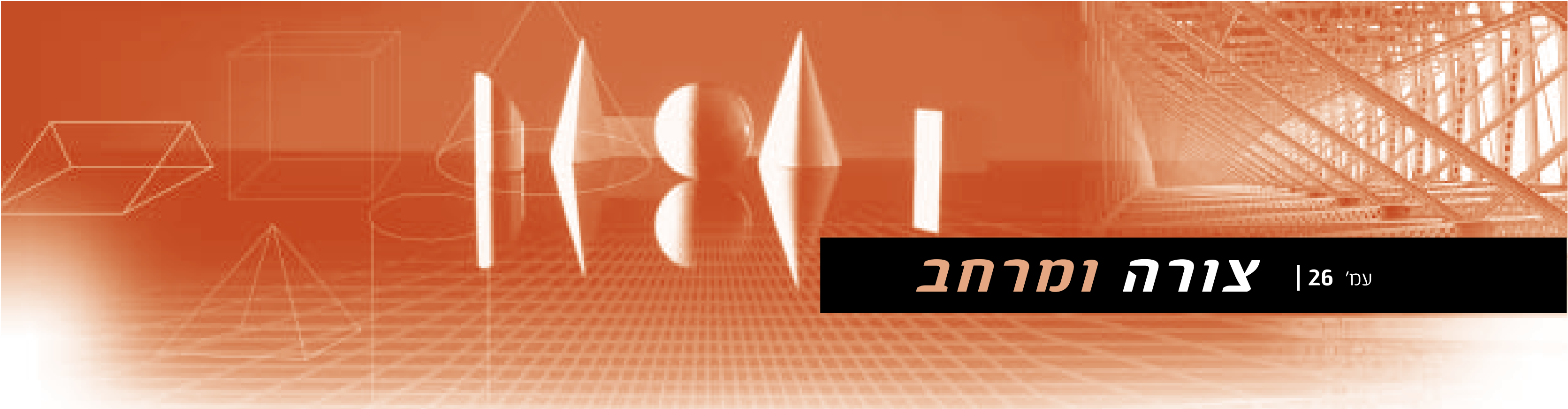


פיתוח ראייה מרחבית בקרב תלמידי בית ספר יסודי בעזרת צורות בלתי אפשריות

א. שיריאקוב, ט. קופריאנץ, א. גרידין.
תרגום: חנה פודלקו וציפי פלנר

ההיחשפות לשאלות אתגריות ובלתי שגרתיות חשוב בהוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי. הדבר מאפשר האצת הפעילות השכלית, הרחבה, העמקה וחיזוק של הידע המתמטי.
בכיתות הגבוהות התלמידים יעסקו באקסיומות ומשפטים של הגיאומטריה המרחבית, יצטרכו להדגים אותם בסרטוטים מתאימים ולהבין סרטוטים נתונים, לדוגמה, בסרטוטים של פאונים וחתכיהם.
כדי "לראות" את הפאון בסרטוט, להבין את הנתונים ולהסיק מסקנות מהסרטוט, על התלמידים לפתח את הראייה המרחבית החל מלימודיהם בבית הספר היסודי.
במאמר זה נדגים דרך לפיתוח ראייה מרחבית אצל התלמידים הצעירים על-ידי שימוש בצורות בלתי אפשריות.
המאמר מבוסס על מחקר שנעשה על-ידי שיריאקוב ותלמידיו ותורגם מגרסת טיוטה. לפניכם חלק מהמחקר שנעשה בשיעורי מתמטיקה במסגרת בית ספר יסודי. במחקר השתתפו כ-50 תלמידים מכיתות ג ו- ד.

הגדרת מושגים

צורה* בלתי אפשרית היא אשליה אופטית. צורה כזו היא ציור על נייר הנראה כציור דו-ממדי של האובייקט התלת-ממדי, אך בהתבוננות מעמיקה רואים כי קיימים חיבורים בלתי אפשריים בין חלקי הצורה.
דמיון הוא פעילות מנטלית, המורכבת מיצירת דמויות מנטליות ומצבים מחשבתיים, שלא נחווים בשלמותם במציאות.
דמות מנטלית היא דימוי של עצם או תופעה שנקלט במוחנו לאחר עיבוד הנתונים שהתקבלו, וגם דימוי שנוצר על-ידי הכללות עצמאיות לאחר לימוד. דמות מנטלית היא הרישום החזותי של המושג שהתקבל בתוכנו באמצעות החושים.

