

משולשים ו"לא-משולשים" בגן הילדים

דוגמאות ידידותיות ודוגמאות שאינן ידידותיות של משולשים ושל "לא-משולשים"¹:

הפעילות בגנים של ירדנה ושל ענת

דינה תירוש, פסיה צמיר

מיון היא אחת המיומנויות הבסיסיות אשר בגני הילדים שוקדים על פיתוחה (משרד החינוך והתרבות, תשנ"ד, עמ' 37). התייחסות לצורות הנדסיות מזמנת כר נרחב לעיסוק במיון תוך הכרת דוגמאות ואי-דוגמאות של צורות שונות (משולשים, מרובעים, עיגולים ועוד). ניצוין כי במדינות רבות, ובכללן ישראל, מומלץ לעסוק בגני הילדים באבחנה בין דוגמאות לבין אי-דוגמאות של צורות גיאומטריות. כך, למשל, ארגון מורי המתמטיקה בארה"ב ממליץ כי "ילדים [בגן] יראו דוגמאות רבות של צורה גיאומטרית מסוימת ומגוון של אי-דוגמאות שלה. למשל, צורות הדומות למשולשים אך אינן משולשים" (NCTM, 2000, p. 98 - תרגום שלנו). מרחב הדוגמאות והאי-דוגמאות של צורות הנדסיות הוא אינסופי. ההנחיה להציג לילדים בגן דוגמאות ואי-דוגמאות רבות אינה מספקת מידע המסייע בבחירתן. השאלות המתעוררות הן: **מה לבחור? כיצד לבחור דוגמאות ואי-דוגמאות? כיצד ליצור אצל ילדי הגן דימוי מושג התואם את הגדרת המושג?** (אנו משתמשות במונחים דימוי מושג והגדרת מושג כפי שהם מוצגים במאמרם הקלאסי של Tall & Vinner, 1981 בעמוד 152. כלומר, דימוי מושג הוא "אוסף כל המבנים הקוגניטיביים הקשורים במושג, הכולל את אוסף כל התמונות המנטאליות, התכונות וההליכים הקשורים במושג". הגדרת המושג, על-פי אותם כותבים היא "האפיון המילולי של המושג"). במאמר זה נתייחס להצגת דוגמאות ואי-דוגמאות של משולשים בגני ילדים. נתמקד בתיאור מקרה, ובסימונו נעלה מספר מחשבות, רעיונות ושאלות.

הסיפור של ירדנה וענת: כיצד ילדי הגן ממינים צורות למשולשים ול"לא-משולשים"

הצורות, אחת אחת, ותשאל לגבי כל צורה: האם זה משולש? מדוע? הוחלט שהצורות תוצגנה לכל ילד בריאיון אישי. בפגישה ביניהן, לאחר ביצוע פעילות זו, ירדנה אמרה שבגן שלה כל הילדים זיהו את כל המשולשים, וידעו לומר כי כל הצורות שאינן משולשים הן "לא-משולשים". ירדנה סיכמה ואמרה שלאור הידע של הילדים, היא אינה רואה צורך לעסוק אתם בנושא המשולשים. היא הציעה להתחיל לבדוק את הידע לגבי מרובעים.

ענת, לעומתה, דיווחה כי בגן שלה מרבית הילדים זיהו רק את אחד המשולשים כמשולש. לגבי ארבעת המשולשים האחרים כל הילדים שגו ואמרו כי אלו "לא-משולשים". בנוסף, לגבי שלוש מתוך חמש הצורות שאינן משולשים, מרבית הילדים שגו ואמרו כי אלה משולשים. ענת סיכמה כי היא מרגישה מחויבות לעסוק בגן שלה במיון צורות למשולשים ול"לא-משולשים".

הגננות ירדנה וענת עובדות בגנים סמוכים, שהאקולוסייה בהם דומה (ילדי טרום חובה, גילאי 4-5). הן נוהגות לתאם ביניהן את תכנית העבודה בגנים. ירדנה וענת החליטו לעסוק עם ילדי הגנים בזיהוי משולשים. בשלב מקדים, הן החליטו לבדוק כיצד ילדים ממינים צורות למשולשים ול"לא-משולשים", לצורך התרשמות ראשונית ולשם קבלת החלטות על אופני העיסוק בנושא.

