מהי ההשפעה של היכרות הילדים עם שמות של צורות שונות על האופן בו הם ממיינים אותן?

בעבודתנו עם ילדי הגן התרשמנו כי צורות שהילדים הכירו את שמן מוינו נכון כלא- משולשים. לאור זאת, מתעוררות שאלות לגבי מיון של צורות אחרות. למשל, האם ילדים המכירים את צורת הטרפז ויודעים את שמה יטענו כי צורה זו אינה מרובע כי "היא טרפז"?

מהן ההשלכות המעשיות של המיון שהצענו על עבודה עם ילדים בגן?

- האם רצוי להציג קודם צורות ידידותיות (משולשים ולא-משולשים) ובשלב מאוחר יותר, צורות לא ידידותיות?
- האם רצוי לעסוק תחילה במשולשים בלבד (ידידותיים ושאינם ידידותיים) ורק לאחר מכן לעסוק בלא-משולשים?
- מי הקבוצה הכוללת? האם כדאי לכלול אי-דוגמאות (לא-משולשים) שהן צורות דו-ממדיות בלבד?

שאלות אלה ושאלות רבות נוספות שאין עליהן מענה בספרות המקצועית דורשות מחקר נוסף.
במהלך השנה האחרונה, במסגרת פרויקט "להתחיל נכון: חשבון בגן" בשיתוף עם קרן רש"י, אנו שוקדות על ניסיון להשיב, באמצעות מחקר מלווה, על שאלות אלה.

מקורות

הרשקוביץ, ר' (2000). אספקטים קוגניטיביים בלמידה ובהוראה של גיאומטריה. אצל ג. שמאע (עורכת) **עיונים בחינוך מתמטי** (עמ' 137-154). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

קובלר, ש' (2003). פיתוח ההבנה הגיאומטרית בגיל הרך. **מספר חזק 2000, גליון 6**, 20-23 .

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics, 6* (8), 482-488.

Fox, T. B. (2000). Implications of research on children's understanding of geometry. *Teaching Children Mathematics,* 6(9), 572-576.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

על מחברות המאמר:

פרופ' דינה תירוש ופרופ' פסיה צמיר

חברות סגל בחוג להוראת המדעים בבית הספר לחינוך באוניברסיטת תל אביב. תחומי העניין המרכזיים שלהן: אינטואיציה וחשיבה מתמטית והכשרה וקידום מקצועי של מורים. בשנים האחרונות הן מתמקדות, בין היתר, במחקר, פיתוח והפעלת התכנית: להתחיל נכון - חשבון בגן.

אחוזים וריבוע האחוזים

מיכאל קורן

מבוא

במאמר זה יוצג נושא האחוזים ושימושים של מושג האחוז, כשהגישה למושג האחוז שונה מהדרך המקובלת להוראת האחוזים.

הגדרת האחוז כאן לא תתבסס על מושג השבר (האחוז כמאית) אלא דווקא על האחוז כמושג המאפשר להימנע, לעתים, מהצורך בשברים. בדרך זו מושג האחוז מוצג באופן דומה ליחידות מידה, שבהן הוכנסו יחידות משנה, כדי למנוע צורך בעבודה עם שברים.

לדוגמה, הסנטימטר הוא מאית המטר. העובדה שהסנטימטר הוא יחידה מוגדרת (הנגזרת אמנם מהמטר), מאפשרת במקרים רבים לחשב ולמדוד בלי להתייחס להיותו של הסנטימטר חלק של המטר. דוגמה אחרת היא, הוספת הדקות ואחר כך השניות כחלוקות משנה של השעות כיחידות זמן. בדרך זו נגדיר את האחוז כאחד למאה. השם האנגלי לאחוז (שבא מהלטינית),

per cent פירושו המילולי הוא, אכן, "(אחד) למאה". בהגדרה זו נשתמש לפתרון הבעיות הקשורות באחוזים. להלן יוצעו מספר פעילויות להבהרת המושג והשימושים בו.

פעילות מקדימה

על כל המוצרים בחנות נוסף מס של 10%.

בטבלה שלפניכם מופיעים: המחיר בשקלים של מוצרים שונים שבחנות (ללא המס), המס בשקלים, המחיר כולל המס בשקלים, והיחס בין המחיר כולל המס למחיר לפני המס. (יחס זה גדול כמובן מ-1, כי המחיר כולל מס גבוה מהמחיר ללא מס.)

