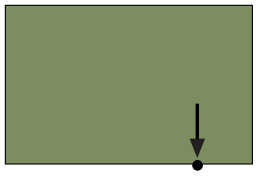
גיאומטריה מזווית אחרת

ג'רי רוזן

תכנית הלימודים החדשה לכיתות א-ו מדגישה את הקשרים שבין גיאומטריית המרחב לגיאומטריית המישור. על-פי רוח התכנית יש לבסס את הבנת המושגים הגיאומטריים באמצעות מפגש עם המושגים בהקשרים רחבים במישור ובמרחב. שימוש בנייר המייצג מישור, ובקיפולי נייר המאפשרים מעבר למרחב, יעיל מאוד להמחשת מושגים במישור ובמרחב. לדוגמה: האם ניסיתם פעם להעמיד דף נייר על צידו?
הצלחתם? אני כן.
במאמר זה אציג מספר פעילויות ובנוסף שיחות מחדר הכיתה, שבהן עסקו במושגים שונים בגיאומטריה במישור ובמרחב. וכולן בעקבות העמדת דף נייר על צידו.

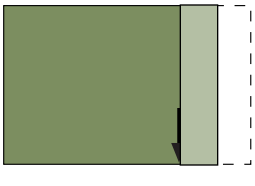
א. מהי זווית והשוואת זוויות

נתחיל מדף בגודל A4 .
נסמן נקודה אחת על אחת הצלעות הארוכות. (ראו איור 1 - הנקודה מסומנת בחץ.)



איור 1

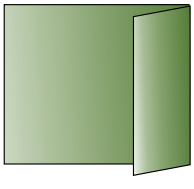
עכשיו נניח את קדקוד הזווית הישרה של המלבן (הקרובה ביותר לנקודה) על הנקודה שסימנו, ובעדינות ובדייקנות נשלים את הקיפול (ראו איור 2).



איור 2

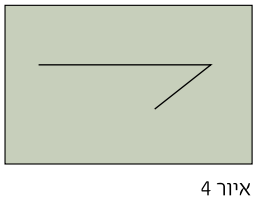
מהי הטרנספורמציה שביצענו שבעזרתה השתנה מצבו של דף הנייר מהמצב הראשון למצב השני?

קיפול הנייר שבוצע כדי להעביר את הדף מהמצב הראשון למצב השני גרם לשוליים של הדף לצאת מהמישור של הדף וליצור ממד שלישי. הטרנספורמציה שבוצעה היא סיבוב סביב ציר שהוא קו הקיפול. אם נחזיר את הדף מהמצב השני למצב הראשון נוכל לשאול מהו גודל הסיבוב. ביצענו חצי סיבוב, כלומר, 180^0.
תנועה זו דומה לפתיחה ולסגירה של דלת או להעברת דפי ספר.
אם לא נחזור למצב הראשון, נוכל להעמיד את דף הנייר על צידו כפי שרואים באיור 3.

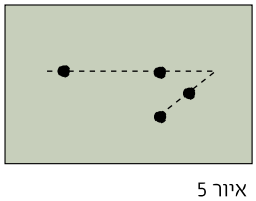


איור 3

עכשיו נעמיד את הדף המקופל על דף אחר. אם יש רוח או מישהו יתעטש, הדף המקופל עלול לזוז ממקומו. לכן, נבקש מהתלמידים למצוא דרך לסמן את מקומו המדויק של הדף המקופל על דף הנייר האחר, כך שניתן יהיה להחזיר אותו בדיוק למקומו.
כאשר ניסיתי את הפעילות עם תלמידים קיבלתי את שתי ההצעות הבאות:
1 - ציור ישרים (ראו איור 4).
2 - סימון ארבע נקודות (ראו איור 5).



איור 4

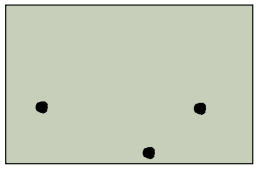


איור 5

ניסינו לבדוק בכיתה אם יש הבדל בין שתי ההצעות. ביקשתי מהתלמידים לסרטט בעזרת סרגל וארבע הנקודות את שני הישרים, מבלי שיניחו את הדף המקופל על הדף הנוסף. להפתעת התלמידים הם קיבלו סרטוט דומה לסרטוט של התלמידים שסרטטו מהתחלה את שני הישרים.