נתאר את התהליך שירדנה וענת עברו, בהנחייתנו, בהקשר למיון צורות גיאומטריות למשולשים ול"לא-משולשים".


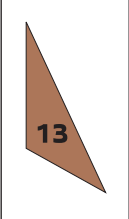
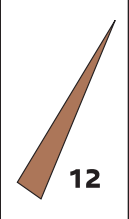
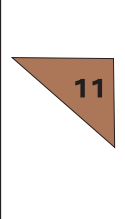
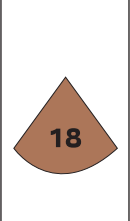

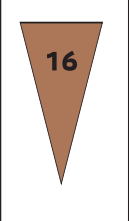
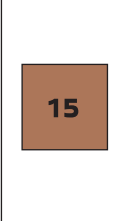
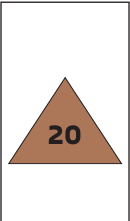
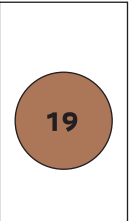
התרשמות ראשונה: בגן ירדנה מבחינים בין משולשים לבין לא-משולשים. בגן ענת - לא.

כפעילות ראשונה, ירדנה וענת החליטו שכל אחת מהן תצייר על כרטיסיות עשר צורות: חמישה משולשים וחמישה "לא-משולשים". לאחר מכן, כל אחת מהן תציג לילדים את

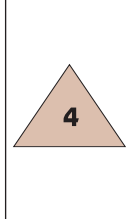
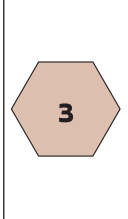
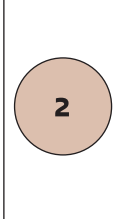
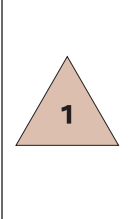
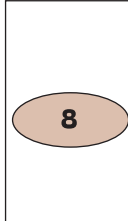
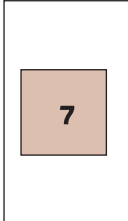
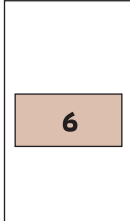
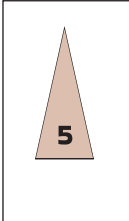
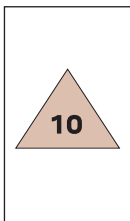
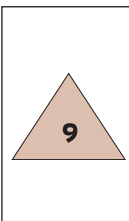
¹מונח רווח אצל גננות הוא דוגמאות ללא-משולשים. בחרנו להשתמש במונח זה ולא במונח המקובל: אי-דוגמאות של משולשים, כדי לייצג בצורה נאמנה, ככל שניתן, את השיחה עם הגננות.

הבדלים אלה בביצוע של הילדים בשני הגנים הפתיעו את ירדנה ואת ענת והעלו אצלן לבטים ותהיות.

לבטים ותהיות - האומנם בגן ירדנה יודעים למיין ובגן ענת - לא? ירדנה וענת החליטו להסתכל, יחד, על הכרטיסיות שכל אחת מהן הכינה, כדי לנסות לעמוד על הסיבות לכך שהילדים באחד הגנים השיבו נכון ובגן האחר, לא.

הכרטיסיות של ענת

הכרטיסיות של ירדנה

ירדנה וענת סיכמו כי המסקנות לגבי ידע ואי-ידע הילדים בגן של כל אחת מהן, אליהן הגיעו לאחר ההעברה הראשונה של הכרטיסיות, היו חפוזות מידי. שתיהן החליטו לעסוק בהבחנה בין משולשים לבין "לא-משולשים". ירדנה וענת התלבטו לגבי הצורות אותן יציגו לילדים. הן החליטו לבחון באופן מדוקדק יותר את מאפייני הצורות עליהן הילדים בשני הגנים השיבו נכון, ואת אלה שלגביהן הילדים שגו.