א. מלאו את החסר בטבלה. מותר להיעזר במחשבון רק בשורה האחרונה.

מחיר ללא מס	200	400	300	40	20					
מס	20					50	15			
מחיר + מס	220							660	275	165
יחס בין המחיר הכולל מס למחיר ללא מס	1.1									

ב. מצאו קשרים בין משבצות באותה שורה בטבלה. למשל:
- מדוע המס בעמודה שבשורה הראשונה שלה כתוב 400, כפול מהמס שבעמודה שבשורה הראשונה שלה כתוב 200?
- מה הקשר בין המחיר הכולל מס בעמודה של 200 ובעמודה של 20? מדוע?
- מצאו קשרים נוספים והכלילו.

ג. ליאורה אומרת שכדי למצוא את המחיר הכולל מס, אפשר לכפול את המחיר ללא מס ב- 1.1. האם היא צודקת? נסו להסביר מדוע היא צודקת, או מדוע אינה צודקת.

ריבוע האחוזים

כהמחשה לרוב השאלות הקשורות באחוזים, נשתמש בריבוע האחוזים. זהו ריבוע בן 100 משבצות, כלומר, ריבוע של 10 על 10 משבצות. לכל משבצת בריבוע האחוזים נתייחס כאל תא בו מאכסנים מספר או כמות. **ההסכם הוא שתמיד בכל התאים יש אותו המספר.**

דוגמה: אם ידוע לנו שבתא מסוים נמצא המספר 4, אז סכום המספרים בריבוע האחוזים הוא 400, כי גם בכל תא אחר נמצא המספר 4, ויש 100 תאים. כלומר, הכמות הכללית היא 400.

מספר שאלות שמומלץ להציג להבהרת הרעיון של ריבוע האחוזים:

- אם בכל תא יש 12 ש"ח, מהי הכמות הכללית בכל ריבוע האחוזים?

- סכום המספרים בשני תאים בריבוע האחוזים הוא 8. מהו סכום המספרים הנמצאים בריבוע האחוזים?
רמז: איזה מספר נמצא בכל אחד משני התאים?

- אם הכמות הכוללת בריבוע האחוזים היא 300 שקלים, אז בכל תא יש 3 שקלים. אם הכמות הכוללת היא 50 שקלים, אז בכל תא יש חצי שקל.
מהי הכמות בכל תא, אם בריבוע האחוזים יש 150 גרם אגוזים?

דוגמאות נוספות:

נניח שבבית קפה משלמים עבור האבטחה, שקל אחד על כל מאה שקלים בחשבון. כלומר, אם החשבון הוא של 400 ש"ח, אז יש לקחת עבור האבטחה 4 שקלים (אחד לכל מאה, ויש 4 מאות).

אם נציג דוגמה זו בעזרת ריבוע האחוזים, הרי שבכל הריבוע יש 400 ש"ח. בכל תא - 4 ש"ח, ולכן בכל תא יש אחוז אחד של 400 השקלים.

לפי הגדרת האחוז שהוצגה לעיל, נוכל להגיד שאחוז אחד של 400 זה 4. כלומר, בכל תא בריבוע האחוזים, נמצא אחוז אחד של הכמות הכוללת הנמצאת בריבוע האחוזים. בחמישה תאים, למשל, נמצאים 5% של הכמות הכוללת. ב-100 התאים נמצאים 100% שהם הכמות כולה.

שאלה נוספת להבהרת הרעיון:

בנק מוסיף לחשבון שקל אחד בחודש על כל מאה שקלים המופקדים בחשבון.

א. נסחו את האמור בשורה הראשונה תוך שימוש במושג האחוז.

ב. ליעקב היו בחודש דצמבר 300 ש"ח בחשבון. כמה שקלים הוסיף הבנק לחשבונו?

ג. תארו את הנתונים בריבוע האחוזים. (מספיק לרשום את מספר השקלים בתא אחד.)

ד. אם ליצחק היה בחשבון פי 5 יותר כסף מאשר ליעקב, פי כמה גדול הסכום שהוסיף הבנק ליצחק, לעומת הסכום שהבנק הוסיף ליעקב?

