ג. שימוש בדף לפעילויות העמקה

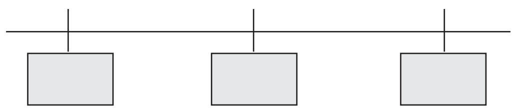
השאלה:

$\frac{1}{4} < \boxed{} < \frac{1}{3}$

יכולה לשמש לפעילויות העמקה בנושא: דרכים שונות למציאת שבר בין שני שברים נתונים.
אחת הדרכים היא על-ידי הרחבות שונות של שני השברים.
דרך נוספת היא על-ידי שימוש במשפט מק-קי, האומר שכדי למצוא שבר הנמצא בין שני שברים נתונים, מספיק לחבר מונה למונה ומכנה למכנה. בדוגמה שלנו - השבר $\frac{2}{7}$ נמצא בין $\frac{1}{4}$ ל- $\frac{1}{3}$

(ראו הוכחה בעמ' 63 או במקורות בסוף המאמר)

משימה נוספת ברמת העמקה גבוהה יותר, היא לתת את המשימה המקורית ללא מספרים, ולבקש לשבץ מספרים, כך שהתשובה תקיים תנאים מסוימים. לדוגמה:



- כתבו מספרים בשניים מהמקומות הריקים (סמוכים או לא סמוכים), כך שהמספר השלישי יהיה שבר.
- כתבו מספרים בשניים מהמקומות הריקים כך שהמספר השלישי יהיה שלילי.
- כתבו שברים בשניים מהמקומות הריקים, כך שהמספר השלישי יהיה מספר שלם.
- כתבו מספרים בשניים מהמקומות הריקים, כך שהמספר השלישי יהיה מספר זוגי (או אי-זוגי).

אפשר, כמובן, להמציא שאלות רבות נוספות.

סיכום

הדוגמאות שהבאנו מראות כיצד אפשר להתמקד בדף אחד בלבד, המיועד לכיתות הנמוכות, ולנצל אותו כדי ללמוד על חשיבת הילדים בכיתות גבוהות יותר. באותו דף אפשר גם לעשות שינויים כך שיתאים למטרות רבות - סוגי שאלות שונים, בנושאים שונים ולרמות שונות.

מקורות

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1997). *Number Sense Grades 1-2*. Dale Seymour Publications.

Sherzer, L. (1973). McKay's Theorem. *Mathematics Teacher*, 66, 229-230.

משפט מק-קי, תרגום: חנה תלמי, **שבבים - עלון מורי המתמטיקה**, תיק מס' 2.

על מחברות המאמר:

אבתיסאם עבד אלח'אלק
עובדת במרכז מורים ארצי - אוניברסיטת חיפה ומדריכה סטודנטים בהתמחות במתמטיקה במכללות גורדון ואלקאסמי.

ד"ר מיכל סוקניק
מנהלת מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי באוניברסיטת חיפה.

חופש ומתמטיקה

עמוס גואטה

מוקדש להורי היקרים, אפרים וניצה

יש הנאה הבאה מן החושים ויש הנאה הבאה מן ההיגיון. אף שלא ברור אם אפשר להבחין בצורה מוסכמת בין שתי ההנאות הללו, ניתן לומר שההנאה מן המתמטיקה שייכת, בדרך כלל, לסוג השני, ומי שעוסק בהוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי, מנסה בעזרת אמצעי המחשה שונים ופעילויות מגוונות לחבר בין שתי ההנאות.

היחס בין המחשה לבין הפשטה הוא מורכב. ייתכן שכמעט כל הרעיונות המופשטים במתמטיקה צמחו מתוך העולם המוחשי וצורכי היומיום שלנו. אך אחרי שנוצרת הפשטה מתמטית, יש לה חיים חדשים משלה, והיא יכולה להגיע למקומות שהקשר בינם לבין המקור המוחשי נראה מיקרי. חשובים ומעניינים במיוחד הם המקרים, שבהם מקבלים רעיונות מופשטים יישומים מפתיעים בתחומים חדשים. כך קרה כשפגשה הלוגיקה המתמטית את הנדסת החשמל, ונולד תחום חדש - מדעי המחשב (אהרוני, 2004).

כשאנו באים להסביר לעצמנו או לאחר, רעיון מתמטי מופשט, כמעט תמיד ננסה לחשוב בתמונות ובדימויים מתוך העולם הנתפס בחושים. האיזון שבין המחשה להפשטה צריך להישמר: "הפשטה שבאה טרם זמנה נופלת על אוזניים אטומות" (Kleine, 1972)[1], והתייחסות לאמצעי ההמחשה כאילו הם רעיונות מתמטיים עלולה להחמיץ את העיקר (גביש, תש"ס).

לפילוסוף הישראלי בן עמי שרפשטיין, המתעניין בפילוסופיה ובהיסטוריה של האמנות, יש השקפה מעניינת על הקשר שבין יצירה אסתטית- חושית לבין יצירה לוגית- מתמטית מופשטת:

