.* New York: Charles Scribner's Sons.

Kimberling, C. (1983). A visual Euclidean algorithm, *Mathematics Teacher,* 76, 108-109.