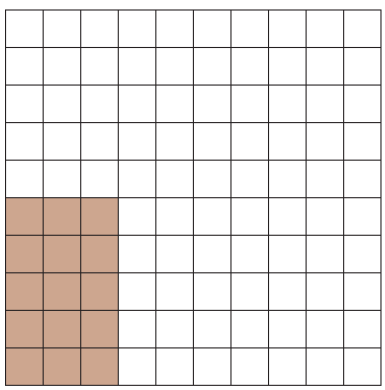
מרכיבי הקשר הבסיסי

בקשר בין אחוזים לכמות הכוללת יש שלושה מרכיבים:
א. מרכיב אחד הוא הכמות הכוללת שלגביה מחשבים את האחוז, לכמות זו נקרא **הכמות הבסיסית.**
ב. מרכיב שני הוא מספר האחוזים (או כפי שמקובל לקרוא למספר זה - **האחוז**).
ג. מרכיב שלישי הוא הערך המתקבל כשלוקחים את האחוז הדרוש מתוך הכמות הכוללת. לערך זה נקרא **ערך האחוז.**
דוגמה: 3% של 200 הם 6. הכמות הבסיסית היא 200, האחוז הוא- 3 וערך האחוז הוא 6.

נעבור לדוגמאות לחישוב אחד המרכיבים על-פי שני המרכיבים האחרים, בשלושת המקרים האפשריים.

חישוב ערך האחוז

הנחה של 15% פירושה, שמכל 100 שקלים שיש לשלם, המוכר מוותר על 15 שקלים.
לכן, הנחה של 15% מ- 500 ש"ח הם 15X5=75 ש"ח, שכן 500 הם 5 מאות, ומכל מאה מפחיתים 15 שקלים מהמחיר.
מצב זה יודגם בריבוע האחוזים הבא:



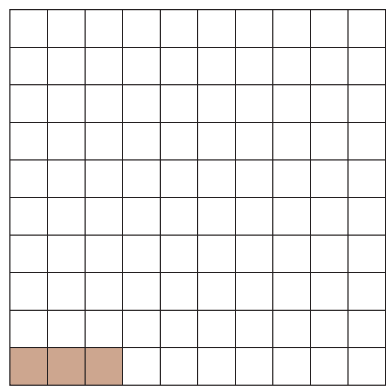
מאחר ומדובר ב- 500 שקלים, בכל תא (בכל משבצת) יש 5 שקלים. 15% הם 15 משבצות, ומאחר ובכל תא יש 5 שקלים, אז ב- 15 המשבצות יש 75 שקלים. כלומר, 15% של 500 שקלים הם 75 שקלים.

שאלה: מספר התושבים בישוב היה 400 והוא גדל ב- 5%.
כמה תושבים נוספו לישוב?

חישוב האחוז

דרך א: כאשר שואלים כמה אחוזים הם 9 גר' אגוזים בתוך תערובת של 300 גרם פיצוחים, שואלים בעצם, כמה גרם אגוזים יש בכל מאה גרם תערובת. התשובה היא 3%, כי 9 הגרמים מחולקים בין 300 גרם תערובת, ולכן בכל 100 גרם יש 3 גרם, דהיינו: 3 ל- 100 או 3%.

דרך ב: בריבוע האחוזים מימין יש בכל תא 3 גרם מהתערובת. נוכל להניח (לצורך החישוב) שתשעת הגרמים של האגוזים מרוכזים, ולכן הם נמצאים בשלושת התאים הצבועים. לכן האגוזים מהווים 3% של התערובת.

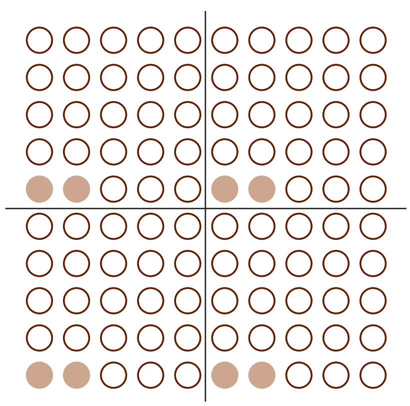


שאלה: איזה אחוז מהתערובת מהווים פיצוחים אחרים (שאינם אגוזים)?
תשובה: מהציור רואים שיש 97 תאים שבהם תערובת ללא אגוזים. לכן התשובה היא 97%.

לגבינות נהוג לקרוא בשמות כגון "גבינה של 5%", "גבינה של 23%" וכו'. אומרים שגבינה היא גבינה של 5%, אם השומן בגבינה מהווה 5% של משקלה (וכך כמובן לגבינה 9%, שבה השומן מהווה 9% ממשקל הגבינה, וכו').
מכאן שבגביע שיש בו 500 גרם גבינה ויש בו 10 גרם שומן, הגבינה תהיה גבינה של 2% מאחר ואחוז השומן בה הוא 2%.