> "ספונטאניות וסדר מאפיינים לא רק אמנות אלא את החיים בכללם. כל מה שאנו הוגים, אומרים או עושים, כל מה שהננו, מכונן מבחינה מסוימת על-ידי התמזגותם של הניגודים הללו; אבל כאשר התמזגות זו עולה לנו במכאובים גדולים ומסתיימת בהישג בלתי- צפוי, מכונים בפינו המכאובים וההישג, הבאים יחד, בשם "יצירה" - מבלי שים לב אם תכליתה היא טכנולוגית, מתמטית, או אמנותית. מכל מקום ביצירה מצוי תמיד יסוד הפתעה מסוים, משהו מעבר לניסיון ולהיגיון המקובל. תגלית מתמטית היא עצם תמציתו של מבנה הגיוני; אבל התהליך המוליך אליה הוא בדרך כלל, על-פי קני מידה של היגיון הידוע לנו, לא יותר מהבלותא, רצופה דימויים מרקדים, ניצוצות אור תועים והזדעקויות פנימיות. לכל מתמטיקאי משחק פנימי משלו שהוא לא ענייני מבחינה הגיונית, אך חיוני בתכלית. לראשונה בא המשחק, לאחר מכן האינטואיציה, ורק בסוף מופיעים דרך-קבע המבנה הקבוע וההוכחה הברורה, שאין לכפור בה. היצירה המתמטית אינה פחות ספונטאנית קשה ומוזרה מיצירת אמנות." (שרפשטיין, תש"ל)

אפשר ללמוד מדברי שרפשטיין, בין השאר, שתהליך היצירה המתמטי הוא חופשי, "אמנותי" ומפתיע יותר ממה שמקובל לחשוב. למרות שהתיאור של שרפשטיין אינו מתייחס למאורעות שבשגרה, בכל זאת אפשר לשאול - האם אנו מרגישים משהו מהתחושות, שתוארו לעיל, בזמן שאנו לומדים או מלמדים מתמטיקה?

בהמשך, כותב שרפשטיין גם על ההבדלים שבין היצירה האמנותית ליצירה המתמטית: "ההבדל הבולט ביותר הוא כי יצירת אמנות אינה חדלה לעולם לעורר התפעלות רגשית, המקבילה למכאוב ולהישג שהונחו ביסודה. התגלית המתמטית היא יצירה בלבד, מעשה אמנות הוא יצירה שאנו חשים בה את רגש היוצר. כל מעשה יצירה מאוכלס דמיונות, בין שהוא משפט מתמטי ובין שהוא מטוס, אבל משפטים מתמטיים

ומטוסים ניחנים באטימות מיוחדת, אף-על פי ששקופים הם בפני ההיגיון". בקצרה ובפשטנות מסוימת אפשר לומר שהיצירה המתמטית שקופה מבחינת השכל, והיצירה האמנותית שקופה מבחינת הרגש.

קשה להצביע על הנאה או עניין רב הבאים משחזור של הוכחה מתמטית, או מפתרון חוזר של בעיות, אבל ניתן לשמוע או לקרוא שנית ושלישית יצירות בתחומים אחרים – כמו מוסיקה וספרות – תוך הנאה שאינה פוחתת. המבנה של היצירה המוגמרת (כמו הוכחת משפט או הפרכתו), ושל הלימוד המתוכנן במתמטיקה, הוא בדרך כלל יציב, חסכוני ועינייני מאוד. אם אפשר למצוא הנאה בלמידה כזאת, היא יכולה להתגלות במציאת הקשר שבין הנושאים או בהעלאת השערות (גם אם לא נוכל להוכיחן), ולא בחזרות או בתרגול מפורט ומדויק של כל נושא בפני עצמו.

אף שהמתמטיקה נחשבת למופת של אובייקטיביות, הרי הוראת המתמטיקה מושפעת מגורמים שונים, החל בהעדפות ונטיות אישיות, וכלה בשינויים טכנולוגיים והשפעות תרבותיות. בכנס האחרון של הוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי (הרכבי ופרידלנדר, תשס"ז), הוצגו שש תכניות שונות להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי, כולן, כנראה, טובות וראויות, והבחירה ביניהן היא יותר עניין של טעם אישי מאשר העדפה הנובעת מניתוח אובייקטיבי של המאפיינים העיקריים של התכניות. בקצרה: המתמטיקה היא אובייקטיבית – הוראת המתמטיקה אינה כזאת.

בהוראת המתמטיקה של השנים האחרונות אנו יכולים לראות שתי מגמות: מצד אחד שפע וגיוון של תכניות לימודים ושל יוזמות מקומיות, ומצד שני ניסיון ליצור סטנדרטים מפורטים ואחידים המגדירים את הציפיות של המערכת מהתלמידים ומהמורים (מאונטוויטן, תשס"ז). המסר הנובע מהמגמות האלה הוא, באופן כללי, זה: לצוות של בית הספר קיים חופש לבחור אחת מכמה תכניות הלימודים המוצעות, וכן ליזום ולשלב פרויקטים נוספים, ובלבד שהתוצרים של הלמידה, כפי שניתן לבדוק אותם במבחנים, יעמדו באותם סטנדרטים שהוגדרו מראש.

הדרך היחידה שיש בידי המערכת, לבדוק אם בית ספר מסוים עומד בסטנדרטים שנקבעו, היא לערוך מבחן מתאים. הבעיה היא שאם המבנה, התוכן והרמה, של המבחנים ידועים מראש, עלולה ההצלחה במבחן הסטנדרטים להפוך ולהיות המטרה העיקרית, וכך כל הלמידה נעשית כפופה לאותם מבחנים. כך יוצא שכל אותם מאמצים גדולים וכל אותן כוונות טובות, שהושקעו בפיתוח תכניות לימודים וביוזמות נוספות, אינם מנוצלים במלואם. הבעיה הזאת ידועה היטב והיא בולטת יותר בחטיבה העליונה, שם מכוונת כל הלמידה להצלחה באותם מבחני בגרות, שאפשר לראות בהם את הסטנדרטים של השכלת בוגר התיכון הישראלי.

בעיה נוספת הקשורה למבחנים החיצוניים היא, שלפעמים הם גורמים לתהליך הלמידה להתפצל לשניים – תהליך שבו לומדים ותהליך שבו נבחנים. המורה מאבד את מעמדו כמי שיש לו שליטה מלאה על כל התהליך – הוא מלמד, אבל מישהו אחר בודק את הידע של תלמידיו.

