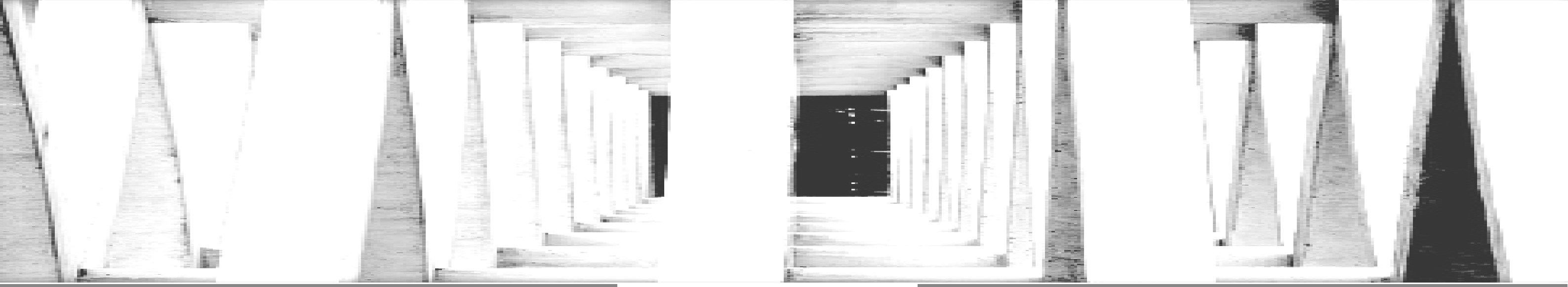


סיפורים אודות לא כלום והרבה מאוד

אלכס פרידלנדר

רקע

לאחרונה, צוות במחלקה להוראת המדעים במכון וייצמן עסק בפיתוח של שני מאגרי פעילויות לתלמידים מתקדמים במתמטיקה בכיתות ג-ד. ברצוני לתאר כאן את עיקרי המהלכים של שיעור, שמטרתו הייתה התנסות בפעילויות מתוך המאגר לכיתה ד. בית הספר שבו הפעלנו את הפעילות יוצר קבוצות למתקדמים, המופעלות בתדירות של פעם בשבוע, במקביל לשיעורי המתמטיקה הרגילים של יתר התלמידים. החלטנו לעבוד עם קבוצת המתקדמים מכיתות ה, כי הפעילות עסקה בשברים, והיא הועברה בחודש נובמבר - תקופה שבה תלמידי כיתה ד טרם עסקו בנושא. בקבוצה היו כ- 20 תלמידים.

מבחינה מתמטית, הפעילות עוסקת בטורים (כלומר, סכומים) אינסופיים של שברים, אשר מתכנסים לגבול מסוים. כבר בתקופת יוון העתיקה היו ניסיונות להתמודד עם הבעיה הזאת, על-ידי ניתוח סיטואציות המבוססות על "סיפורים" המבוססים על הקשר מציאותי, ודורשים טיפול בכמויות אינסופיות. במקרה זה, מדובר על סכומים הכוללים מספר אינסופי של מחוברים. במציאות הסופית שלנו, ככל שנגדיל את מספר המחוברים, הסכום גדל, ולכן סביר להניח, כי במקרה של אינסוף מחוברים הסכום יגדל ללא גבול. מאידך, במקרים מסוימים (אך לא בכולם!) שבהם המחוברים הולכים וקטנים, הסכום אינו גדל ללא גבול. במקרים אלה, במידה ונכלול בסכום מספר גדול דיו של מחוברים, נוכל להתקרב אל מספר מסוים קרוב ככל שנרצה, אך לא נוכל להגיע אליו, ובוודאי שלא נוכל לעבור אותו.

היסודות הפורמאליים של התקרבות סכום אינסופי אל מספר (בשפה מתמטית - התכנסות טור אל גבול מסוים) הונחו רק בשלב הרבה יותר מאוחר, עם התפתחות החשבון הדיפרנציאלי.

הפעילות המתוארת כאן היא בעלת שתי מטרות:

- להביא למודעות התלמידים את הקשיים הנובעים מן הניסיון להתמודד עם סכומים הכוללים מספר אינסופי של מחוברים, בעזרת האינטואיציות שלנו, המבוססות על התנסויות הנרכשות בסביבתנו הסופית.
- להכיר כמה מקרים שבהם הסכומים האלה הם בעלי גבול.