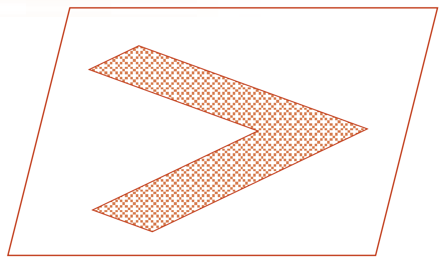
פעילויות ושיטת עבודה

הדמיון הינו פעילות מנטלית המתפתחת על-ידי פעילויות אופרטיביות, לכן תרגול מתאים מאפשר את התפתחותו. בהמשך המאמר נתונות דוגמאות לפעילויות כאלו. בכל אחת מהפעילויות עובדים לפי הסדר הבא: תחילה התלמידים **מדמיינים את המצב** המתואר ומשערים את התשובה; לאחר מכן הם **מבצעים את הפעילות בפועל** בעזרת אביזרים מתאימים ובודקים את השערתם; ובשלב הבא הם **מקיימים דיון** ומגיעים למסקנות הנכונות.
על מנת לבצע את הפעילויות יש להצטייד באביזרים ובאמצעי המחשה: דפי נייר, קיסמים (מסרגות, שיפודים, גפרורים וכדומה), פלסטלינה, תמונות וציורים של צורות בלתי אפשריות.

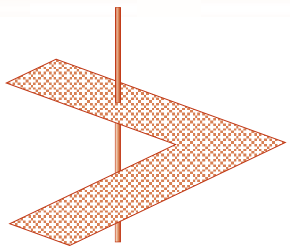
פעילות א

המורה: ברשותכם דף נייר וקיסם. בכמה נקודות תוכלו לחורר את הדף על-ידי הקיסם? (אין לקפל או לכופף את הדף ו/או הקיסם).
כפי שצוין לעיל **התלמידים** מדמיינים תחילה את המצב המתואר ועונים על השאלה ורק לאחר מכן מתנסים ומוודאים כי אפשר לחורר רק בנקודה אחת.
המורה: בכמה נקודות, לדעתכם, אפשר לחורר את הצורה המוצגת באיור א'? (הצורה נמצאת על דף נייר.)
התלמידים: בנקודה אחת כי הצורה מצוירת על דף נייר, ועל-ידי קיסם אפשר לחורר את הנייר רק בנקודה אחת.

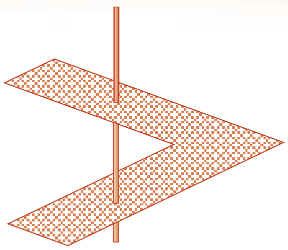
* במאמר זה המושג "צורה" מתיחס לצורות דו-ממדיות ותלת-ממדיות



איור **א**

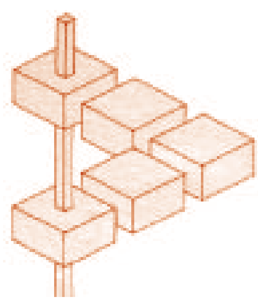


איור **ב**

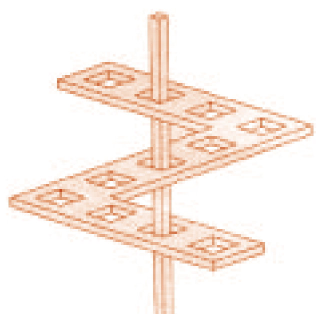


איור **ג**

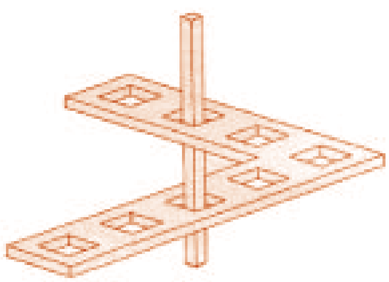
המורה: יוסי גזר את הצורה. בכמה נקודות הוא יוכל לחורר אותה על-ידי קיסם?
התלמידים: בנקודה אחת כי הצורה הגזורה היא חלק של הדף.
המורה: האם אפשר לחורר את הצורה כמו באיור ב? וכמו באיור ג? (אפשר לבקש מהתלמידים לסמן באיורים אלה את נקודות המפגש של הקיסם עם הצורה.)
התלמידים: אפשר כמו באיור ב (בנקודה אחת) ואי-אפשר כמו באיור ג (בשתי נקודות) כי הצורה הגזורה היא חלק של הדף.
המורה: הסבירו אם הצורות המיוצגות באיורים ד, ה, ו קיימות במציאות.