שימו לב להבדל בין דרך א לדרך ב בחישוב האחוז:
כשחישבנו את האחוז בדרך א, "חילקנו" את האגוזים בין המאות. 300 הם שלוש מאות, ולכן חילקנו 9:3 וקיבלנו 3 ל- 100 או 3%.
בדרך ב, כשחישבנו את האחוז (שמהווים האגוזים) בעזרת ריבוע האחוזים, חישבנו תחילה כמה זה אחוז אחד של הכמות, כלומר, כמה גרם יש בכל תא. אחר כך חישבנו כמה תאים יש לקחת, על מנת שיהיו לנו 9 גרם. גם כאן חילקנו 9:3 הפעם כדי למצוא את מספר התאים. מספר התאים הוא האחוז שמהווים תשעה גרם בתערובת של 300 גרם.

התהליך שתואר לעיל לחישוב האחוז מתאים כמובן לכל כמות בסיסית. יחד עם זאת, כשהכמות הבסיסית קטנה מ- 100, אפשר, לפעמים, למצוא בקלות את האחוז בדרך נוספת.
לדוגמה, נניח שבקבוצה של 25 תלמידים, שניים משחקים שחמט. מהו אחוז השחקנים בקבוצה? אם בכל קבוצה של 25 יש שני שחקנים, אז בארבע קבוצות של 25 (שהם 100 תלמידים) יהיו 8 שחקנים, והאחוז הוא לכן 8%.



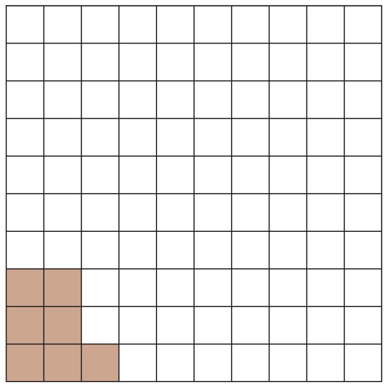
בציור רואים ארבע קבוצות של 25 ובכל אחת שני עיגולים צבועים. יש 8 עיגולים צבועים בתוך 100 העיגולים המצוירים, ולכן העיגולים הצבועים מהווים 8% של העיגולים בקבוצה.
כמובן שדרך זו עבדה מפני ש- 100 הוא ארבע פעמים 25.
דרך זו תעבוד גם עבור קבוצות של 20, 10 או 50.

תרגיל: מצאו בשתי דרכים לפחות, מהו אחוז הפקקים הכחולים, אם בקבוצה של 20 פקקים, שלושה מהפקקים הם כחולים.

חישוב הכמות הבסיסית

נציג את חישוב הכמות הבסיסית בעזרת דוגמה:
ידוע ש- 14 מתלמידי המחזור אוהבים מתמטיקה, והם מהווים 7% של המחזור.
כמה תלמידים יש במחזור זה?

אם 14 זה 7% של מספר, אז אחוז אחד הוא 14:7=2 ולכן המספר הוא 200 (כי אחוז פירושו אחד למאה, ולכן 2 זה אחוז אחד של 2 מאות.).
נסתכל בריבוע האחוזים. איננו יודעים עדיין מה הכמות הבסיסית, אך מיד נמצא מה נמצא בכל תא:



7% הם 14 תלמידים. בפינה השמאלית התחתונה השחרנו שבעה תאים. בחלק זה יש 14 תלמידים. כדי שבשבעת התאים יהיו 14, בכל תא חייבים להימצא 2. מכאן שבריבוע יש 2 תלמידים בכל אחת מהמשבצות, ולכן בריבוע כולו יש 200 תלמידים. מצאנו, אפוא, שמספר התלמידים במחזור הוא 200.

להלן הצעה לתרגילים ליישום הרעיונות שהוצגו.

תרגילים

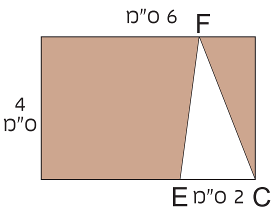
1. אורך של כביש היה 150 ק"מ. סללו עוד 30 ק"מ של הכביש. בכמה אחוזים גדל אורך הכביש?

2. מנייה עלתה מ- 300 ש"ח ליחידה ל- 324 ש"ח ליחידה. בכמה אחוזים עלתה המנייה?