ירדנה וענת הבחינו בשוני בין אוספי הצורות שכל אחת מהן הציגה לילדים. הן החליטו לנסות תחילה להתחלף בכרטיסיות, ולהעביר, כל אחת, לילדים בגן שלה את הכרטיסיות של רעותה.

לאחר שעשו זאת, נפגשו, והתברר כי כאשר ענת הציגה לילדים בגן שלה את הכרטיסיות שהכינה ירדנה, כל הילדים זיהו את כל המשולשים וידעו לומר כי כל הצורות שאינן משולשים הן "לא-משולשים". כזכור, תוצאות אלה התקבלו קודם לכן בגן ירדנה.

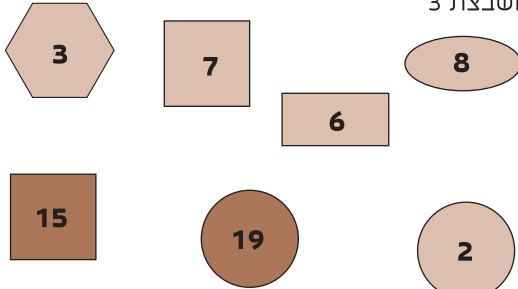
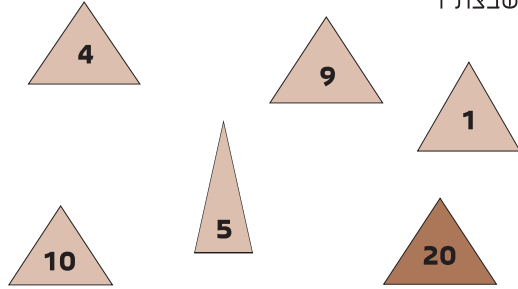
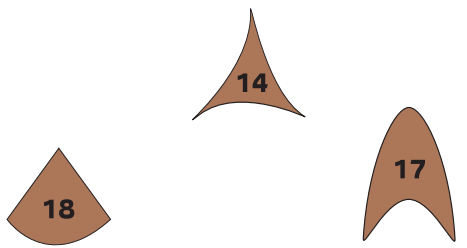
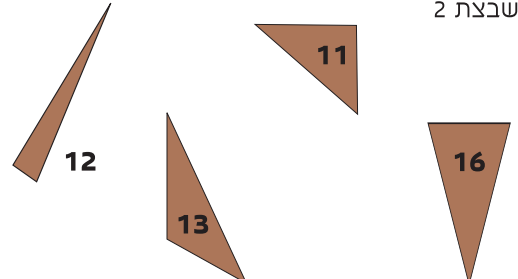
כמו כן, כאשר ירדנה הציגה לילדים בגן שלה את הכרטיסיות של ענת, התוצאות שהתקבלו היו דומות לאלה שענת קיבלה בגן שלה. כלומר, מרבית הילדים זיהו רק את אחד המשולשים כמשולש, ושתיים מהצורות שאינן משולשים כמשולשים. בנוסף לכך, התברר כי בשני הגנים התשובות הנכונות ניתנו לגבי אותן צורות.



מה ילדים יודעים ומה ילדים אינם יודעים על משולשים ועל לא-משולשים?
 מיון הצורות שירדנה וענת הציגו

בשיחה אתנו (פסיה ודינה) הצענו לגננות ליצור טבלה לשם מיון הכרטיסיות על-פי שני ממדים:
ממד ה"משולשות" - "משולשים" מול "לא-משולשים".

ממד ה"ידידותיות" - "צורות ידידותיות" (שמרבית הילדים זיהו), מול "צורות לא ידידותיות" (שילדים נטו לטעות בזיהוין).
 המיון מתואר בטבלה 1.

"לא משולשים"	משולשים	
<p>משבצת 3</p> 	<p>משבצת 1</p> 	ידידותי
<p>משבצת 4</p> 	<p>משבצת 2</p> 	לא ידידותי

טבלה 1

רגע, חושבים!

