מבנים שחוזרים על עצמם בהוראת החשבון

אנה ליפוביצקי

"ביסוד התכנית מונחת התפיסה הבאה: התלמידים אמורים לרכוש מושגים ומבנים בחשבון ובגאומטריה, ולפתח מיומנויות וכישורים בנושאים הנלמדים." (מתוך תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים, משרד החינוך, התרבות והספורט, תשס"ז.)

כאשר נחשפתי לראשונה לשורות אלו מתוך תכנית הלימודים במתמטיקה, לא הצלחתי לרדת לסוף דעתם של המחברים ולהבין את מהות היסוד הרעיוני העומד מאחורי גיבוש תכנית הלימודים הנוכחית, הבא לידי ביטוי במשפט זה. הרעיון של מבנים בחשבון ובגאומטריה היה חדש עבורי, ורק בעקבות שאלה שגרתית, שנשאלתי על-ידי אחת המורות, הצלחתי להבהיר לעצמי את משמעות המשפט והרעיון.

השאלה עסקה בנושא "חיסור עם שבירת עשרת" או בהיבט רחב יותר - "שיטת הפריטה". כדי להסביר את הנושא למורה הצגתי בפניה דוגמה לתרגיל, ומספר אפשרויות לדרכי פתרונו. כל האפשרויות הוצגו למורה בצורה מתמטית פורמלית. תלמידים המשתמשים באסטרטגיות אלה מפרקים את המספרים בדרך אינטואיטיבית, על סמך היכרותם עם הרכבים שונים של המספרים, וברור שאינם כותבים את שלבי העבודה בצורה פורמלית, כפי שכתבתי אני בשעת שיחתי עם המורה. להלן התרגיל והדוגמאות לדרכי פתרונו.

התרגיל: 12-5=?

דרכי פתרון אפשריות:

12-5=12-2-3=7

12-5=10-5+2=7

12-5=(12+5)-(5+5)=17-10=7

12-5=(5+5+2)-5=(5+2)=7

בתגובה לדוגמאות שהצגתי בפני המורה היא טענה כי הדרך שבה מפרקים את המספרים מסובכת לתלמידים, וכי היא מעדיפה להציג בפניהם תבנית, שבעזרתה התלמידים יוכלו ללמוד בעל-פה את הקשר שבין המספרים 5,7 ו- 12. לדעתה, זו תהיה הדרך היעילה ביותר עבור התלמידים להתמודד עם תרגיל מסוג זה כשייתקלו בו בעתיד.

בניסיונותיי לשכנע את אותה המורה, מצאתי את עצמי חוזרת במילים פשוטות יותר על אותו הרעיון המוצג בציטוט שבראש המאמר. לדעתי, שיטת שינון התבניות המציגות קשר בין שלושה מספרים אכן תועיל לתלמידים בפתרון תרגילים זהים. אולם, אם יעבדו רק בשיטה זו יפסידו רובד חשוב (אולי אפילו חשוב יותר מידיעת העובדות בעל-פה), בפיתוח התובנה המספרית שלהם. מהות פירוק מספרים מהווה, לדעתי, תשתית לרעיון הפריטה. הבנת הרובד הרעיוני מאחורי "שיטת הפריטה", שהוצג בדוגמה לעיל, היא הרבה יותר מעבר לפתרון אותו תרגיל חיסור פשוט. ההבנה המהותית של השיטה משליכה, למעשה, על שלל נושאים מסובכים הרבה יותר, שבהם עתידים התלמידים לעסוק בכיתות גבוהות יותר.

להלן אציג מספר דוגמאות של תרגילים מנושאים מורכבים יחסית הנלמדים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי, אולם לצורך פתרונם נשתמש בשיטה הזהה במהותה לשיטת הפריטה, שבאמצעותה פתרנו את תרגיל החיסור המוצג לעיל. כדי לראות את הדמיון במהות פתרון התרגילים אציג בכל אחת מהדוגמאות את דרכי הפתרון האפשריות מול דרכי הפתרון האפשריות לתרגיל שהוצג לעיל: 5-12.

תרגיל חיסור עם פריטה בשברים פשוטים $1\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=$

שימו לב לדמיון בשיטת הפתרון לתרגיל הקודם שהוצג, למרות ההבדל בקושי ובמורכבות החומר.