לשם כך, הצגנו בפני התלמידים סיטואציות ("סיפורים") המבוססות על שלושה סכומים המתכנסים אל גבול מסוים. בשלב זה, לא הבאנו דוגמאות נגדיות לסכומים דומים, שאינם מתכנסים, אלא גדלים ללא גבול.

הפעילות

הפעילות בנויה מחמישה "סיפורים".

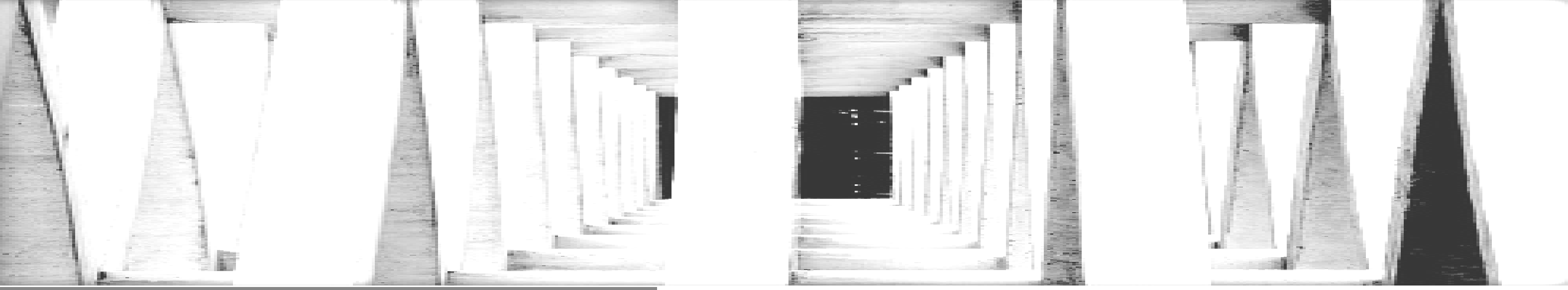
סיפור ראשון וסיפור שני

שני הסיפורים הראשונים עוסקים ב"סכום החצאים" האינסופי : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....$ אשר מתכנס ל- 1.

הסיפור הראשון (ראו איור 1) עוסק בילדה האוכלת בשלבים חלקים של $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...$, מעוגה.

הסיפור השני עוסק בילד ההולך מביתו אל בית חברו, ועובר בשלבים את אותם החלקים מן הדרך הכוללת.

בשני המקרים מקבלים את התחושה כי מצד אחד, שני הילדים מתקרבים אל כיסוי השלם, אך מצד שני, הם לעולם לא ישלימו את השלם לפי חוקיות זאת.

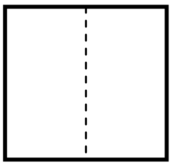
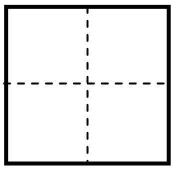
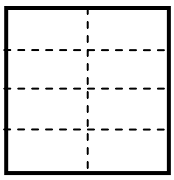
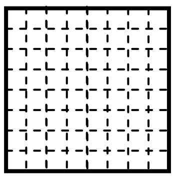


העוגה של רונית

אמא של יוסי אפתה עוגה גדולה בצורת ריבוע, ויצאה לחפש את יוסי.