האם, לדעתכם, ילדים (בגילאים שונים - למשל, בכיתות א-ו) עונים, בדרך כלל, באופן דומה? נסו - ותיווכחו.



משולשים: דוגמאות ידידותיות ודוגמאות שאינן ידידותיות

בתחילת השיחה ענת וירדנה קישרו בין המאמרים בהם קראו על אב-טיפוס לבין הצורות שהילדים זיהו כמשולשים. **ענת:** קראתי שיש בעצם צורות שהן אב-טיפוס... אב-טיפוס של משולש...

ירדנה: שממש ממש קל לילדים לזהות אותן... **ענת:** [המשולש] השווה-צלעות... השווה-שוקיים. **ירדנה:** שעומדים על הבסיס... וגם אחרים... שווי-שוקיים שעומדים על הבסיס...

הצענו לקרוא למשולשים אלה "משולשים ידידותיים" והוספנו שמניסיוננו עם ילדים בגילאי טרום חובה, יש משולשים ידידותיים נוספים, אפילו שוני-צלעות. למשל,



ענת: אז מה אפשר להגיד??? בסופו של דבר... מהם משולשים ידידותיים?

ירדנה: בכלום יש צלע מקבילה לשוליים של הדף...



הצלע... הבסיס... צלע תחתונה... מקבילה לשוליים התחתונים...

בהמשך השיחה התייחסנו לשלושה מקרים של משולשים ידידותיים:

א. משולשים שווי-צלעות שבהם צלע אחת, "הצלע התחתונה", מקבילה לשוליים התחתונים של הדף.

ב. משולשים שווי-שוקיים שבהם הבסיס הוא "הצלע התחתונה" והוא מקביל לשוליים התחתונים של הדף.

ג. משולשים שוני-צלעות בהם הצלע הארוכה היא התחתונה ומקבילה לשוליים התחתונים של הדף.

בהמשך השיחה, הגננות החלו להתייחס למשולשים שאינם ידידותיים.

בשיחה שערכנו עם ירדנה וענת הן התבקשו לתאר במילים את הצורות הכלולות בכל אחת מהמשבצות בטבלה. **ירדנה:** כל המשולשים במשבצת הראשונה... למשל, משולשים 1, 4, ו-9... עומדים יפה... הם לא הפוכים.

ענת (נכנסת לדבריה): נכון... אה... המשולשים ההפוכים ש... במשבצת השנייה משולשים 11 ו-16 ... למשל... היה להם קשה לזהות... וגם את אלה שעומדים על קדקוד... כמו משולש 12 ומשולש 16...

ירדנה: תראי, במשבצת השלישית הם ממש ידעו... עיגול... ריבוע... הילדים ידעו שזה "לא-משולשים"... הם ידעו את השמות של הצורות האלה. עיגול... ריבוע...

ענת: ברור... ברור, הם הכירו את השמות האחרים של הצורות... **ירדנה:** כאן וכאן (מצביעה על צורות 14 ו-17 במשבצת הרביעית) הצלעות לא ישרות... בעצם גם כאן (צורה 18 באותה משבצת).

ענת: אני חושבת שגם עם צורות שלא לגמרי סגורות (משרבטת דוגמה -), למשל כאלה, ילדים יתקשו. **ירדנה:** לא בטוח... תלוי... תלוי כמה זה פתוח. ובכלל... יש עוד דוגמאות... עוד משולשים ו... "לא-משולשים". **ענת:** יש המון צורות... מה נעשה? (פונה אלינו) מה אתן מציעות שנעשה? איך נחליט?

בשלב זה סיפרנו לענת ולירדנה על מספר מאמרים לגבי הוראת גיאומטריה בגני ילדים שהתפרסמו בכתב העת "מספר חזק 2000" (למשל, קובלר, 2003) או מאמרים שפורסמו במקור באנגלית (למשל, Clements & Sarama, 2000; Fox, 2000) שתרגומם לעברית פורסם באתר של מרכז המורים הארצי למתמטיקה לבית הספר היסודי: <http://mathcenter-k6.haifa.ac.il>

בתחילת הפגישה שלאחר מכן ענת הציעה: "בואו נדבר קודם על צורות שהן באמת משולשים". הסכמנו לעבוד בסדר הזה.