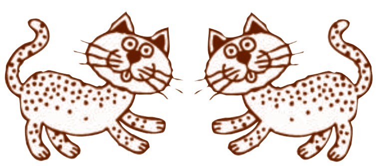
3. תמורת ספר וחוברת שולמו 240 ש"ח.
למרות שמחיר הספר עלה ב- 10% ועל החוברת ניתנה הנחה של 20%, מחיר הקנייה לא השתנה. מה היה מחיר הספר, ומה מחיר החוברת?

4. כאשר הגדילו אורך של מלבן ב- 5%, ללא שינוי הרוחב, שטח המלבן גדל ב- 45 סמ"ר. מה היה שטח המלבן לפני השינוי?

5. בציור משמאל, אורך הצלע הארוכה במלבן 6 ס"מ ואורך הצלע הקצרה 4 ס"מ. אורך בסיס המשולש FEC הוא 2 ס"מ. איזה אחוז מהווה שטח המשולש משטח המלבן?



6. בחצר 300 חתולים, 27 מהם שחורים.
מה אחוז החתולים השחורים?



7. ערבבו 200 גרם גבינה של 5% עם 200 גרם גבינה של 9%. מהו אחוז השומן של הגבינה שהתקבלה?

8. מוצרים שונים התייקרו באחוזים שונים. המחירים בטבלה הם בשקלים.
א. השלימו את הטבלה הבאה. במילוי השורה האחרונה נסו בכל עמודה לנחש תחילה את היחס. בדקו את תשובותיכם.

מחיר קודם	200	20	40	400	20	30	300	400	150	50	80
אחוז התייקרות	10%	10%	5%	5%	30%	20%	2%				
התייקרות בשקלים									15		
מחיר חדש								460	165	60	120
יחס מחירים חדש/ קודם											

ב. דוד אומר: "20% של 50 זה תמיד כמו 50% של 20, כאילו". למה הוא מתכוון? האם הוא צודק?

אחרי שמבינים את דרכי החישוב במקרים השונים, אפשר להקל על הזיכרון אם רושמים את החישוב בנוסחה.

נוסחה לחישוב הכמות הבסיסית

(על-פי האחוז וערך האחוז)

נסמן ב- K את הכמות הבסיסית. נסמן ב- P את מספר האחוזים (דהיינו, את האחוז) ונסמן ב- E את ערך האחוז. נחזור על מה שעשינו כדי לקבל את הכמות הבסיסית על-פי האחוז וערך האחוז: תחילה חישבנו את הערך של אחוז בודד על-ידי חילוק ערך האחוז באחוז. באותיות: (E:P). כעת מאחר והכמות הבסיסית גדולה פי מאה מהערך של אחוז אחד, עלינו לכפול ב- 100 ונקבל:

$$K=\frac{E}{P}\cdot 100 \quad \text{או} \quad K=\frac{100E}{P}$$

שימו לב שכתבנו את הנוסחה רק אחרי שידענו והבנו כיצד מוצאים את הכמות הבסיסית. נוסחה צריכה לשמש כלי זיכרון והרחבה - לתהליך שאנחנו כבר יודעים לבצע. יכולנו לכתוב נוסחאות גם לחישוב E על-פי K ו- P, ולחישוב P על-פי K ו- E, אך כפי שנראה די באחת מהנוסחאות כדי לחשב, בכל מקרה, את אחד מהגדלים על-פי שני האחרים.

דוגמה לחישוב הכמות הבסיסית (בעזרת הנוסחה)

שאלה: אם 5% ממשכורתו של אדם הם 400 ש"ח . כמה משתכר האדם?

פתרון: נרשום בנוסחה $K=\frac{100E}{P}$ את האחוז (5%) ואת ערך האחוז (400 ש"ח).

נקבל: $K=\frac{100 \text{ X } 400}{5}=8000$

נראה מיד כיצד נוכל בעזרת הנוסחה, על-ידי כללים אלגבריים בסיסיים, לפתור גם את חישוב ערך האחוז לפי הכמות הכללית ולפי האחוז, וגם לחשב את האחוז לפי הכמות הכללית וערך האחוז.

דוגמה לחישוב ערך האחוז (בעזרת הנוסחה)

שאלה: כמה זה 5% של 110?

פתרון: נרשום בנוסחה $K=\frac{100E}{P}$ את הכמות הבסיסית שהיא 110, ואת האחוז שהוא 5.