כפי שציינתי קודם, השאלות שמופיעות במבחנים סטנדרטיים הופכות לשאלות המכוונות את כל המערכת, ואלה שמחברים את השאלונים הסטנדרטיים, בוודאי מודעים לכך שהשאלות שלהם לא רק בודקות את המערכת, אלא גם משפיעות בצורה מכרעת על תהליך הלמידה.

כדי לפתור את שתי הבעיות הללו צריכים, לדעתי, לשלב שאלות של מורים (וגם של תלמידים) במבחנים הסטנדרטיים, וכן לפתח סוג של שאלות שיאפשר בדיקה של הידע אבל יהווה גם הזדמנות נוספת ללמידה, שאלות שיוצרות קישורים בין התחומים, שיכולות לעורר דיון, ושאפשר ללמוד מהן. חשוב גם ששאלות שעוסקות באותו עניין יובאו באותו הקשר,

וכך המבחן ייראה כמו מסע הגיוני, ולא כמו אוסף אקראי של חידות הבאות מאי-שם ונעלמות אחרי הפתרון שלהן. הספרות המקצועית עשירה בשאלות יפות כאלה, צריך לאסוף אותן, להוסיף עליהן, ולבנות בעזרתן מבחנים הגיוניים שהתלמיד יוכל ללמוד משהו בזמן שהוא טורח על תשובותיו. מבחנים חיצוניים שיש בהם היגיון פנימי יוכלו, אולי, לתרום למערכת המבחנים של היום משבשים אותה.

השאלות שיובאו בעמודים הבאים יכולות להוות דוגמאות לשאלות שלא רק בודקות ידע אלא גם מוסיפות ידע, ואין הכוונה כאן לידע חדש, אלא רק לחזרה על ידע קיים. אבל ידוע שכל למידה כוללת חזרה ובכל חזרה יש למידה חדשה. הדוגמאות שיובאו בהמשך נראות במבט ראשון מופשטות מאוד, בדרך כלל, הן אינן עוסקות בשאלות מחיי היום יום, אלא כוללות מסגרת של קבוצת מספרים עם פעולה, שבעזרתן ניתן לבנות תרגילים ולמיין אותם.
(דוגמאות טובות לשאלות המתבססות על מצבים מחיי היומיום, אפשר למצוא במבחני פיזה (pisa)). היתרונות הבולטים של גישה מופשטת נובעים מכך, שאחרי שנבחרו והוגדרו הכלים המופשטים או מסגרות החשיבה, הם ניתנים להתאמה לטווח רחב מאוד של נושאים - כולל נושאים שאינם מופשטים (ראה דוגמאות 11, 12), וכך יכולים המורה והתלמיד, אחרי שהתרגלו לסוג זה של פעילות, להשתמש בה באופן חופשי ויצירתי מאוד.

כלים ופעילות מהסוג הזה - היכולים למלא תפקיד מסוים בארגון החשיבה, אינם הופכים את אמצעי ההמחשה למיותרים, אך הם מאפשרים להדגיש רעיונות ולפתח חשיבה בכיוונים נוספים, שלדעתי, קשה להגיע אליהם בעזרת אמצעים מוחשיים. באופן שנראה אולי פרדוקסאלי, ככל שרעיון הוא מופשט יותר, כך הוא ניתן, בדרך כלל, לשימוש כללי יותר וחופשי יותר. כדוגמה לכך אפשר להביא את השימושיות והגמישות של כתב אותיות, לעומת האפשרויות המוגבלות יותר של כתב ציורים.

הדוגמאות המובאות כאן, לא חוברו כדי שאפשר יהיה לשלבן במבחנים חיצוניים. הרעיון שעמד מאחוריהן, ושעבר גלגולים רבים, התחיל בניסיון שלי לאפשר לתלמידים לחבר שאלות בעצמם. שאלות התלמידים אמורות היו להשתלב במהלך השיעור, אך התברר שלשאלות ולתרגילים שתלמידים מחברים יש כמה תכונות מעניינות, הם עשויים למשל, להופיע בדרגות שונות מאוד של קושי. בסופו של דבר בחרתי מסגרות מוגדרות, שבתוכן יכלו התלמידים לבנות שאלות ותרגילים בצורה מבוקרת יותר, וכך יצרתי פשרה סבירה בין חופש לבין מבניות.

הגישה או הטכניקה שתוצג בהמשך (מדברי פיאז'ה: "אם יש טכניקה יש מקצוע." (ברינגייה, 1988)), מאפשרת למורים ולתלמידים חיבור שאלות ותרגילים בתוך מסגרת מוגדרת. אחד החשובים שבין היתרונות המושגים כאן הוא, כאמור, השילוב שבין למידה שיטתית שיכולה להיות חלק מתכנית לימודים מתוכננת ובין חופש פעולה מסוים, שניתן לצמצמו או להגדילו לפי אופי הפעילות והחלטות של המורים והתלמידים.
שתי המסגרות שבחרתי בהן לצורך הפעילות הזאת הן הקבוצה והפונקציה, אך אין צורך להיבהל, הקבוצות והפונקציות משמשות כאן כמסגרות פעולה פשוטות, ולא כמושגים מתמטיים, ולכן אנו גם לא מסבירים דבר בקשר לתכונותיהן של קבוצות ושל פונקציות.

הגישה המתוארת בעזרת דוגמאות בהמשך, נוסתה בכיתות א–ו בבית ספר יסודי בתל-אביב בשנים תשס"ב - תשס"ה. הפעילות לא נעשתה בצורה מבוקרת. היא נועדה רק לבדוק את תגובות התלמידים והמורים. התגובות היו טובות מאוד בדרך כלל. (אני זוכר שתלמיד בכיתה א אמר: "ככה אנחנו לומדים הרבה יותר מתמטיקה".)