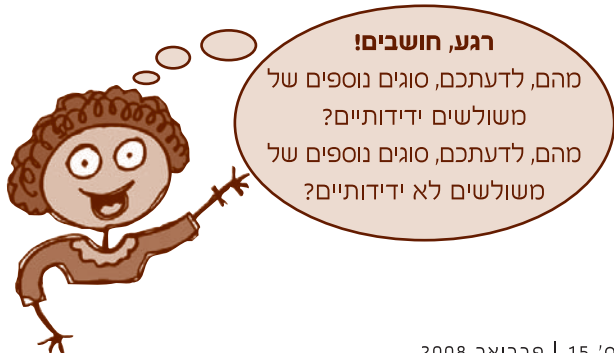
בהמשך, שוחחנו על "לא-משולשים".


"לא-משולשים": דוגמאות ידידותיות ודוגמאות שאינן ידידותיות



ענת הצביעה על המשבצת השלישית בטבלה 1, ואמרה: **ענת:** ראיתי גם שכשהילדים הכירו צורות... למשל, מעגל (צורה 2), מלבן (צורה 6), ריבוע (צורה 7), משושה (צורה 3)... הם ידעו שאלה לא-משולשים. **ירדנה:** גם אליפסה (צורה 8) קל לילדים, כי הם מכירים את השמות. **ענת:** [פונה אלינו] אז איך אנחנו נקרא להם? [מחייכת] ללא-משולשים האלה שבמשבצת השלישית (טבלה 1)?

הצענו לקרוא לצורות אלה דוגמאות ידידותיות של "לא-משולשים". ביקשנו מהגננות לחשוב על דוגמאות ידידותיות נוספות של "לא-משולשים". **ענת:** טרפז, מעוין, מתומן, מצולעים עם הרבה צלעות... **ירדנה:** לא כל הילדים מכירים את הטרפז ואת המתומן... לא ידעים את השמות... **ענת:** אבל כשמסתכלים על הצורות האלה רואים שהן בכלל לא דומות למשולש.

ירדנה: נכון... תראו אם מסתכלים על הצורות שבמשבצת הרביעית... למשל, צורה 14, צורה 17 וצורה 18 זה... כמעט משולש. אם מצמצמים את העיניים [מדגימה] זה נראה משולש. אלו בעצם "לא-משולשים" שהם לא ידידותיים... זאת אומרת... קשה לילדים... הם חושבים שאלה משולשים. **ענת:** באמת היו ילדים שאמרו שזה כמעט משולש [מצביעה על צורה 18]... היו שאמרו שזה משולש פיצה... זה מבלבל. הם לא התייחסו לכך שיש צלע לא ישרה... **ירדנה:** אני יודעת שגם תמרור שצורתו משולש הוא בעייתי. הילדים אמרים שזה משולש... ככה קוראים לו. וזה גם מבלבל.



ירדנה (מצביעה על צורות בסרטונים של ענת): אז בעצם זה  לא ידידותי.

ענת: נכון. הילדים חושבים שאלה לא-משולשים. אני קראתי שגם (מסרטטת -  וגם ) בצורות האלה שנתנו (מצביעה על משולש 11, משולש 12, ומשולש 16) ילדים טועים המון... זה נתן לי הרגשה טובה לראות שהצורות שהילדים לא הכירו הן באמת שאלות קשות... להרבה ילדים בגן... **ירדנה:** אז בעצם אלה משולשים הפוכים או משולשים שעומדים על קודקדן...

לאור זאת, תיארונו ארבעה סוגים של משולשים שהם "לא ידידותיים":
א. משולשים בהם "צלע עליונה" מקבילה לשולי הדף למעלה (משולשים "הפוכים").
ב. משולשים בהם אין צלע המקבילה לשוליים העליונים או לשוליים התחתונים של הדף.
ג. משולשים ישרי-זווית עם צלע תחתונה מקבילה לשולי הדף למטה.
ד. משולשים קהי-זווית עם צלע שהיא שוק של הזווית הקהה, המקבילה לשולי הדף למטה.
הבהרנו שעשויים, כמובן, להיות משולשים לא ידידותיים נוספים.