איור **ד**



איור **ה**



איור **ו**

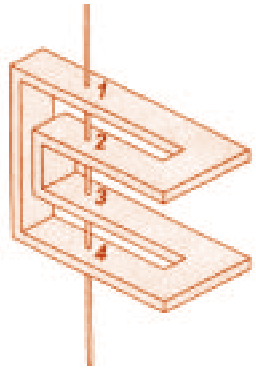
בשלב זה מקיימים דיון ומגיעים למסקנה שהצורות האלה לא קיימות במציאות.
לכל צורה כזו אנו קוראים **צורה בלתי אפשרית.**
לחלק מהתלמידים יהיה עדיין קשה להבין מדוע הצורות הן בלתי אפשריות. אפשר להציע להם לצייר ולגזור צורות אלה, לחבר רצועות ולסדר קוביות כמו באיור ולבדוק את תשובתם. שימו לב, שבעצם "הפאות העליונות" של הקוביות נמצאות על אותו דף נייר ולכן המצב המצויר הוא בלתי אפשרי.

הערות והבהרות למורה

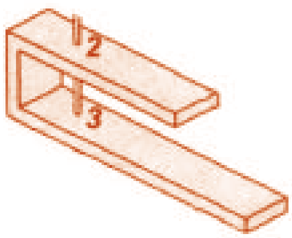
בפעילות זו מודגמת אחת האקסיומות של הגיאומטריה המרחבית: אם לישר ולמישור יש שתי נקודות משותפות אז הישר שייך למישור. המילה "שייך" פירושה כי הישר כולו נמצא במישור ואין אף נקודה של הישר הנמצאת מחוץ למישור זה.
דף הנייר מייצג מישור והקיסם מייצג ישר. ולכן הקיסם יכול לחורר את הדף רק בנקודה אחת.

פעילות ב

המורה: מה אפשרי ומה בלתי אפשרי באיור ז?



איור **ז**



איור **ח**

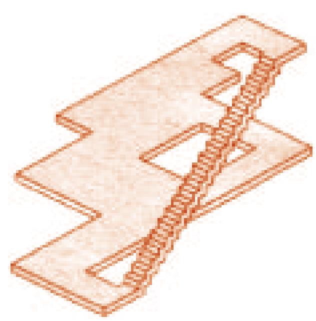
תשובה: אי-אפשר לחורר את רצועת הנייר שבאיור ז בו-זמנית בנקודות 1 ו- 2 כי שתי הנקודות הללו נמצאות באותו דף. המצב דומה לגבי נקודות 3 ו- 4. אבל אפשר להעביר קיסם דרך שתי הנקודות 2 ו- 3 כי שתי הרצועות נמצאות זו מעל זו (ראו איור ח). באיור ח מודגמת צורה שאפשר לבנות אותה מרצועת נייר אחת. צורה זו אפשר לחורר על-ידי קיסם.

הערות והבהרות למורה

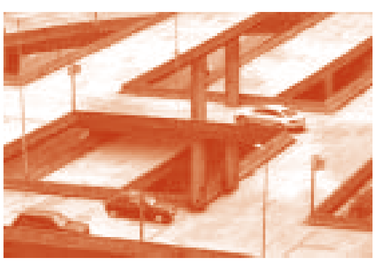
הפעילות שלעיל מדגימה את המשפט של הגיאומטריה המרחבית: אם ישר חותך אחד משני מישורים מקבילים אז הוא חותך גם את המישור השני.
שימו לב: הנקודות המסומנות ב- 1 ו- 2 נמצאות באותו מישור (דף) וכן הנקודות 3 ו- 4. (אפשר לכסות חלק מהצורה כדי לראות כל שתי נקודות בנפרד.) הנקודות 2 ו- 3 נמצאות בשני מישורים מקבילים, וניתן לכופף את הדף כמו באיור ח כדי לראות טוב יותר את שני המישורים המקבילים והישר (קיסם) העובר דרך שניהם בנקודות 2 ו- 3.

פעילות ג

המורה: הסבירו מדוע הצורות שבאיורים ט, י ו-י"א הן צורות בלתי אפשריות.


איור **ט**


איור **י**


איור **י"א**

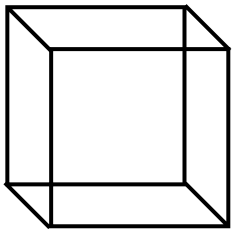
כל ההסברים הם כמו ההסברים לפעילויות א ו- ב.