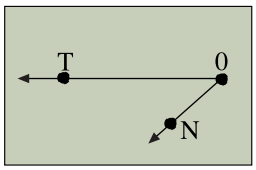
נשאלת השאלה - **האם יש דרך נוספת לסמן את המקום המדויק של הדף המקופל ?**

התשובה היא כן. אפשר לעשות זאת בעזרת שלוש נקודות בלבד. אחת בדיוק במקום של קו הקיפול, נקודה נוספת במיקום של הצלע "המסתובבת" של המלבן "המסתובב" ונקודה שלישית במיקום של הצלע "היציבה" במלבן שאיננו מסתובב. (ראו איור 6).



איור 6

נסמן את הנקודה הראשונה באות O. ואת שתי הנקודות הנוספות באותיות N ו- T. נעביר קרניים היוצאות מנקודה O ועוברות דרך נקודות T ו- N (ראו איור 7).



איור 7

למעשה ציירנו זווית. נקודה O נקראת קדקוד הזווית והנקודות T ו- N נמצאות על הקרניים של הזווית. ניתן לקרוא לזווית בשמות: $\measuredangle$ O או $\measuredangle$ TON, או $\measuredangle$ NOT.

נבקש מהתלמידים לרשום את שמם על הנייר ולאחר מכן לבצע פעולות השוואה בקבוצה:

- למי היה הדף הפתוח ביותר?
- למי היה הדף הסגור ביותר?
- מה הקשר בין גודל הזווית לדף הפתוח יותר ולדף הסגור יותר?

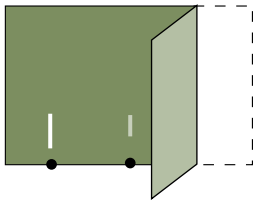
נבקש מהתלמידים להציע דרכים שונות להשוואת גודל הזוויות ללא מדידה במד-זווית. (יש להניח שאחת הדרכים תהיה בעזרת ההשוואה העוסקת בדף הפתוח יותר או הסגור יותר.)

נבקש שיסדרו את הזוויות שהתקבלו בקבוצה לפי סדר הגודל ורק לאחר מכן נבדוק בעזרת מד-זווית.

הערה: המפגש עם הזווית בדרך זו הוא דרך גודל סיבוב. דרך זו ממחישה לתלמידים בצורה ברורה שגודל הזווית אינו תלוי באורך הקרניים.

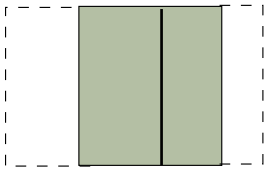
ב. תנאים לבניית משולש

ניקח שוב את הדף המקופל. נסמן נקודה נוספת על אותה צלע שסימנו בה את הנקודה הראשונה. (ראו איור 8, הנקודות מסומנות בחיצים).



איור 8

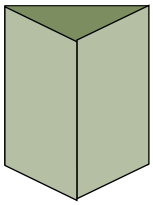
הפעם נקפל את צידו השני של הדף כך שציר הקיפול יעבור דרך הנקודה החדשה שסימנו (איור 9). שימו לב, בפעם הקודמת קיפלנו עד לנקודה הראשונה וציר הקיפול נוצר בין קצה הדף לנקודה שסומנה.



איור 9

האם ניתן להפגיש את שני הקצוות של הדף על-ידי קיפול זה? אם הם לא נפגשים נסו לשנות את מיקום הנקודה כך ששני קצוות הדף ייפגשו.

מה היו השיקולים שלכם במיקום הנקודה החדשה?
אם שני הקצוות נפגשו ייתכנו שני המצבים הבאים (איור 10): צורה שטוחה או מעטפת של מנסרה.



איור 10

כאשר הצורה שטוחה מה אנחנו יודעים על המרחק בין הקצוות המקופלים? (שווים למחצית אורך הצלע הארוכה של הדף המקורי), וכדי שנקבל תמיד מנסרה נצטרך לדאוג שהמרחק בין הקיפולים יהיה קטן ממחצית אורך הצלע הארוכה של הדף המקורי.

איך התנאי הזה לבניית מנסרה משולשת, מתקשר לתנאים הדרושים לבניית משולש משולשה קטעים נתונים?

