פתרונות לבעיות מעניינות מגיליון 13

בעיה 1

א. כדי לקבל ריבוע שסכום המספרים בו יהיה אי-זוגי וסכום המספרים בכל ריבוע פנימי של 2X2 יהיה זוגי, יש לכתוב מספרים כך:

אי זוגי	זוגי	אי זוגי
זוגי	אי זוגי	זוגי
אי זוגי	זוגי	אי זוגי

ב. כדי לקבל ריבוע שסכום המספרים בו יהיה זוגי וסכום המספרים בכל ריבוע פנימי של 2X2 יהיה אי-זוגי, יש לכתוב מספרים כך:

אי זוגי	זוגי	אי זוגי
זוגי	זוגי	זוגי
אי זוגי	זוגי	אי זוגי

בעיה 2

א. ניתן ליצור שרשראות רבות מאוד של אבנים שסכום הנקודות עליהן הוא 10. אפשר להתחיל מבנייה של השרשרת הקצרה ביותר ולבנות שרשרת חדשה על-ידי פירוק חוזרים של המספרים המופיעים על האבן. (צריך לדאוג שלא תופיע אותה אבן פעמיים באותה שרשרת.) לדוגמה:

5 | 5

5 | 0   2 | 3

4 | 1   1 | 1   2 | 1

ב. השרשרת הקצרה ביותר שסכום הנקודות עליה הוא 10 בנויה מאבן אחת ויש שתי אפשרויות לשרשרת כזו:

4 | 6   5 | 5

ג. השרשרת הארוכה ביותר שסכום הנקודות עליה הוא 10 בנויה מ- 5 אבנים ויש מספר אפשרויות לשרשרת כזו לדוגמה:

2 | 2   0 | 3   0 | 2   0 | 1   0 | 0

בעיה 3

אומדן השטחים בעזרת השוואה ישירה

כל אחת מהצורות: המלבן, המשולש שווה הצלעות והמקבילית חוסמים 6 עיגולים שהרדיוס של כל אחד מהם הוא יחידה אחת. בנוסף יש שטחים נוספים לשטח העיגולים. שטחים אלו לא שווים. (ראו טבלה) לכן, שטחי שלושת המצולעים אינם שווים. כשמגדילים את המרובעים (כל מרובע לעמוד נפרד), ניתן לגזור את העיגולים ואת שאר השטחים ולהשוות ביניהם. בדרך זו ניתן לאמוד ששטח המשולש גדול משטח המקבילית.

	משולש	מקבילית
עיגולים	6	6
השטח הנוצר בין 3 מעגלים משיקים	4	4
השטח בין 2 מעגלים משיקים ובין צלע המשיקה להם	6	6
השטח בין שוקי זווית של 60^0 ובין מעגל הכלוא ביניהן	3	2
השטח בין שוקי זווית של 120^0 ובין מעגל הכלוא ביניהן		2

בדרך זו קשה להשוות את שטח המלבן לשטחי המשולש והמקבילית.

כאשר מזיזים את המקבילית כך שתהיה מונחת על המשולש (ראו סרטוט 1), ניתן לראות שמשולש QRS שווה בשטחו למשולש STU. המשולש הקטן UVW מהווה את הפרש השטחים בין המשולש והמקבילית. מכאן, ששטח המשולש גדול משטח המקבילית.

השוואת השטחים בעזרת מדידה וחישוב

בעזרת מדידת הצלעות והגובה וחישוב השטחים.

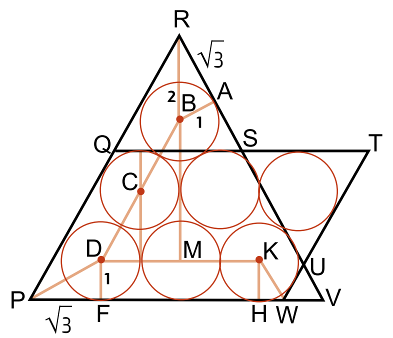
השוואת השטחים בעזרת חישוב

נשתמש במשולשים שהזוויות שלהם הן: 90^0 , 60^0 , 30^0.