נקבל: $110=\frac{100E}{5}$. כעת נכפול את שני אגפי המשוואה ב- 5, ונחלק ב- 100.

נקבל כי: $E=\frac{5x110}{100}=5.5$.

דוגמה לחישוב האחוז (בעזרת הנוסחה)

שאלה: מצאו, בעזרת הנוסחה לעיל, איזה אחוז מהווה 12 מ-600?

פתרון: נרשום בנוסחה $K=\frac{100E}{P}$ את הכמות הבסיסית שהיא 600, ואת ערך האחוז שהוא 12.

נקבל: $600=\frac{100x12}{P}$. כעת נכפול את שני אגפי המשוואה ב- p, ונחלק ב- 600.

נקבל כי: $P=\frac{100x12}{600}=2$.

סיכום:

במאמר זה הוצגו המושגים המרכזיים הקשורים בהוראת האחוזים, והצעות לדרכי הוראתם. בגיליון הבא של "מספר חזק 2000" נרחיב ונעסוק במושגים נוספים.

על מחבר המאמר:

ד"ר מיכאל קורן

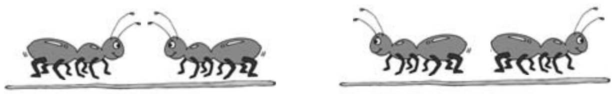
מרצה במכללת סמינר הקיבוצים.

המקרה המוזר של הנמלים על המוט

פרק מתוך ספרו של פרופ' אהרוני, "מתמטיקה, שירה ויופי" שיצא בהוצאת הקיבוץ המאוחד.

רק על עצמי לספר ידעתי
צר עולמי כעולם נמלה
"רק על עצמי", רחל (בלובשטיין), 1931-1890

על מוט באורך מטר אחד נמצאות נמלים במספר כלשהו. הנמלים נעות - חלקן ימינה, חלקן שמאלה, אבל כולן באותה מהירות: בדיוק מטר אחד בדקה. המוט צר, כרוחב נמלה אחת, וכאשר שתי נמלים נפגשות אין הן יכולות להמשיך בדרכן. במקום זה הן מתנהגות כמו כדורי ביליארד שהתנגשו, כלומר, כל אחת מהן הופכת את כיוונה וממשיכה בכיוון ההפוך, באותה מהירות.



כששתי נמלים נפגשות (כבאיור משמאל) הן הופכות כיוון (כבאיור הימני).

מדי פעם גם מגיעה נמלה לקצה המוט, ואז היא נופלת ונעלמת לבלי שוב.

האם בסופו של דבר ייפלו כל הנמלים מן המוט? ואם כן, תוך כמה זמן?

ממבט ראשון, נראה שהדבר תלוי במצב ההתחלתי, כלומר, במספר הנמלים על המוט ובמערך שלהן. אם יש הרבה נמלים, נראה שאם בכלל ייפלו כולן, זה עלול לקחת זמן רב. איך אפשר לבחון זאת?

כבר חשפנו את סודם הראשון של המתמטיקאים: הסתכלות בדוגמאות. כל חשיבה מתמטית מתנהלת כמשחק פינג-פונג מעודן בין דוגמאות והפשטות. ההבדל בין החבטות בכיוון המופשט והחבטות בכיוון הדוגמאות הוא, שאת הדוגמאות אפשר לזמן בצורה מודעת, בעוד שתהליך ההפשטה מתרחש ללא שליטה מודעת. משום כך נחוץ לפתוח בדוגמאות. כמובן, סיבה נוספת לפתיחה בדוגמאות היא, שהדוגמאות הן חומר הגלם להפשטות. ובכן, הדוגמה הפשוטה ביותר היא זו של נמלה אחת. אם הנמלה נמצאת בקצה אחד של המוט והולכת לכיוון הקצה השני, היא תיפול תוך דקה. בכל מקרה אחר היא תיפול תוך פחות מדקה. אבל לא נגענו כאן עדיין במהות הבעיה, משום שבמקרה זה לא היו התנגשויות. נתבונן, אפוא, בשתי נמלים, ונתחיל במקרה שבו, כך נדמה לפחות, ייקח להן זמן רב ליפול: שתיהן נמצאות בקצוות מנוגדים והולכות זו לקראת זו.