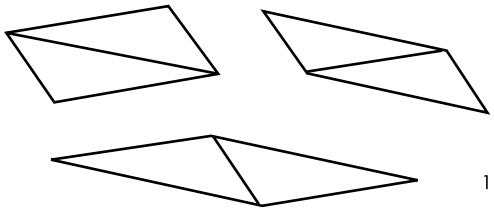
את מעטפת המנסרה נדביק עם נייר דבק ונעמיד אותה על נייר נוסף. נסמן את קדקודי המשולש ונחבר את הקדקודים בקווים ישרים. נבקש מהתלמידים להשוות את הסרטוטים בקבוצה. הפעם התקבלו משולשים שונים.
נבקש מהתלמידים למיין את המשולשים לקבוצות שונות. האם יש סוגי משולשים שלא התקבלו בסרטוטים? נסו לקבל את כל סוגי המשולשים.

ג. חקירת המנסרה

נסדר את כל המנסרות שהתקבלו ונבקש מהתלמידים למצוא תכונה משותפת לכל המנסרות שבכיתה. יש שלוש תכונות כאלו: אותו גובה, אותו היקף לבסיס, אותו שטח מעטפת. נשוחח בכיתה על השוני שבין מנסרה למנסרה.

ד. בניית מקביליות

הניחו את המנסרה בחזרה על המשולש שמסומן על הנייר. העבירו את המנסרה למקום חדש בתנאי שהמנסרה תהיה מונחת על אחת הצלעות של המשולש הקודם. זו תהיה צלע המתלכדת עם הצלע של המשולש הקודם (ראו איור 11).
קיבלתם מקבילית. האם יש יותר מדרך אחת לקבל מקבילית? נמקו מדוע המרובע שהתקבל בכל המקרים הוא מקבילית.

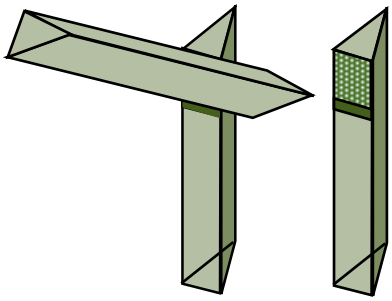


איור 11

שני המשולשים ביחד יצרו צורה חדשה שהיא מקבילית. נסו ליצור מקביליות אחרות בעזרת המנסרה שלכם. מה הן התכונות של המקבילית שיצרתם? (צלעות נגדיות מקבילות ושוות זו לזו, זוויות נגדיות שוות זו לזו.) האם תכונות אלה נכונות לכל מקבילית או רק למקבילית שיצרתם? אילו צורות תקבלו אם לפני שמעבירים את המנסרה למקום החדש הופכים אותה? (תקבלו דלתונים).
מה הן התכונות של הדלתונים? (שני זוגות של צלעות סמוכות שוות זו לזו, זוג זוויות נגדיות שוות זו לזו, אלכסון אחד חוצה את הזוויות.) האם התכונות נכונות לכל דלתון או רק לדלתון שיצרתם?

ה. בחזרה למרחב (מהריבוע לפירמידות)

ניקח שתי מנסרות זהות ונניח את אחת הפאות של אחת המנסרות על קצה הפאה החופפת לה. (של המנסרה השנייה) בצורת T, ונסמן עם עיפרון קו ישר. (ראו איור 12)



איור 12

נוצר מרובע. מהו המרובע? (ריבוע, כי כל הצלעות שוות וגם כל הזוויות שוות.) נמשיך לצייר עוד ריבועים לכל אורך הפאה. נניח את המנסרה על הפאה שעליה שורטטו הריבועים.
על הפאה הקרובה אלינו נצייר משולשים שווי-שוקיים שבסיסם הוא צלע הריבוע.
נחזור על סרטוט משולשים שווי-שוקיים בפאה השלישית. אם נעמיד את המנסרה במקום שיש בו אור, נוכל לראות פירמידות מרובעות שבסיסן ריבוע וארבע פאותיהן משולשים שווי-שוקיים (ראו איור 13).

איור 13

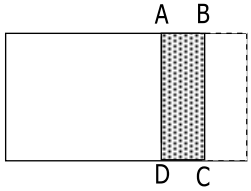
בסרטוט גם מסתתרות פירמידות משולשות (ארבעונים). מצאו אותן.

הפעילויות שהוצגו לעיל מזמנות לתלמידים התנסות אינטואיטיבית במושגים גיאומטריים במישור ובמרחב. את ההתנסות חשוב ללוות בשיחה שתזמן קישורים בין ההתנסות האינטואיטיבית למתמטיקה הפורמלית. להלן דוגמה לשיחה כזאת.