פעילות ד

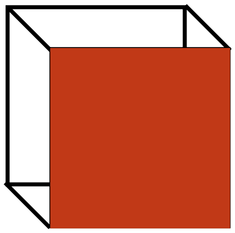
פעילות מקדימה

המורה: מה רואים באיור י"ב?

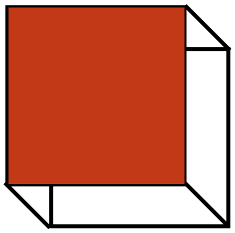
יהיו כאלו שיגידו שהם רואים קובייה אך יהיו גם אחרים הרואים שני ריבועים שקדקודיהם מחוברים בקטעים. אלה הם תעתועי האשליה שצריך לדעת לנווט אותם. מטרת הפעילות היא לעזור לתלמידים לנווט את הדמיון למציאות הנתונה. מכסים או מבקשים מהתלמידים לכסות בפועל את אחד הריבועים על-ידי דף צבעוני. באיור י"ג מכוסה הפאה הקדמית של הקובייה ובאיור י"ד מכוסה הפאה האחורית של הקובייה וכך קל יותר לראות שהצורה הדו-ממדית מייצגת גוף תלת-ממדי.



איור **י"ב**

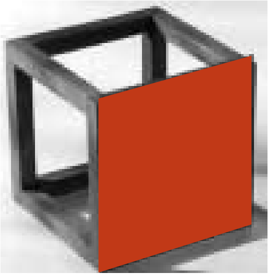


איור **י"ג**



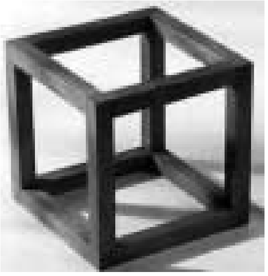
איור **י"ד**

המורה: כעת בנו את הצורה המוצגת באיור ט"ו.
(לבנייה נעזרים בפלסטלינה, קיסמים, גפרורים וכדומה).



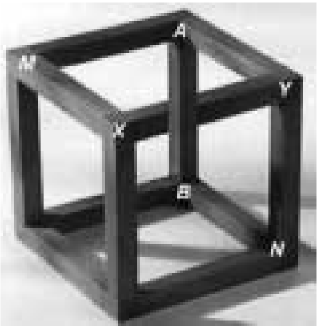
איור **ט"ו**

תוך כדי התנסויות ובעזרת המורה, התלמידים יבנו את הקובייה שבאיור ט"ז.



איור **ט"ז**

לאחר שהתלמידים בנו את הקובייה מורידים את הדף הצבעוני, לפתע רואים כי באיור מצוירת צורה אחרת (איור י"ז) . האם צורה זו קיימת במציאות?



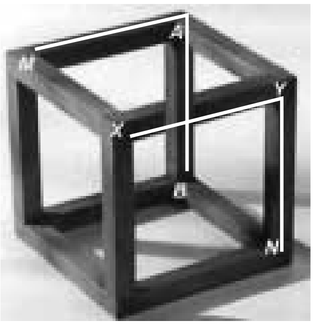
איור **י"ז**

במילים אחרות האם מקצוע AB קרוב יותר אלינו מאשר מקצוע XY? כלומר, האם המקצועות AB ו- XY נחתכים? הילדים מבינים אינטואיטיבית כי גם הצורה באיור י"ז היא בלתי אפשרית.

הערות והבהרות למורה

הפעילות מבוססת על המשפט: אם במישור אחד שני ישרים נחתכים והם מקבילים לשני ישרים נחתכים במישור השני, אז שני המישורים מקבילים זה לזה.

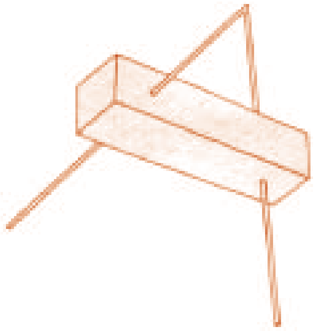
נתבונן באיור י"ח שבו YX || AM ו- YN || AB. לכן למישורים (MAB) ו- (XYN) אין נקודות משותפות. כלומר, בציור מוצגת צורה בלתי אפשרית.