והבהרנו שההתייחסות לתכונות של צורות הנדסיות עשויה לקדם את הידע הגיאומטרי של ילדים בכך שיעברו מתפקוד ברמה הראשונה של ואן הילה (גלובליות, למשל, זה משולש כי "זה נראה משולש", כי "זה כמו גג") לתפקוד ברמה השנייה של ואן הילה (ההתייחסות לתכונות, למשל, זה לא משולש כי "יש צלע שלא ישרה").

ירדנה וענת התלהבו מהדין ברמות ואן הילה. הן החליטו להתייחס בגן לתכונות של משולשים ולדוגמאות ידידותיות ולדוגמאות לא ידידותיות של משולשים ושל לא-משולשים.

מילות סיום: מחשבות, רעיונות ושאלות

פעילויות עם משולשים מזמנות אפשרויות רבות לעיסוק במיון. חשוב לבחור באוסף משמעותי של דוגמאות ושל אי-דוגמאות של משולשים. במאמר זה הצענו להתייחס לארבע קבוצות: משולשים ידידותיים ומשולשים לא ידידותיים, "לא-משולשים" ידידותיים ו"לא-משולשים" לא ידידותיים.

ההבחנה בין משולשים לבין לא-משולשים היא חדה וחד-משמעית. הבחנה זו מבוססת על היבטים מתמטיים, כלומר, על ההגדרה המתמטית של המושג. לעומת זאת, ההבחנה בין דוגמאות ידידותיות לבין דוגמאות שאינן ידידותיות אינה חדה, והיא מבוססת על היבטים פסיכו-דידקטיים ועל נתונים אמפיריים. הסיווג על-פי ממד הידידותיות מעלה שאלות רבות:

האם קיימת היררכיה בתוך כל אחת מארבע הקבוצות שהצגנו? אם כן, מהי?

לשם הדגמה נתייחס, למשל, ל"לא-משולשים" הלא ידידותיים ונעלה מספר שאלות:

- האם צורה סגורה בת שלושה קדקודים שבה אחת הצלעות אינה ישרה (למשל, צורה 18) היא ידידותית יותר מאשר צורה שבה שלוש צלעות אינן ישרות (למשל, צורה 14)?
- האם צורה סגורה בת שלושה צלעות שבה אחת הפינות מעוגלת היא ידידותית יותר מאשר צורה כזו שבה שלוש הפינות מעוגלות?
- בהינתן מצולע שלו מספר צלעות גדול משלוש, מה השפעת אורכי הצלעות על זיהוי הצורה כלא-משולש?
- בהינתן צורה שאינה סגורה, מה "מידת הפתיחה" המבדילה בין לא-משולש ידידותי לבין לא-משולש שאינו ידידותי?

סיכמנו בכך שמתוך התייחסות לתגובות הילדים לצורות המתוארות במשבצות 3 ו-4 אפשר ללמוד שכאשר ילדים מכירים את שמה של הצורה המוצגת הם נוטים לקבוע שהצורה היא "לא-משולש". בנוסף, התברר כי ילדים מתייחסים להיבט הוויזואלי, כלומר, למראה "המשולשי" הכולל של הצורה, כאשר עליהם לקבוע אם הצורה היא משולש. האמירה האחרונה של ענת: "הם לא התייחסו לכך שיש צלע לא ישרה", הובילה לדיון בתכונות ובהגדרות.

משולשים בגן: מיון על-פי תכונות

בשלב זה שוחחנו עם הגננות על הגדרות של מושגים מתמטיים ועל כך שהגדרה של מושג קובעת שתי קבוצות: קבוצת האיברים שמקיימים את ההגדרה (במקרה זה, קבוצת המשולשים) וקבוצת האיברים שאינם מקיימים את ההגדרה (במקרה זה, קבוצת הלא-משולשים). בהתייחס למשולשים הדגשנו כי אפשר לקבוע בבידור על-פי הגדרה (למשל, משולש הוא מצולע בעל שלוש צלעות) אם צורה מסוימת היא כן משולש או לא-משולש. כלומר, אין צורה שהיא "כמעט משולש". בשיחה זו דנו גם בתכונות של משולשים.

