מי צריך עוד סימן התחלקות ב-11?

מיכאל קורן

סימן ההתחלקות ב- 11, המוכר בדרך כלל, הוא חיבור וחיסור לסירוגין של ספרות המספר ובדיקה האם הסכום שהתקבל מתחלק ב-11. כך לדוגמה, כדי לבדוק אם המספר 2651 מתחלק ב- 11 נחשב 2-6+5-1, ומאחר שנקבל 0, ואפס מתחלק ב-11, הרי שגם 2651 מתחלק ב-11. (ראו למשל במספר חזק 2000, גיליון 11, עמ' 5.)
נעיר כאן שכדי להשתמש בסימן התחלקות זה אין צורך לדעת לחבר ולחסר מספרים שליליים, כי אפשר גם לחבר את הספרות במקומות האי-זוגיים, לחבר את הספרות במקומות הזוגיים, ואז להסתכל על ההפרש שבין הסכומים (של הסכום הגדול פחות הסכום הקטן). אם ההפרש מתחלק ב- 11 אז המספר הנבדק מתחלק ב- 11 (ואם ההפרש אינו מתחלק ב- 11, אז המספר הנבדק אינו מתחלק ב- 11).
חסרונו של סימן התחלקות זה הוא שהוכחתו מסובכת ודורשת הבנה של "שאריות שליליות".

במאמר זה נציג סימן התחלקות פחות מוכר להתחלקות ב- 11, שהוכחתו דומה להוכחת סימני ההתחלקות ב- 9 וב- 3. הוכחת סימן ההתחלקות ב- 9 מסתמכת על כך שבחלוקת 10, או 100, או 1000 וכו' ב- 9, השארית היא תמיד 1 (בניסוח אחר: כשמחלקים חזקה של 10 ב- 9 השארית היא 1). ולכן, אם נתון, למשל, המספר 3571 ורוצים למצוא את השארית שלו בחלוקה ב- 9, נוכל לרשום את 3571 בצורה הבאה:

$$3571=3\times1000+5\times100+7\times10+1$$

נחליף את 1000 ב- 1+999 ואת 100 ב- 1+99 ואת 10 ב- 1+9 ונקבל:

$$3571=3\times(999+1)+5\times(99+1)+7\times(9+1)+1=$$
$$=3\times999+3+5\times99+5+7\times9+7$$

נשנה את סדר המחוברים ונקבל:

$$3571=3\times999+5\times99+7\times9+(1+3+5+7)=$$
$$=9\times(3\times111+5\times11+7)+(1+3+5+7)$$

מאחר והביטוי בסוגריים הראשונים מוכפל ב-9 , ברור שהוא מתחלק ב-9. נשאר לבדוק רק את הסכום השני, 1+7+5+3 שהוא סכום הספרות של 3571. סכום זה הוא 16, ולכן בחלוקה ב-9 השארית (שלו ושל המספר כולו) היא 7.
יתרון נוסף של סימן ההתחלקות ב-11, הדומה לסימן ההתחלקות ב-9, שהוא משמש גם כסימן שארית. כלומר, בניגוד לסימן ההתחלקות המקובל ב-11, לאחר הבדיקה, אם מסתבר שהמספר הנבדק אינו מתחלק ב-11, נוכל לדעת את השארית המתקבלת בחלוקה ב-11. נעיר כי זו תכונה של רוב סימני ההתחלקות, וחבל שהם נקראים סימני התחלקות, ולא **סימני שארית**.

נתחיל בתיאור הסימן ובכמה דוגמאות, לפני שניגש להוכחה של הסימן. כדי לבדוק את השארית שתתקבל בחלוקת מספר ב- 11 מפרידים את המספר לזוגות, מימין לשמאל. אם במספר הנבדק יש מספר אי-זוגי של ספרות, הרי שבסוף המספר נשארת ספרה יחידה. כל זוג הוא מספר דו-ספרתי והספרה הבודדת שנשארה היא מספר חד-ספרתי. מחברים את הזוגות המתקבלים (כמספרים דו ספרתיים) - ביחד עם המספר החד-ספרתי, אם יש כזה. בודקים את הסכום: אם הוא מתחלק ב- 11, אז המספר הנבדק מתחלק ב- 11; אם מתקבלת שארית אז היא אותה שארית המתקבלת בחלוקת המספר הנבדק ב- 11.