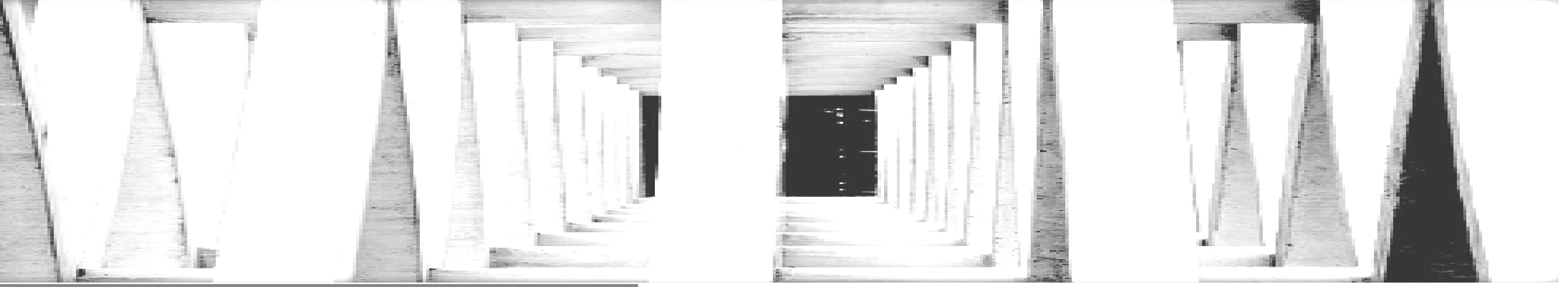
- בינתיים, נכנסה רונית (אחותו של יוסי) ואכלה חצי מהעוגה.
- רונית חזרה שוב, ואכלה חלק מהעוגה שהוא חצי מחלק העוגה שאכלה בפעם הקודמת.
- בפעם השלישית, רונית אכלה חלק מהעוגה שהוא חצי מחלק העוגה שאכלה בפעם הקודמת.
- רונית חזרה שוב ושוב – ובכל פעם אכלה חלק מהעוגה שהוא חצי מחלק העוגה שאכלה בפעם הקודמת.

1. צבעו בריבוע וכתבו את הסכום המתאים לחלק העוגה שאכלה רונית.

שלבים	סרטוט	סכום ותוצאה
בפעם הראשונה		$\frac{1}{2}$
ב- 2 הפעמים הראשונות		$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
ב- 3 הפעמים הראשונות		
ב- 6 הפעמים הראשונות		

2. מצאו את הסכום המתאים לחלק שאכלה רונית ב- 10 הפעמים הראשונות.
3. בשלב מסוים רונית תהתה: "אם אמשיך כך, האם אגיע למצב שאגמור לאכול את כל העוגה?"
   מה הייתם עונים לרונית?