איור **י"ח**

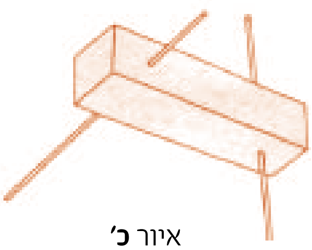
פעילות ה

המורה: האם המצב המוצג באיור י"ט אפשרי או בלתי אפשרי?



איור **י"ט**

לאחר השערה מציעים לתלמידים לבנות תיבה מפלסטלינה ולחורר אותה כפי שמצויר באיור י"ט. בבנייה התלמידים מקבלים את המצב כמו באיור כ' ומוודאים כי המצב באיור י"ט בלתי אפשרי.



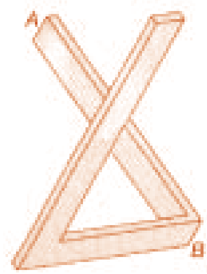
איור **כ'**

הערות והבהרות למורה

שני הישרים (שני הקיסמים) במקרה זה הם ישרים מצטלבים. לישרים מצטלבים אין נקודות משותפות. לכן המצב שבאיור י"ט בלתי אפשרי.

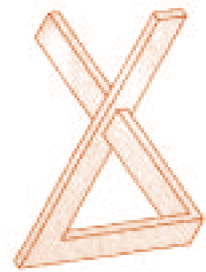
פעילות ו

מציעים לתלמידים לגזור ולבנות מנייר את הצורה שבאיור כ"א.



איור **כ"א**

המורה: התוכלו לבנות את הצורה שבאיור כ"ב?



איור **כ"ב**

כל הניסיונות של התלמידים יובילו למצב שבו צריך לעקם את אחד הקטעים, לדוגמה, קטע AB (ראו איור כ"א). אך באיור כ"ב החלק הזה הוא ישר! בהמשך מבקשים מהתלמידים לבנות (למשל מפלסטלינה) את הצורה שבאיור כ"ג (חלקה העליון של הצורה מוסתר על-ידי דף צבעוני).

איור **כ"ג**

הצורה שיקבלו התלמידים תיראה כמו באיור כ"ד.

איור **כ"ד**

מנקודת מבט אחרת הצורה תיראה כמו באיור כ"ה.

איור **כ"ה**

מורידים את הדף והתלמידים רואים את הצורה שבאיור כ"ו שהיא בלתי אפשרית.

איור **כ"ו**

הערות והבהרות למורה

המצב זהה לחלוטין למצב שבאיורים כ"א, כ"ב.

סיכום

תוך כדי ביצוע הפעילויות שלעיל התלמידים דמיינו לעצמם שינויים שנעשו בצורות; בדקו את ההשערות במידת הצורך בפועל; ונמקו את תשובותיהם ברמה מתאימה לגילם. יחד עם זאת ראינו כי מאחורי הפעילויות עומדות עובדות מתמטיות שהתלמידים ילמדו בכיתות גבוהות יותר. לסיכום, ניסינו להראות את תרומת הפעילויות לפיתוח ראייה מרחבית כבר מגיל צעיר, כדי למנוע קשיים בלימודי גיאומטריה מרחבית בגיל מבוגר יותר.

על מחבר המאמר:

אנטולי שיריאקוב

מרצה בכיר למתמטיקה בפקולטה להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי באוניברסיטה הפדגוגית של מינסק.

הערות כלליות:

רוב הצורות שהוצגו לעיל יוצרו על-ידי האדריכל השוודי Oscar Reutersvärd.

באיור י"ז מוצגת קובייה בלתי אפשרית של Maurits Cornelis Escher

למתעניינים בנושא: הכתובת של האתר "צורות בלתי אפשריות באומנות":
http://im-possible.info/english/art/index.html
האתר נבנה באנגלית וברוסית.

תודה לד"ר דניאלה לוזון ולשוש גופשטיין שסייעו בתרגום ובעריכת המאמר

עלה ברשת....

אתר העוסק בצורות בלתי אפשריות

כתובת האתר: http://www.cs.technion.ac.il/~gershon

בין העוסקים ביצירת צורות בלתי אפשריות נמצא פרופ' **גרשון אלבר** מהטכניון בחיפה, העוסק בתכנון גיאומטרי בעזרת מחשב, מידול גופים וגרפיקה ממוחשבת. בין השאר הוא עוסק ביצירת גופים בלתי אפשריים במחשב.

תמונות מעבודותיו של פרופ' גרשון אלבר