דוגמה 1

נתונה הקבוצה {3, 2, 1, 0}, הפעולה המותרת היא חיבור, המשימה היא לבחור בשני מספרים מהקבוצה (לאו דווקא שונים) ולחשב את הסכום שלהם. אם הסכום הוא מספר בקבוצה, אז התרגיל ייקרא פנימי (או סגור), אם הסכום איננו מספר בקבוצה, אז התרגיל ייקרא חיצוני (או פתוח). למשל, התרגילים: 1+1=2 , 1+0=1 הם פנימיים, והתרגילים 3+3=6 , 2+3=5 הם חיצוניים. התלמידים צריכים למצוא את כל התרגילים הפנימיים ואת כל התרגילים החיצוניים. התלמידים רושמים את התרגילים וממיינים אותם. למרות שהתוצאות של הפעילות הזאת ידועות מראש, התלמידים נהנים מחופש פעולה מסוים, הגורם לתגובות של התלהבות. בפעילות הזאת מתקבלים 10 תרגילים שונים, שמתוכם 4 הם חיצוניים ו- 6 פנימיים. שתי התכונות של החיבור שמודגשות בפעילות הזאת הן: החילופיות של החיבור והניטרליות של האפס ביחס לחיבור.

הערה: התרגילים 3+2=5 , 2+3=5 אינם נחשבים כאן לתרגילים שונים, אבל מי שרוצה יכול להגדירם אחרת.

עבור קבוצה עם 4 מספרים ועם פעולה חילופית, מקבלים, כאמור, 10 תרגילים. אם מתעלמים מהתכונה החילופית מקבלים 16 תרגילים. באופן כללי, עבור קבוצה בעלת n מספרים מקבלים במקרה הלא חילופי n^2 תרגילים, ובמקרה החילופי $\frac{n(n+1)}{2}$ תרגילים.

לדוגמה, עבור הקבוצה {16, 8, 4, 2, 1} נקבל עבור פעולת החילוק, שאיננה חילופית, 25 תרגילים (5^2), ועבור פעולת הכפל, שהיא חילופית, נקבל 15 תרגילים ($\frac{5x6}{2}$).

דוגמה 2

נתונה הקבוצה {1, 10, 100, 1000}, הפעולה המותרת היא כפל, ההגדרות כמו בדוגמה 1: המשימה היא לבחור בשני מספרים מהקבוצה (לאו דווקא שונים) ולחשב את המכפלה שלהם. אם המכפלה היא מספר בקבוצה, אז התרגיל ייקרא פנימי (או סגור), אם המכפלה איננה מספר בקבוצה, אז התרגיל ייקרא חיצוני (או פתוח).

דוגמה לתרגיל פנימי: 10X10 = 100, ודוגמה לתרגיל חיצוני: 10X1000 = 10000. גם כאן התלמידים צריכים למצוא את כל התרגילים הפנימיים ואת כל התרגילים החיצוניים. הכפל היא פעולה חילופית, ולכן גם כאן יתקבלו 10 תרגילים שונים. דוגמה 2 מאפשרת למקד את הדיון במבנה העשרוני, ובתכונות המיוחדות של מספרים שהם חזקות של 10.

דוגמה 3

נתונה הקבוצה {1, 10, 100, 1000}, הפעולה המותרת היא חילוק, ההגדרות הן כמו בדוגמאות הקודמות. תרגילים חיצוניים (או פתוחים) הם, למשל: $1:10=\frac{1}{10}$, $10:100=\frac{10}{100}$, ותרגילים פנימיים (או סגורים) הם, למשל: 100:100=1, 100:10=10.

פעולת החילוק היא לא חילופית, ולכן נקבל כאן 4^2, כלומר, 16 תרגילים. בדוגמה זאת התקדמנו לנושא של שברים שהמכנה שלהם הוא חזקה של 10. ניתן לשלב תרגיל כזה בשלב של מבוא לשברים עשרוניים ובשלבים מתאימים נוספים.

משלוש הדוגמאות האחרונות רואים שמסגרת הפעילות המוצעת כאן היא פשוטה וחסכונית, ומאפשרת התאמה גמישה מאוד לטווח רחב של רמות לימוד ושל נושאים. המסגרת של קבוצה מאפשרת סוגים נוספים של פעילות.

דוגמה 4

נתונה הקבוצה {1, 2, 4} הפעולות המותרות הן כפל וחילוק, וכן מותר להשתמש בסוגריים. צריך לבחור 3 מהמספרים (לאו דווקא שונים), ושתיים מהפעולות (לאו דווקא שונות). התרגילים שיכולים להתקבל כאן הם, למשל:

$1:1:2 = \frac{1}{2}$ 1:(1:2) = 2   2x4:2 = 4   4:(2x2) = 1

לפי ההגדרות שניתנו בדוגמאות הקודמות, שלושה מתוך התרגילים האחרונים הם פנימיים (או סגורים) ואחד הוא חיצוני (או פתוח).

מספר התרגילים האפשרי כאן הוא גדול (100 תרגילים), ואפשר להחליט מראש כמה תרגילים יינתנו לתלמידים בכל משימה.

דוגמה 4 היא כללית יותר, ורואים בה שוב את הגמישות והגיוון שמאפשרת המסגרת של קבוצות. בתוך דוגמה כזאת אפשר להגדיר משימות נוספות, כמו למשל: מצא לפחות 6 תרגילים שהתוצאה שלהם קטנה מ- $\frac{1}{2}$.