$12-5=12-2-3=7$	$1\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=1\frac{2}{7}-\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

בתרגיל החיסור בשלמים חיסרנו קודם 2 על מנת להגיע לנקודת אחיזה מוכרת ובטוחה, שהיא 10. לאחר מכן חיסרנו את מה שנשאר לחסר: 3. גם בתרגיל השברים חיסרנו דבר ראשון $\frac{2}{7}$ כדי להגיע לנקודת אחיזה בטוחה ומוכרת - מספר שלם, ומהמספר השלם חיסרנו את מה שנותר לחסר: $\frac{3}{7}$.

$12-5=10-5+2=7$	$1\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=1-\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

מאחר ואי-אפשר לחסר 5 יחידות מ- 2 יחידות, מחסרים את 5 היחידות מ- 10 ולהפרש (5) מוסיפים את 2 היחידות שנשארו במחוסר. גם את $\frac{5}{7}$ אי-אפשר לחסר מ-$\frac{2}{7}$. לכן, מחסרים את $\frac{5}{7}$ מהשלם (1), ולהפרש ($\frac{2}{7}$) מוסיפים את $\frac{2}{7}$ שנשארו במחוסר, ומקבלים $\frac{4}{7}$.

$12-5=(12+5)-(5+5)=17-10=7$	$1\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=(1\frac{2}{7}+\frac{2}{7})-(\frac{5}{7}+\frac{2}{7})=1\frac{4}{7}-1=\frac{4}{7}$

בשיטה זו מגדילים את המחוסר והמחסר באותה מידה, על-מנת לקבל מחסר שהוא נוח לחיסור. ההגדלה שומרת על ההפרש, וגם מאפשרת חישוב נוח המבוסס על עובדות ידועות. בתרגיל בשלמים, שני המספרים הוגדלו ב- 5, כדי לקבל מחסר 10. וכתוצאה מכך התקבל התרגיל: 17-10 שהוא קל לפתרון. בתרגיל בשברים הגדילו את המחוסר והמחסר ב $\frac{2}{7}$, כדי לקבל מחסר 1. כתוצאה מכך התקבל התרגיל: $1\frac{4}{7}-1$ שגם הוא קל לפתרון.

$12-5=(5+5+2)-5=(5+2)=7$	$1\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=(\frac{5}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7})-\frac{5}{7}=(\frac{2}{7}+\frac{2}{7})=\frac{4}{7}$

בשיטה זו מפרקים את המחוסר (12) לשלושה מספרים. אחד מהם שווה למחסר (5), השני (5) משלים לנקודת אחיזה נוחה - העשרת הקרובה, והשלישי הוא המשלים למחוסר (2). בהסתמך על העובדה שכל מספר פחות עצמו הוא 0, קל לחסר את המחסר (5-5). לכן, ההפרש יהיה סכום חלקי המחוסר הנותרים(5+2). באותה אסטרטגיה פועלים בחיסור השברים: מפרקים את $1\frac{2}{7}$ לשלושה מספרים. $\frac{5}{7}$, השני $\frac{2}{7}$ (משלים לנקודת אחיזה נוחה, שהיא השלם), והשלישי $\frac{2}{7}$, כאשר מחסרים את $\frac{5}{7}$ נשאר $\frac{4}{7}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}$.

תרגיל דומה בחיסור מספרים עשרוניים

1.2-0.5=1.2-0.2-0.3=0.7
1.2-0.5=1-0.5+0.2=0.7
1.2-0.5=(1.2+0.5)-(0.5+0.5)=1.7-1=0.7
1.2-0.5=(0.5+0.5+0.2)-0.5=0.5+0.2=0.7

דוגמה נוספת לשימוש בתובנה שנרכשת בכיתה נמוכה, ומשמשת את התלמיד גם בפתרון תרגילים מסובכים יותר בכיתות הגבוהות, היא הבנת מהות ה"חילוק להכלה".