איור 1: הסיפור הראשון בפעילות

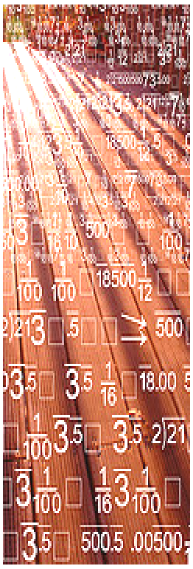


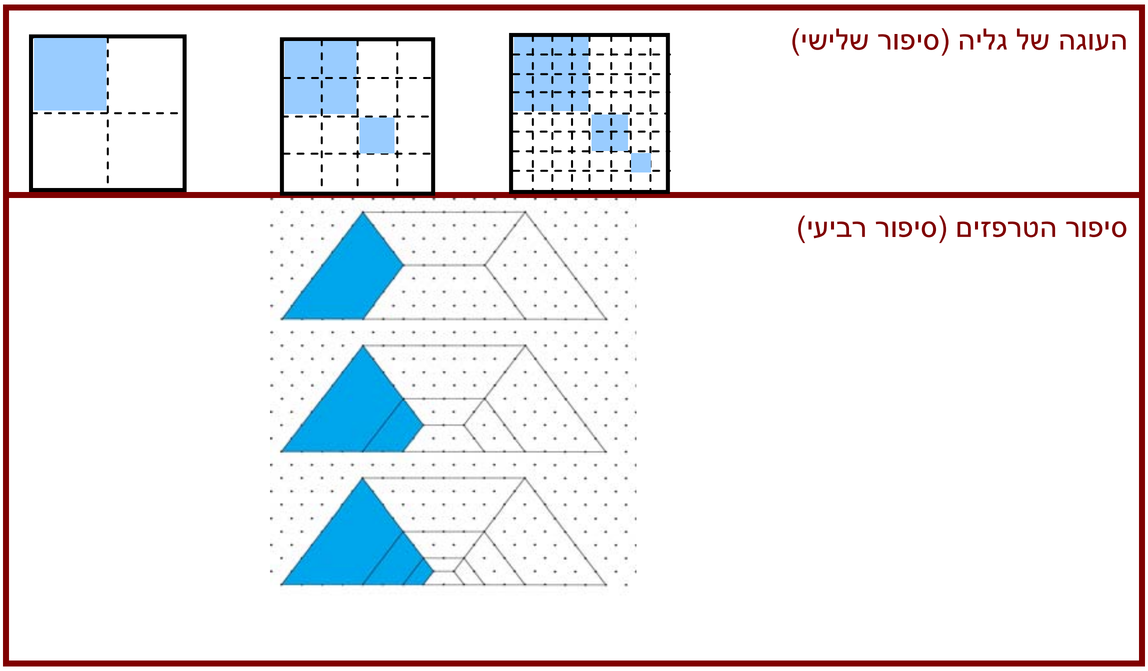
סיפור שלישי וסיפור רביעי

שני סיפורים אלה עוסקים ב"סכום הרבעים" $....+\frac{1}{256}+\frac{1}{64}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}$.

בסיפור השלישי, בדומה לסיפור הראשון, מדובר בילדה האוכלת עוגה – הפעם לפי חוקיות של רבעים: $\frac{1}{4},\frac{1}{16},\frac{1}{64}....$

את הסיפור הרביעי מתבקשים התלמידים לחבר בעצמם. מטרת הסיפור הזה היא להעמיק את הבנת נושא הסכומים האינסופיים של שברים. הסרטוטים המלווים את שני הסיפורים (איור 2), נועדו להמחיש מבחינה חזותית את התכנסותו של "סכום הרבעים" ל- $\frac{1}{3}$.





איור 2: שני ייצוגים ל"סכום הרבעים"

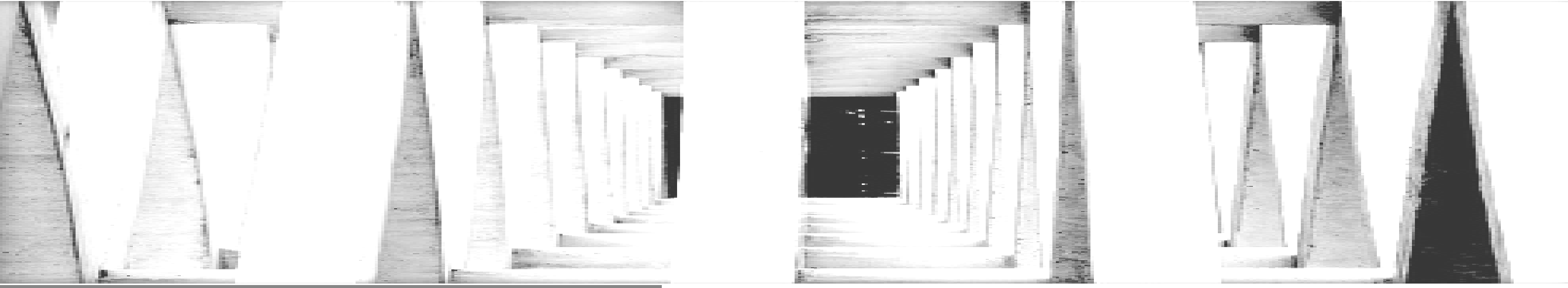
סיפור חמישי

הסיפור האחרון הוא משימת רשות פתוחה על "סכום השלישים" – כלומר, הסכום $....+\frac{1}{81}+\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$.

סיפור זה מעודד את הילדים להמציא סיפורים וסרטוטים מתאימים משלהם, ולמצוא את המספר שאליו מתקרב סכום זה.

המהלך בכיתה

בהמשך, אתאר מספר נקודות מעניינות שעלו במהלך השיעור הכפול של 90 דקות, שבו עבדו התלמידים על הפעילות הזאת.