בדוגמאות הבאות אנו מעבירים את הדגש מפעולות ליחסים.

דוגמה 5

נתונה הקבוצה {1, 2, 3, 4}. הפעולה המותרת היא כפל, מותר להשתמש ביחס השוויון (=) ובמספרים שבקבוצה בלבד. מטרתנו לכתוב טענות אמיתיות וטענות שקריות, לדוגמה, הטענות 2x1=1x2, 2x2=4 הן אמיתיות, ואילו הטענות 4x4=4, 2x4=3 הן דוגמאות לטענות שקריות. המספר הכללי של הטענות האפשריות כאן הוא גדול, וניתן להחליט מראש כמה טענות דרושות כדי לסיים את המשימה.

דוגמה 6

אפשר להוסיף לדוגמה 5 גם את היחסים גדול מ... או קטן מ..., ובכך להרחיב ולהעמיק את הדיון. דוגמאות לטענה נכונה הן: 2x4>2x2   2x4>4 ודוגמאות לטענה שאינה נכונה הן: 2x3>2x3, 2>2x2.

בשתי הדוגמאות האחרונות ניתנת לתלמידים הזדמנות לדון בטענות שקריות, הם מגיבים בהפתעה ובשמחה על האפשרות לכתוב תרגילים שאינם "נכונים" אך מהווים תשובה נכונה במסגרת הדיון. אפשר לסכם ולומר: במסגרת של קבוצות ניתן לבנות לפחות שני סוגים כלליים של פעולות, סוג פעילות אחד מתמקד בתרגילים פנימיים וחיצוניים – כמו בדוגמאות 1–4, והסוג השני מתמקד בטענות אמת ושקר – הקשורות בדרך כלל ליחסים – כמו בדוגמאות 5, 6.

הערה שיכולה להועיל: אם בוחרים בפעולות כפל או חילוק, מוטב לבחור קבוצה של מספרים שמהווים סדרה הנדסית, כלומר, שהיחס בין המספרים קבוע (ראה דוגמאות 2– 4), אך אם בוחרים בפעולות חיבור או חיסור, מוטב לבחור קבוצה של מספרים שמהווים סדרה חשבונית, כלומר, שההפרש בין המספרים הוא קבוע (ראה דוגמה 1).

הדוגמאות שהבאתי אינן ממצות את הפעילויות האפשריות במסגרת של מספרים פעולות וקבוצות, ועוד נחזור לקבוצות בהמשך. נעבור כעת למסגרת השנייה – הפונקציה. הדוגמה הבאה תמחיש את ההבדל שבין הפעילות בקבוצות לפעילות עם פונקציות.

דוגמה 7

נתונה הקבוצה {1, 2, 4, 8}

המשימה – הכנסת שינויים בקבוצה:

שינוי ראשון: הכפלת כל המספרים בקבוצה בגורם קבוע. נכפיל כל מספר בקבוצה ב-2. הקבוצה החדשה תהיה: {2, 4, 8, 16}.

הערה: הקבוצה המקורית, הפעולה, והקבוצה שהתקבלה נקראות יחד בשם פונקציה.

שינוי שני: נמשיך מהקבוצה החדשה שהתקבלה, השינוי יהיה הוספת 2 לכל מספר בקבוצה. הקבוצה החדשה שתתקבל: {4, 6, 10, 18}.

שינוי שלישי: חלוקת כל מספר ב-2. נקבל את הקבוצה: {2, 3, 5, 9}.

תרגיל: הכנס שינויים נוספים בעזרת פעולות וקבל עוד שתי קבוצות.

מהדוגמה אפשר לראות, שבפעילות בפונקציות מתייחסים לכל הקבוצה הנתונה ומקבלים קבוצה חדשה. הפעילות הזאת מאפשרת לראות חוקיות במידה והיא קיימת, כפי שרואים בדוגמה 8.

דוגמה 8

נתונה הקבוצה {1000, 100, 10, 1}, נבחר בפעולה חילוק ב-10, ונקבל את הקבוצה: {100, 10, 1, $\frac{1}{10}$}.

אם נמשיך עם אותה הפעולה נקבל את הקבוצה: {10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$}, ואם נמשיך פעם נוספת נקבל את הקבוצה: {1 , $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$}. אפשר כעת להמשיך ולבחור בפעולות הפוכות, כמו, כפל ב-10 או כפל ב-100 וכו'.

תרגילים מהסוג הזה מאפשרים ללמוד את הנושא (במקרה הזה של כפל וחילוק, חזקות של 10 ועוד) בצורה מובנית וכמעט אוטומאטית - במובן החיובי של המושג הזה.

להלן דוגמה לפעילות אפשרית נוספת בפונקציות.

דוגמה 9

נתונות שלוש קבוצות:

א) {1,2,3,4}, ב) {2, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$} ג) {0.1,0.2,0.3,0.4}

1) איזו פעולה ביצענו על המספרים בקבוצה א, כדי לקבל את המספרים בקבוצה ב? (תשובה: חילוק ב-2.)

2) איזו פעולה ביצענו על המספרים בקבוצה ב, כדי לקבל את המספרים בקבוצה א?

3) איזו פעולה ביצענו על המספרים בקבוצה ג, כדי לקבל את המספרים בקבוצה ב? וכדומה.

בסך הכל אפשריות כאן שש פעולות.

דוגמה 10

נתונות שתי קבוצות: א) {4, 3, 2, 1}, ב) {0, 0, 0, 0}. איזו פעולה ביצענו על המספרים בקבוצה א, כדי לקבל את המספרים בקבוצה ב? איזו "פעולה" ביצענו על המספרים בקבוצה ב, כדי לקבל את המספרים בקבוצה א? דוגמה 10 ממחישה את התכונה המיוחדת של האפס, שבמקרה הזה ניתן לנסחה כך: כפל באפס איננו ניתן לביטול על-ידי פעולה "הפוכה". באופן כללי הפעילויות עם פונקציות מתחלקות לשני סוגים עיקריים.