דוגמה: נבדוק את השארית של המספר 35,128 בחלוקה ב-11.
בחלוקת המספר לזוגות נקבל את הזוגות 28 ו- 51 ואת המספר 3. הסכום המתקבל הוא 28+51+3=82. ומאחר והשארית בחלוקת 82 ב- 11 היא 5 (82-77), גם השארית בחלוקת 35,128 ב-11 היא 5.

דוגמה נוספת: 21,521,731 מתחלק ב-11 כי:
121=21+52+17+31 המתחלק ב- 11. (אם איננו מזהים את 121 כמספר המתחלק ב-11, אנחנו יכולים לחזור על התהליך ולבדוק את 121 באותה דרך, 21+1=22)

הצדקת סימן ההתחלקות ב- 11

קל לבדוק כי בחילוק של 100 ב- 11 השארית היא 1, וגם בחילוק של 10,000 ב-11 השארית היא 1, ובאופן כללי, כשמחלקים חזקה זוגית של 10 ב-11, השארית היא 1. זו לא תהיה השארית של 10, 1000, 100,000 וכל שאר החזקות האי-זוגיות של 10 בחלוקה ב- 11. ולכן אם נרצה לבדוק התחלקות (או שארית) של 3571 בחילוק ב- 11, נשתמש רק בחזקות הזוגיות של 10.
נרשום:

$$3,571=35\times100+71=35\times(99+1)+71=35\times99+35+71$$

99 הוא כפולה של 11 ולכן, 35×99 מתחלק ב- 11. לכן, יש לבדוק את 106=35+71 אם הוא מתחלק ב- 11.
נחסר 99 מ- 106 נגלה שהשארית היא 7 . דרך אחרת היא להפעיל על 106 את סימן השארית: 6+1=7

דוגמה נוספת: נבדוק התחלקות ב- 11 של: 21,321,541

$$21,321,541=21\times1,000,000+32\times10,000+15\times100+41=$$
$$=21\times(999,999+1)+32\times(9,999+1)+15\times(99+1)+41=$$
$$=21\times999,999+21+32\times9,999+32+15\times99+15+41=$$
$$=21\times999,999+32\times9,999+15\times99+(21+32+15+41)=$$

$21\times999,999+32\times9,999+15\times99$ מתחלק ב-11 (כי: 999,999 9,999 וגם 99 מתחלקים ב-11). נשאר לבדוק את סכום זוגות המספרים 21+32+15+41=109 השארית בחלוקת 109 ב-11 היא 10, (109-99), או אם נפעיל שוב את סימן השארית נקבל 09+1=10.

למעשה, אין צורך לחשב את סכום הזוגות, אלא בדרך להפחית 11, או כפולה של 11, מכל מחובר בכל שלב בחיבור. כך, למשל, עבור 21+32+15+41 נוכל למשל לחסר מכל מחובר: 21-11=10 , 32-22=10 , 15-11=4 , 41-33=8

נחבר את תוצאות החיסור ונקבל: 10+10+4+8=32
נחסר מהתוצאה כפולה של 11: 32-22=10.
כלומר, שארית 10 בחלוקה ב-11 של המספר הנבדק. כמובן שההחלטה מתי, ואיזו כפולה של 11 נוריד בכל שלב, תתקבל לפי הנוחיות, ואין דרך אחת שהיא הנוחה ביותר. כך, למשל, אולי קל יותר להוריד 11 מ- 41 מאשר להוריד 33.
ואז נקבל:
10+10+4+30=54
כלומר, שארית 10 בחלוקה ב- 11 (54-44=10).

הערה: אם "החיבור החלקי" מזכיר לחלק מהקוראים חיבור מודולו 11, אין זה מקרה, שכן בחיפוש שארית אפשר תמיד להיעזר בחיבור מודולו המחלק.

ואתגר לקוראים, הזוכרים כתיבת מספרים בבסיסים שונים מ- 10: להוכיח לעצמם שסימן השארית ב-11 מתקיים בכל בסיס.
כך למשל בבסיס 6, 154_6 מתחלק ב- 11_6 כי $54_6+1_6=55_6$ מתחלק ב-11_6 (בדיקה: תרגיל החילוק בשיטה העשרונית הוא 70:7)

על מחבר המאמר:

ד"ר מיכאל קורן

מרצה במכללת סמינר הקיבוצים.