שיחה מחדר הכיתה

מיד לאחר שהמורה חילק את דף הנייר.

המורה: "מהי צורת הדף שקיבלתם ?"
גליה: "מלבן".
המורה: "איך אנו יודעים?"
ליאור: " יש לו 4 זוויות ישרות."
המורה: "אני מבקש שתסמנו נקודה על אחת הצלעות הארוכות."
המורה הסתובב בכיתה על מנת לבדוק שכולם סימנו את הנקודה במקום הנכון.
המורה: "עכשיו הניחו את קדקוד המלבן על הנקודה שסימנתם ובעדינות ובדייקנות השלימו את הקיפול.
המורה: (מצביע על החלק האחורי של הדף המקופל (החלק הצבוע באפור באיור 2) ושואל: "מהי הצורה שהתקבלה כאן?"
סנדרה: "גם מלבן."
המורה: "איך אנחנו יודעים?"
סנדרה: "גם לו יש 4 זוויות ישרות."
המורה מבקש מסנדרה לבוא ללוח ולסמן את הזוויות הישרות.
סנדרה מראה על הקדקודים A, B, C, D בפינות המלבן (איור 14).
(המורה מסמן אותם באותיות.)



איור 14

המורה: "אנחנו יודעים שזוויות A ו- D ישרות כי...?"
לואיז: "אלה הפינות של המלבן המקורי."
המורה: "וזווית C ישרה כי...?"
אדם: "קיפלנו את הקדקוד D והנחנו אותו בדיוק על הצלע של המלבן ואז חצינו את הזווית השטוחה (מראה על הזווית השטוחה שקדקודה C). חצי זווית שטוחה היא זווית ישרה."
המורה: "ומה בקשר לזווית B?"
זואי: "בדיוק אותו דבר רק עם קדקוד A. לכן גם זה חוצה זווית שטוחה שקדקודה B."
המורה: "יש למישהו הסבר נוסף?"
ליה: "הראנו שזוויות A, D ו- C הן זוויות ישרות וסכום הזוויות במרובע שווה לסכום של 4 זוית ישרות. לכן זווית B חייבת להיות גם היא זווית ישרה."
המורה: "הצעה נוספת?"
עירד: "הראנו שזוויות D ו- C הן זוויות ישרות לכן AD מקביל ל- BC. בנוסף DC ו- AB מקבילים זה לזה, כי הדף המקורי היה מלבן. לכן, ABCD היא מקבילית. במקבילית הזוויות הנגדיות שוות זו לזו. לכן גם זווית B היא זוויות ישרה."
המורה: "נימוקים מצוינים ואני שמח שאתם מסוגלים לתת מספר נימוקים שמשכנעים אותנו שזווית B היא זווית ישרה. יש נימוקים נוספים אבל נסתפק באלו שנתתם בשלב זה".

סיכום

בפעילות זו, המבוססת על קיפולים פשוטים שכל ילד יכול לעשות, יצרנו בעזרת קיפול אחד של דף נייר הסתכלות המעבירה אותנו מדו-ממד לתלת-ממד. הסתכלות זו אפשרה לתלמידים לראות את הקשרים שבין המושגים הנלמדים במישור לגופים במרחב. כדי לבחון תכונות עברנו דרך צורות שונות במישור לגופים תלת-ממדים במרחב, ובדרך זו ניסינו ליצור משמעות רחבה יותר למושגים הגיאומטריים.
תקוותי שהצלחתי במאמר זה לפתוח אשנב קטן שיאפשר לקוראים להביט דרכו ולבחון בצורה פשוטה את העולם הנפלא והעשיר של צורות תלת-ממדיות במרחב.

על מחבר המאמר:

ג'רי (גרשון) רוזן

M.A. במתמטיקה. מורה למתמטיקה כ-40 שנה. מתוכן כ-30 שנה בבית חינוך גליל מערבי ו-10 שנים באנגליה. תלמידיו מכל הגילאים: ילדי גן, יסודי, תיכון, מורים וסטודנטים באוניברסיטה. כתב הרבה חומרי למידה. בין השאר חוברות הגיאומטריה של חוליות בהוצאת מכון וייצמן ופעילויות "חומשי-רוח המתמטיקה" שהתפרסמו במקומות שונים. הופיע בכנסים בינלאומיים ופרסם מאמרים בארץ ובעולם בנושאים שונים הקשורים להוראת המתמטיקה.