סוג אחד: נתונה קבוצה ובוחרים (או מקבלים כנתון) כמה פעולות המאפשרות ליצור מהקבוצה המקורית קבוצות נוספות. (דוגמאות 7, 8)

סוג שני: נתונות 2 קבוצות (או יותר) והתלמיד צריך לגלות איזו פעולה בוצעה על קבוצה אחת כדי לקבל קבוצה אחרת. (דוגמאות 9, 10)

בשתי הדוגמאות הבאות אנו משתמשים בקבוצה כמסגרת לחיבור שאלות בנושאים שלקוחים מחיי היומיום. ההנחיות כאן הן כלליות מאוד וחופש הפעולה גדול יותר.

דוגמה 11

נתונה קבוצה של מושגים הקשורים לקניית מוצרים: {מוצר, מחיר, אחוז התייקרות, אחוז הנחה.} מותר להשתמש במונחים מהקבוצה ובמספרים שלמים, בין 0 ל- 100, כדי לחבר שאלות, או כדי לחבר טענות. למשל :

1) מחירו של מוצר 100 שקלים, הוא התייקר פעמיים, בכל פעם בשיעור של 10 אחוז. מה מחירו אחרי שתי ההתייקרויות?

2) מחיר מוצר 60 שקל. בכמה אחוז צריך מחירו להתייקר, כדי שמחירו החדש יהיה 120 שקל?

3) טענה: אם מחירו של מוצר מתייקר ב-100 אחוז, אז המחיר החדש גדול פי 2 מהמחיר הישן. אמת/שקר?

דוגמה 12

נתונה קבוצה של מושגים הקשורים לתנועה: {דרך, זמן, מהירות, מהירות ממוצעת.} מותר להשתמש במונחים מהקבוצה ובמספרים שלמים, בין 0 ל-1000, כדי לחבר שאלות, או כדי לחבר טענות. למשל:

1) מהירותו של הולך רגל היא 4 קילומטר בשעה. בתוך כמה זמן יעבור מרחק של 6 קילומטר?

2) מכונית עוברת מרחק של 140 קילומטר במשך 3 שעות. מהי המהירות הממוצעת של המכונית?

3) המרחק בין שתי מכוניות שנמצאות בתנועה הוא 400 מטר. אם ידוע שהן יפגשו אחרי דקה, מה ההפרש בין המהירויות של המכוניות?

מדוגמאות 11, 12 אפשר ללמוד שמסגרת של קבוצה כבסיס לחיבור שאלות, יכולה לשמש לעיון וללימוד של תחומים נוספים, כמו למשל, פיסיקה וטכנולוגיה.

בשתי הדוגמאות הבאות משמשת הקבוצה כמסגרת כללית לדיון.

דוגמה 13

נתונה קבוצה של קבוצות ושל פעולות. הקבוצה כוללת שתי קבוצות אינסופיות ואת ארבע פעולות החשבון: {קבוצת המספרים הזוגיים (0, 2, 4..), קבוצת המספרים האי-זוגיים (1, 3, 5..) , ארבע פעולות החשבון (+, –, x, :)}. המטרה שלנו לכתוב טענות אמיתיות/שקריות וכן לנסח שאלות.

למשל טענות:

- המכפלה של שני מספרים זוגיים היא תמיד מספר זוגי (טענת אמת).
- המכפלה של מספר זוגי במספר אי-זוגי היא תמיד מספר אי-זוגי (טענת שקר).

ושאלות:

- האם המנה של שני מספרים זוגיים היא תמיד מספר זוגי?
- האם המנה של שני מספרים אי-זוגיים היא תמיד מספר זוגי?

הערה: בשתי השאלות צריך להחליט מראש אם מתכוונים רק למנות שהן מספרים שלמים. כאן המקום להעיר ולהסב את תשומת הלב לעובדה חשובה - כאשר המורה או התלמידים מנסחים טענות ושאלות, הן יכולות להיות בהתחלה מעורפלות, או מנוסחות בצורה דו-משמעית. הדבר יכול להפרות את הדיון, לתת אפשרות לתלמידים רבים יותר להשתתף, ולאפשר לתלמידים להתנסות בטעויות ובחוסר בהירות, שהם, כמובן, שלבים חשובים בדרך להבנה או ל"תגלית".

דוגמה 14

נתונה קבוצה של מושגים בהנדסת המישור {משולש, מרובע, מצולע, נקודה, ישר}. התלמיד או המורה משתמשים במושגים מהקבוצה (מותר להוסיף מושגים רלוונטיים נוספים), כדי לנסח טענות אמיתיות או טענות שקריות וכן כדי לנסח שאלות.

לדוגמה טענות:

- כל המשולשים הם מצולעים. (אמת)
- כל מלבן הוא מרובע. (אמת) כל מרובע הוא מלבן. (שקר)
- במלבן כל הזוויות שוות. (אמת)

ושאלות:

- נתונות שתי צלעות של מלבן: 3 מטר, ו-5 מטר. מהו היקפו של המלבן?
- האם כל הזוויות במשולש שוות זו לזו?
- מהי הזווית הגדולה ביותר שיכולה להיות במשולש?

דוגמאות 13, 14 מהוות אתגר מעניין, ניתן לנסח טענות ושאלות ברמות שונות של הכללה ושל קושי. משימות מהסוג הזה יכולות לשלב רמות גבוהות של חשיבה מתמטית, כולל השלב של "חיפוש פתוח" המתואר אצל שמואל אביטל ושרה שטלוורס (1970)[2].