ירדנה וענת ציינו, לאחר השיחה אתנו, כי לדעתן רצוי להדגיש בגן מספר תכונות של משולשים:

ירדנה: כשמדברים עם הילדים חשוב להדגיש שבמשולש יש שלוש, שלוש, שלוש צלעות וגם שלושה קדקודים.
ענת: חשוב גם להדגיש שצלעות הן ישרות...
ירדנה (נכנסת לדבריה): והקדקודים הם שפיצים שמחברים שתי צלעות... וש... אין פתחים... הצורה סגורה.
ענת: צריך להגיד גם קדקודים וגם צלעות?

כאן שוחחנו עם ירדנה וענת על המינימאליות של הגדרות מתמטיות. דנו בדרכים בהן נבחר להתייחס למשולשים בגן והחלטנו להתמקד בתכונות הבאות של משולשים: **משולש הוא צורה סגורה, למשולש שלוש צלעות (ישרות), למשולש שלושה קדקודים ("שפיצים"). הדגשנו שמספיק שתופר אחת התכונות, כדי שצורה תהיה "לא-משולש".** שוחחנו עם הגננות על הרמות השונות של ואן הילה (תיאור, בעברית, של הרמות מופיע, למשל, אצל הרשקוביץ, 2000)

מקורות

הרשקוביץ, ר' (2000). אספקטים קוגניטיביים בלמידה ובהוראה של גיאומטריה. אצל ג. שמאע (עורכת) **עיונים בחינוך מתמטי** (עמ' 137-154). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

קובלר, ש' (2003). פיתוח ההבנה הגיאומטרית בגיל הרך. **מספר חזק** 2000, **גליון 6**, 20-23.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, 6 (8), 482-488.

Fox, T. B. (2000). Implications of research on children's understanding of geometry. *Teaching Children Mathematics*, 6(9), 572-576.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

מהי ההשפעה של היכרות הילדים עם שמות של צורות שונות על האופן בו הם ממיינים אותן?

בעבודתנו עם ילדי הגן התרשמנו כי צורות שהילדים הכירו את שמן מוינו נכון כלא-משולשים. לאור זאת, מתעוררות שאלות לגבי מיון של צורות אחרות. למשל, האם ילדים המכירים את צורת הטרפז ויודעים את שמה יטענו כי צורה זו אינה מרובע כי "היא טרפז"?

מהן ההשלכות המעשיות של המיון שהצענו על עבודה עם ילדים בגן?

■ האם רצוי להציג קודם צורות ידידותיות (משולשים ולא-משולשים) ובשלב מאוחר יותר, צורות לא ידידותיות? ■ האם רצוי לעסוק תחילה במשולשים בלבד (ידידותיים ושאינם ידידותיים) ורק לאחר מכן לעסוק בלא-משולשים? ■ מי הקבוצה הכוללת? האם כדאי לכלול א-דוגמאות (לא-משולשים) שהן צורות דו-ממדיות בלבד?

שאלות אלה ושאלות רבות נוספות שאין עליהן מענה בספרות המקצועית דורשות מחקר נוסף. במהלך השנה האחרונה, במסגרת פרויקט "להתחיל נכון: חשבון בגן" בשיתוף עם קרן רש"י, אנו שוקדות על ניסיון להשיב, באמצעות מחקר מלווה, על שאלות אלה.

על מחברות המאמר:

פרופ' דינה תירוש ופרופ' פסיה צמיר

חברות סגל בחוג להוראת המדעים בבית הספר לחינוך באוניברסיטת תל אביב. תחומי העניין המרכזיים שלהן: אינטואיציה וחשיבה מתמטית והכשרה וקידום מקצועי של מורים. בשנים האחרונות הן מתמקדות, בין היתר, במחקר, פיתוח והפעלת התכנית: להתחיל נכון - חשבון בגן.