כעבור חצי דקה הן תיפגשנה באמצע המוט, תהפוכנה כיוון, וכעבור עוד חצי דקה הן תיפולנה, כל אחת באותו קצה שממנו יצאה. אם כך, שתיהן תיפולנה אחרי דקה אחת בדיוק. הנה דוגמה קצת יותר מסובכת: נמלה א' נמצאת בקצה הימני, נמלה ב' נמצאת בדיוק באמצע המוט, והן הולכות זו לקראת זו.

פגישתן תהיה במרחק רבע מטר מן הקצה הימני, ואחריה תלך נמלה א' עוד רבע מטר ימינה, עד שתיפול מן הקצה הימני, ואילו נמלה ב', שכבר הלכה רבע מטר, תלך שמאלה עוד שלושת רבעי המטר עד שתיפול בצד השמאלי. בסך הכול תעבור נמלה ב' מטר אחד, ומאחר שהיא הולכת מטר בדקה, הדבר יארך דקה.

זה כבר מתחיל לעורר חשד. בכל שלוש הדוגמאות (נמלה אחת, נמלים שמתחילות מן הקצה, נמלה שמתחילה באמצע) הנמלים נפלו מן המוט תוך דקה. אבל ייתכן שעלינו לעלות את דרגת הסיבוך ולהתבונן בשלוש נמלים. ניקח, למשל, מקרה שבו נמלה א' נמצאת בקצה הימני והולכת שמאלה; נמלה ב' נמצאת בקצה השמאלי והולכת ימינה; נמלה ג' נמצאת בדיוק באמצע והולכת ימינה.

לאחר רבע דקה תיפגשנה א' ו- ג', ותהפוכנה את כיוון הליכתן. ברגע הפגישה של א' ו- ג' נמצאת ג' במרחק שלושת רבעי המטר מצד שמאל, ואילו ב' נמצאת במרחק רבע מטר מצד שמאל. הנה כך:

אחרי רבע דקה

לאחר שתהפוך את כיוונה, א' תיפול עד מהרה בקצה הימני. הנמלים ב' ו- ג' הולכות זו מול זו ולכן תיפגשנה באמצע המוט. עד אז הלכה כל אחת מהן חצי דקה. כשהן נפגשות הן משנות כיוון, ותוך חצי דקה נוספת תיפולנה שתיהן. שוב, דקה! תוך דקה בדיוק לא תישאר אף נמלה על המוט! מוזר למדי, בכל המקרים נפלו כל הנמלים תוך דקה. האם יש כאן חוק כללי? האם הדבר נכון תמיד? התשובה היא "כן", וההוכחה אינה מסובכת, אבל היא דורשת הארה. כלומר, תובנה שהופכת באחת את הדברים לפשוטים בתכלית. למרבה המוזרות, ההארה אינה מוסיפה אינפורמציה, אלא דווקא להפך, מתעלמת מאינפורמציה. היא מתעלמת מזהותן של הנמלים. אם לא אכפת לנו מי הן הנמלים, מה קורה ברגע הפגישה של שתי נמלים? ובכן, למעשה לא קורה דבר. לפני הפגישה אחת הנמלים הלכה שמאלה והשנייה ימינה; אחרי הפגישה קורה בדיוק אותו דבר – גם אז נמלה אחת הולכת שמאלה והאחרת ימינה, וכל זה באותה מהירות, והרי איזו נמלה הולכת שמאלה ואיזו ימינה כלל אינו משנה לצורכי הבעיה!

המסקנה היא שאפשר להתעלם כליל מן הפגישות. מטרתן רק לבלבל. השאלה זהה לחלוטין לשאלה: נמלים צועדות על מוט באורך מטר אחד, כל אחת במהירות של מטר לדקה, בלי להתנגש ובלי לשנות כיוון. תוך כמה זמן ייפלו? בנוסח זה אין כאן חידה של ממש: כל אחת מהן תיפול תוך דקה או פחות. תלוי במרחק ההתחלתי שלה מן הקצה שלכיוונו היא צועדת.