נחזור לרעיון של קבוצה עם תרגילים חיצוניים ותרגילים פנימיים, שהוצג בדוגמאות 1-3. ישנן קבוצות עם פעולה שבהן כל התרגילים הם פנימיים, למשל, בקבוצה {1, 0} עם פעולת הכפל, קיימים 3 תרגילים:

1 = 1x1 , 0 = 0x1 , 0 = 0x0 , וכולם פנימיים.

השאלה היא האם קיימות עוד קבוצות כאלה? התשובה אינה פשוטה, בקבוצה {0} עם פעולת הכפל (או עם פעולת החיבור) קיים רק תרגיל אחד והוא פנימי. אפשר למצוא עוד דוגמה אחת או שתיים מסוג זה, אך באופן כללי לגבי קבוצה שיש בה יותר ממספר אחד, מתברר שכדי שכל התרגילים שלה יהיו פנימיים, הקבוצה צריכה להיות אינסופית. למשל, הקבוצה של כל המספרים הטבעיים, כולל האפס {...4, 3, 2, 1, 0} היא, כמובן, אינסופית, ולגבי פעולת החיבור (או הכפל) כל התרגילים שבקבוצה יהיו פנימיים. אם נבחר בפעולת החילוק (או החיסור) לא יהיו כל התרגילים פנימיים.

דוגמה 15

הקבוצה {1000..., 100, 10, 1} היא אינסופית, ולגבי פעולת הכפל כל התרגילים שלה הם פנימיים.
(למשל: 100X1000=100,000 והמספר 100,000 נמצא בקבוצה) אך לגבי פעולת החיבור, כל התרגילים הם חיצוניים, (למשל: 1100=1000+100 והמספר 1100 לא נמצא בקבוצה).
בקבוצה האינסופית {40..., 30, 20, 10, 0} מקבלים שכל תרגילי החיבור הם פנימיים וגם כל תרגילי הכפל הם פנימיים. (למשל: 10X20=200 וגם 10+20=30. שניהם בקבוצה.)
משימה 1 – מצא קבוצות אינסופיות נוספות שבהן כל תרגילי הכפל, או כל תרגילי החיבור, הם תרגילים פנימיים.
משימה 2 – נסה למצוא קבוצה אינסופית שבה כל תרגילי הכפל וגם כל תרגילי החילוק הם פנימיים.

תלמידים יודעים בצורה אינטואיטיבית שלמספרים אין סוף, ושלכל מספר שנבחר נוכל למצוא מספר גדול ממנו. הדוגמה האחרונה מאפשרת להם לדון בנושא של האינסוף בצורה של שאלות קונקרטיות. גם אם תלמידים יצליחו להתמודד עם הנושא הזה רק תוך כדי הנחיה של המורה, הרי עצם החשיפה וניסיון ההתמודדות הם משמעותיים. רעיון האינסוף הוא בעל חשיבות גדולה, הן במתמטיקה והן בתחומים אחרים.

סיכום

הוראת מתמטיקה היא חלק ממעשה חינוכי כולל. ברצוני לנצל הזדמנות זאת כדי להביא קטע מנאומו של ז'אן ז'ורס (מורה ומדינאי צרפתי, 1859 – 1914) לפני מורים בעיר טולוז בשנת 1880: "בידכם הופקדו נשמות הילדים, רוחם ושכלם! אתם אחראים בפני המולדת! ילדים אלה שנמסרו לכם, עליהם יהיה לא רק לקרוא מכתב, להבין את הכתוב על פני שלט בקצה הרחוב, ולעשות את פעולות החיבור והכפל. הם צרפתים! ועליהם להכיר את צרפת, את כתיבת ארצם ותולדותיה, את נופה ואת נשמתה. הם יהיו אזרחים ועליהם לדעת מהי דמוקרטיה חופשית, מהן הזכויות שנותן להם שלטון העם, ולאחרונה הם יהיו לאנשים – ומן ההכרח שידעו את שורש עוניינו: האנוכיות רבת הצורות! ומה עיקר גדולתנו: הכרת ערך עצמנו, זאת הממוזגת עם רגש האהבה. נחוץ שידעו לתאר לעצמם בעיני רוחם ובקווים רחבים את המין האנושי כשהוא מכניע בקרבו לאט לאט את מידות החיות שבאינסטינקט, להבחין היטב מהם יסודות המפעל הענקי המכונה בשם תרבות. חייבים להראות להם את גודל המחשבה, להורותם כבוד הנפש ופולחנה, לעורר בליבותיהם את רגש האינסוף שהוא יסוד חדוותנו וכוחנו – כי רק בפעום בלבנו הרגש הזה, נתגבר על כל הרע, על האפלה ועל המוות."

הגישה שפיתחתי ושתוארה כאן בקווים כלליים, מנסה למצוא את האיזון שבין חופש לבין מסגרת (או בלשונו של שרפשטיין, איזון בין ספונטאניות לבין סדר) וליצור דינאמיקה שבה מתקיים תהליך מתמשך ורציף של למידה שכוללת תמיכה ומתן עצמאות (ויגודצקי, 2004). דינאמיקה זאת יוצרת מצב שבו ההבחנה בין מי ששואל שאלה לבין מי שמשיב עליה, נעשית לא כל כך רלוונטית.

הדוגמאות שהבאתי – אף שאינן מצולמות ולכן אינן יכולות להעביר את המראות מהכיתה – מראות שהדבר אפשרי, לפחות בחלק מן המקרים. בחרתי בדרך כלל בדוגמאות הפשוטות ביותר האפשריות, ולא ציינתי לאיזו כיתות מתאימות הדוגמאות, אך המסגרת הגמישה של קבוצות ושל פונקציות מאפשרת לבנות פעילויות בטווח רחב מאוד של נושאים ושל רמות.