על-פי המשפט: במשולש ישר-זווית שזוויותיו החדות הן 30^0, 60^0, הניצב מול הזווית 30^0 שווה למחצית היתר.

בעזרת משפט זה ומשפט פיתגורס אפשר לחשב בכל משולש

כזה את אורך שלוש הצלעות. אפשר גם להשתמש בעובדה שכל המשולשים שהזוויות שלהם הן: 90^0, 60^0, 30^0, הם משולשים דומים ולכן היחס בין הצלעות המתאימות שלהם קבוע, ובעזרתו ניתן לחשב את אורכי הצלעות.



סרטוט 1

חישוב שטח המשולש:

א. חישוב אורך צלע המשולש RPV:
משולש DPF הוא משולש 90^0, 60^0, 30^0 (זווית P היא חצי מ- 60^0 ו- DF הוא אנך ל-PV). נחשב ונמצא שאורך צלעות המשולש: 1,2 ו- $\sqrt{3}$. גם KHV הוא משולש כזה ולכן, אורך צלע המשולש RPV הוא:

$\sqrt{3}+2+2+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+4$

ב. חישוב גובה המשולש RPV:
נתבונן על משולש BDM. אורך היתר הוא 4, אחד הניצבים הוא 2. נחשב (בעזרת משפט פיתגורס או היחס שבין הצלעות במשולשים הדומים DPF ו- BDM) ונמצא שאורך הניצב השני הוא $2\sqrt{3}$. מכאן שגובה משולש RPV הוא: $3+2\sqrt{3}$.
מכאן ששטחו של משולש RPV הוא:

$\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+4)(3+2\sqrt{3})=7\sqrt{3}+12$

חישוב שטח המקבילית:

א. חישוב אורך צלע המקבילית:
נתבונן במשולש KHW. משולש זה הוא גם משולש $30^0,60^0,90^0$. (בחישוב זוויות ניתן לראות שמשולש KVW הוא משולש שווה שוקיים שזוויות הבסיס שלו הן 30^0 ולכן זווית הראש היא בת 120^0. מכאן שהזווית הצמודה לה במשולש KHW היא בת 60^0).

נחשב בעזרת דמיון משולשים:
משולש KHW דומה למשולש RAB . (שניהם $30^0,60^0,90^0$)
לכן: $\frac{AB}{HW}=\frac{RA}{KH}$
נציב את אורך הצלעות הידועות ונקבל: $HW=\frac{1}{3}\sqrt{3}$
נחבר את אורכי הקטעים היוצרים את צלע המקבילית ונקבל: $\sqrt{3}+2+2+\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}+4$

ב. חישוב גובה המקבילית
נתבונן במשולש CDE. משולש זה חופף למשולש RAB ולכן אורך הניצב CE הוא $\sqrt{3}$. נחבר את הקטעים היוצרים את גובה המקבילית ונקבל: $1+\sqrt{3}+1=\sqrt{3}+2$

שטח המקבילית הוא: $(\sqrt{3}+2)(\frac{4}{3}\sqrt{3}+4)=6\frac{2}{3}\sqrt{3}+12$

חישוב שטח המלבן:

את צלעות המלבן ניתן לבטא בעזרת הרדיוסים של המעגלים: 4x6=24 יחידות באורך הרדיוס.

פתרונות המסתמכים על טריגונומטריה ניתן למצוא באתר:
http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=352&part=solution

בעיה זו היא דוגמה לבעיה שניתן לפתור ברמת תלמיד וניתן גם להעמיק במתמטיקה שבה ברמת מורה.

בעיה 4

כשכותבים את כל המספרים מ-1 ועד 60 בשורה, אחד אחרי השני - 1 2 3 4 ..... 58 59 60 מתקבלות 111 ספרות. אם מוחקים 100 ספרות, נשארים עם מספר בן 11 ספרות, כשאנו רוצים שבערכי המקומות הגבוהים יותר יהיו הספרות הגדולות יותר. לכן, המספר הגדול ביותר האפשרי הוא:

99,999,678,960