המתמטיקאים הם עם בר מזל. משלמים להם בשביל לשחק. לנוכח המיליארדים המושקעים במחקר מתמטי ובחינוך מתמטי, אפשר היה לצפות שהם יידרשו לעסוק בנושאים שימושיים, אבל למעשה ההפך הגמור הוא הנכון. הם מרשים

המקרה המוזר של הנמלים | עמ' 62

לעצמם (בין השאר) לשחק בבעיות כמו חידת הנמלים, ובעיניהם יש לכך ערך. מדוע? משום שאת סוד שימושיותה יוצאת הדופן של המתמטיקה אפשר לראות כבר בחידה הזאת. משתקף בה כוחה העיקרי של המתמטיקה: ההפשטה. הדבר מתבטא, לפני הכול, בהצגת הבעיה. הנמלים בבעיה הן נמלים מתמטיות: נמלים אמיתיות אינן הולכות במהירות אחידה, ואינן מצייתות לחוקים כה פשוטים. הנמלים שלנו מקיימות כללים ברורים ומובחנים. המתמטיקה היא חקר מערכות המצייתות לכללים מוגדרים היטב. אבל עוד יותר מאשר בהצגת הבעיה, ניכרת ההפשטה בפתרונה. הסוד היה במציאת חוקיות פנימית, כאילו גילינו בתצלום רנטגן את המבנה הסמוי שמתחת לדברים. וחוקיות זו התגלתה כשהתעלמנו מפרט מסוים, שהתגלה כטפל – זהותן של הנמלים.

ההתעלמות מן הטפל היא תכונה עיקרית של כל חשיבה מתמטית. המתמטיקה מביאה את תהליך ההפשטה לקיצוניות. היא לוקחת עץ שנראה מורכב ומסובך, מפשיטה אותו מעליו וחושפת את הגזע. חישבו, למשל, על מושג המספר. מי שהמציא את המושג "4" הבין שלגבי חוקי החשבון אין זה משנה אם לפניו 4 אבנים או 4 עפרונות; ואם אלה עפרונות – מה צבעם וכיצד הם מסודרים. מושג הכמות אינו תלוי בפרטים טפלים מעין אלו.

הפשטה פירושה מציאת חוקיות, וחוקיות משמעה כלליות. הכלליות חוסכת מאמץ של חשיבה: במקום לחשב כמה הן 6 פעמים 7 אבנים ו- 6 פעמים 7 עפרונות, מחשבים פעם אחת ולתמיד את התרגיל, והתוצאה תהיה תקפה לגבי כל סוג של עצמים, בכל זמן שהוא. כוחה של ההפשטה הוא, אפוא, בחיסכון במאמץ. "מתמטיקה נועדה לעצלנים", אמר המתמטיקאי גיאורג פויה. "פירושה הוא להרשות לעקרונות לעבוד בשבילך". מבחינה זו חידת הנמלים היא שימושית מאוד. אמנם, ישירות אין היא מועילה לכלום, משום שאין בעולם נמלים כאלה, אבל היא מחנכת את הפותר אותה, או את לומד הפתרון, לחשיבה מופשטת. היא גם מקרינה על בעיות אחרות שבהן יופיעו עקרונות דומים. ייתכן אפילו שהיא הומצאה מתוך עיסוק בבעיה מסובכת יותר, שמקורה במציאות – תנועה של אטומים, תנועה של חבילות גלי אור ("סוליטונים"), שאכן מתנהגים בהתנגשויות כפי שמתנהגות הנמלים בפתרון – הן עוברות זו דרך זו. אין זה נדיר שבעיות מתמטיות יפות נולדות מתופעות פיזיקליות.

עוד 60

שישים שנה
של ספרי לימוד במתמטיקה

גדול מדינת ישראל במספרים

כשקמה מדינת ישראל היו בה 274000 עובדים. במשך שלש שנות קיומה נוספו בה עוד 107000 עובדים. כמה עובדים היו במדינה לאחר שלש שנות קיומה?

כשקמה מדינת ישראל היו בה 18362 טלפונים. בשנה הראשונה לקיומה נוספו בה 6324 טלפונים. ובשנה השניה לקיומה נוספו עוד 5003 טלפונים. כמה טלפונים היו במדינה בשנה השלישית לקיומה?

בשנה השלישית לקיום מדינת ישראל הגיעו לארץ 32453 עולים מעיראק, 46178 מרומניה, 26499 מפולין ו־64325 מארצות אחרות. כמה עולים באו לארץ אותה שנה?

שעור שמיני

חבור בטורים

ביום העצמאות השלישי היו בישראל הישובים הבאים

37 בגליל,

31 בשפלת עכו,

7 בעמק החולה,

16 בהרי־שומרון,

17 בעמק הירדן,

289 בשרון,

42 בעמק יזרעאל,

51 ביהודה ובדרום,

13 בעמק בית־שאן,

38 בנגב.

כמה ישובים עבריים היו באותו יום בכל ישראל?

מתוך: "חשבון"
ז. אריאל הוצאת מטכ"ל תשי"ג 1953