הגישה שתיארתי מעודדת למידה שהדיון הוא חלק חשוב ממנה, והיא מנסה להראות את המושגים בהקשר הכללי. בנייה של קבוצות ושל פונקציות שמותאמות לנושאים הנלמדים, יוצרת מצב שמאפשר (בכל זאת) תכנון ובקרה של הפעילות הלימודית כחלק אינטגראלי ממנה, התלמידים משתתפים בבנייה זאת וכך הם משפיעים על מהלכה של הלמידה. תכונות אלה ואחרות של הגישה הזאת עשויות לאפשר לה לממש מודלים של חינוך מתקדם (הרפז, תשס"ו).

מקורות

אביטל, ש' ושטלוורס, ש' (1970). **יעדים ללימוד מתמטיקה**, רעיונות אחדים למורים. קשר חם. חיפה: הטכניון.

אהרוני, ר' (2004). מפרגה ועד המחשב, מסע מרתק בעקבות הלוגיקה המתמטית. **אלף אפס , גיליון 21**.

ברינגייה, ז' ק' (1988). **הלמידה האנושית, שיחות עם פיאז'ה**. הוצאת כתר.

גביש, ת' (תש"ס). אל תיתנו להם בדידים. **הד החינוך**, שבט ,תש"ס.

גואטה, ע' (תש"ס). לפתור להבים ולשאול. **על"ה, 25**.

הרכבי, א' ופרידלנדר, א' (תשס"ז). תובנות על הוראת מתמטיקה, מבט מבעד שש תכניות לימודים. **הכנס הארצי של החינוך המתמטי בביה"ס היסודי תשס"ז**. אוניברסיטת חיפה, מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי והקדם יסודי. (דו"ח נמצא באתר של המרכז.)

הרפז, י' (תשס"ו). המודל השלישי בחינוך. **הכנס מחשבה רב־תחומית בחינוך ההומניסטי**. סמינר הקיבוצים.

ויגודצקי, ל' (2004). **למידה בהקשר חברתי** (עמ' 119 -128).הוצאת הקיבוץ המאוחד.

מאונטוויטן, מ' (תשס"ז). סטנדרטים במתמטיקה לבית הספר היסודי. **הכנס הארצי של החינוך המתמטי בביה"ס היסודי תשס"ז**. אוניברסיטת חיפה, מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי והקדם יסודי.

שרפשטיין, ב' (תש"ל). **האמן בתרבות העולם** (עמ' 139-146). הוצאת עם עובד.

Kleine, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press.

הערות

1. הציטוט מדברי קליין מופיע גם במאמר של ישראל קליינר: "התפתחות תורת החבורות, סקירה קצרה", שנדפס ב-1994 ע"י קשר חם, הטכניון חיפה.
2. שלוש רמות החשיבה המתמטית המוצעות כאן הן: ידע, חשיבה אלגוריתמית וחיפוש פתוח. הרמה השלישית - חיפוש פתוח, מתאימה לשתי הקטגוריות הגבוהות בטקסונומיה של בלום: אנליזה וסינתזה.

על מחבר המאמר:

עמוס גואטה

מורה למתמטיקה (לשעבר) ומומחה למכשירי שמיעה. בוגר האוניברסיטה הפתוחה במדעי הטבע והמתמטיקה. מלמד בחוג להפרעות בתקשורת באוניברסיטת חיפה. מתעניין בבעיות חינוך בכלל ובחינוך מדעי בפרט.

עוד על 60

"כל המבקר חולה נוטל אחד משישים בצערו"

(מדברי רבי אחא בר חנינא, נדרים, לט-ב)

נשאלת השאלה -

אם יגיעו שישים איש לבקר חולה, האם הוא יבריא?

לצערנו אין זה כך. כוונת הפסוק היא שכל מבקר נוטל $\frac{1}{60}$ מחוליו של החולה באותו רגע. כלומר, גם אם באים שלושה אנשים ביחד לבקר חולה, אין הם נוטלים $\frac{1}{60}$ מחוליו, אלא הראשון נוטל $\frac{1}{60}$, השני נוטל $\frac{1}{60}$ ממה שנשאר לאחר ביקורו של הראשון ואילו השלישי נוטל $\frac{1}{60}$ ממה שנשאר לאחר ביקורו של השני. וכאן ניתן לשאול: האם ייתכן מצב שיגיעו הרבה מאוד מבקרים, יותר מ- 60, ויטלו את כל חוליו של החולה? אפשר להציג את חוליו של האדם כ- 1 ולחשב איזה חלק מחוליו יישאר לאחר ביקור ראשון, שני וכו'. בהצגה מתמטית כזו אפשר לראות שככל שירבו המבקרים המחלה הולכת ונחלשת. אולם, לצערנו, לא תעלם לגמרי כתוצאה מהביקורים. כלומר, נקבל סדרה של מספרים השואפים ל- 0 אולם לעולם לא יגיעו אליו. סדרה כזו יכולה להמחיש היטב גם לתלמידים הצעירים את המשמעות של אין-סופיות המספרים והצפיפות בקטע שבין 0 ל-1.

ובאשר לחולה, אמנם על-פי המודל המתמטי נראה כאילו מחלתו אינסופית, אולם למרבית המזל בנוסף למבקרים יעמדו לעזרתו חוסנו של גופו ותרופות שיצטרפו למודל המתמטי והחולה יבריא.

מקורות:

מ. גור, נ. זהבי. מצוות ביקור חולים ... ומערכת E , שבבים. תיק 8.