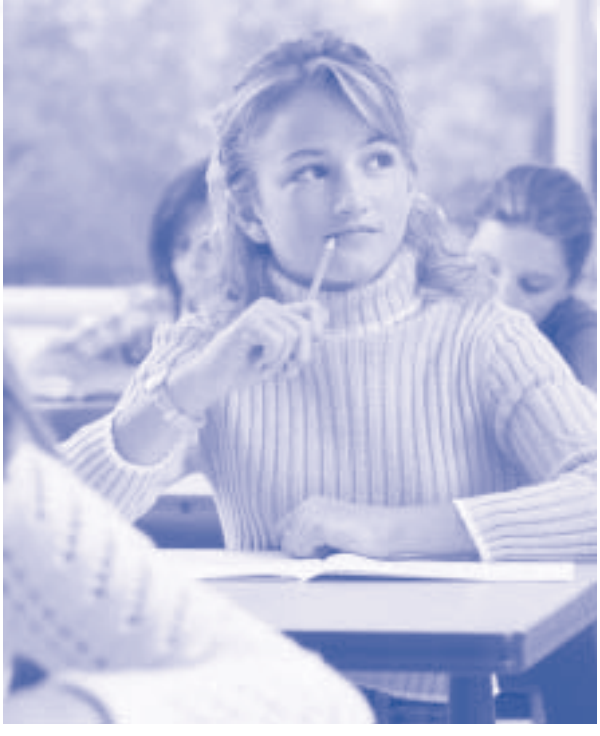
התרגיל 0.8 : 0.4 = 2

יהיה פשוט בהרבה להבנה, אם התלמיד יפנים את עיקרון החילוק להכלה, ויבין שמדובר פה, למעשה, בשאלה של כמה פעמים 'נכנסות' 4 עשיריות ב- 8 עשיריות (התשובה, כאמור, תהיה המספר 2 והכינוי עשיריות ייעלם).

הבנה זו זהה להבנת השאלה: "כמה מוניות צריך להזמין, כדי להסיע שמונה ילדים לחוג, אם בכל מונית אפשר להסיע ארבעה ילדים?" למעשה, השאלה הנשאלת היא: כמה פעמים נכנסת קבוצה של 4 ילדים בקבוצה של 8 ילדים. אמנם בתרגיל החילוק היה מדובר בעשיריות, ובשאלה השנייה מדובר בילדים, אבל עיקרון ה"חילוק להכלה" נשמר. אותו עיקרון ישמש את התלמידים גם בפתרון תרגילי חילוק בשברים פשוטים ועוד.

לנוכח הדוגמאות המוצגות לעיל מסקנתי היא, שיש חשיבות רבה להבנת והפנמת המבנים המתמטיים עוד בכיתות הנמוכות, על-פני שינון של תרגילים ותשובות, וזאת לצורך הבנת נושאים מסובכים יותר בהמשך לימודי המתמטיקה. מסקנתי זו חוזרת בעצם במילים פשוטות על הרציונל שעמד לפני המחברים של תכנית הלימודים המובא בציטוט בראש המאמר.

לסיכום, יש חשיבות רבה להקניית מושגים מתמטיים לתלמידי הכיתות הנמוכות. הבנת מושגים מורכבים הנלמדים בכיתות הגבוהות מחייבת הבנה אמיתית ומהותית של מושגי היסוד הנלמדים בכיתות הנמוכות ומסתמכת עליהם. לכן, קיימת חשיבות רבה לאופן הקניית מושגי יסוד אלו לתלמידי הכיתות הנמוכות. מושגים הנבנים בצורה משמעותית כבר בפעולות פשוטות, יוכלו להוות את הבסיס להפנמתם והחלתם על פעולות מורכבות יותר. ההוראה בכיתות הגבוהות תהיה משמעותית יותר אם נוכל לקשר ולהראות אנלוגיות לדרכי פעולה, למבנים ולמושגים שנבנו בכיתות הנמוכות.



מקורות

לימוד השפה המתמטית ב"טווח ההתפתחות האפשרית הקרובה"
D.F.Steel.(1999) Learning Mathematical Language in the Zone of Proximal Development .*Teaching children mathematics*,Vol.6,No.1,pp.38-42
תרגום: ברכה סגליס, אתר מרכז מורים ארצי למתמטיקה.

על מחברת המאמר:

אנה ליפוביצקי

בעלת תואר שני בהוראת המתמטיקה. מורה בבית ספר "נוף גליל" בקיבוץ פרוד, מדריכת מתמטיקה בבתי ספר יסודיים בעכו ובצפת ומנחה בהשתלמויות מורים.