מספרים גדולים וקטנים

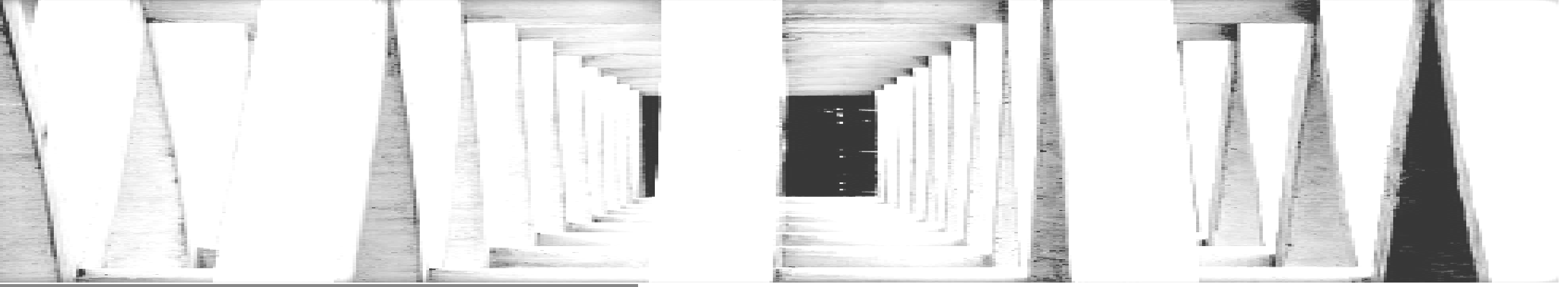
ביקשתי בתחילת השיעור דוגמאות למספרים גדולים מאוד. קיבלתי תשובות, כמו למשל:
"700 מיליארד, 530 אלף", "גוגל", "אינסוף". בהזדמנות זאת, הבהרנו (שוב) את כתיבת המספרים בשיטה העשרונית. כמו כן, הגענו למסקנה, כי "אינסוף" אינו מספר, אלא מושג, ומשמעותו היא שלכל מספר, גדול ככל שיהיה, ניתן למצוא מספר גדול יותר.
ביקשתי דוגמאות למספרים קטנים ככל האפשר, אבל לא שליליים ולא אפס. בין התשובות שקיבלתי היו: "מיליארדית", "אחד חלקי 700 מיליארד 530 אלף", "אחד חלקי משהו גדול", "אפסילון". התשובה האחרונה עוררה בי פליאה, ומקורה כנראה בהורה שהעלה זיכרונות מלימודי המתמטיקה בשנה א באוניברסיטה. הבהרתי, כי אפסילון אינו מספר מסוים, אלא כינוי למספר (חיובי) קטן כרצוננו. לשאלתי האם אוכל למצוא את המספרים האלה על ישר המספרים, הייתה הסכמה כללית שלכל מספר כזה מקום משלו על הישר, קרוב מאוד לנקודת האפס, אך עדיין מצדו הימני.

"סכום החצאים"

לאחר עבודת התלמידים על שני הסיפורים הראשונים, שוחחנו ארוכות על החוקיות שב"סכום החצאים", ועל השאלה האם הסכום האינסופי מגיע או אינו מגיע ל- 1.
לגבי השאלה הראשונה הגענו למסקנה, כי בכל שלב הסכום גדל בחצי מן הכמות הנותרת. (הדבר ברור במיוחד בסיפור השני.) לכן לאחר כל שלב, "נותר" עד ל- 1 חלק השווה למחובר האחרון. למסקנה זאת הגענו על סמך הסכום של עשרה מחוברים, שבו המחובר העשירי הוא $\frac{1}{1024}$ וזהו גם גודלו של המספר המשלים סכום זה לשלם. לכן סכום עשרת המחוברים הראשונים ב"סכום החצאים" הוא $\frac{1023}{1024}$.

במקרה זה, כמו במקרים של הכללות רבות אחרות, דוגמה המבוססת על מספרים גדולים מאפשרת לגשר בין הדוגמאות האינטואיטיביות, המבוססות על מספרים קטנים, ובין גילוי והסבר של החוקיות הכללית.

עניין "התוצאה" של "סכום החצאים", עורר ויכוחים ותהיות רבות. בלט הקונפליקט בין המודעות לכך שהסכום לעולם לא יגיע ל- 1, לעומת "העובדות בשטח" של הסיפורים. שמעתי תגובות תלמידים, כמו למשל: "הרי בסוף רונית תגיע למצב של אטומים, ולא תוכל לחתוך את העוגה"; "בסוף רונית לא תתאפק, ותאכל את כל מה שנשאר"; "זה כאילו יוסי יגיע לפעמון הדלת של החבר, ולא יצליח לצלצל". ילד אחד אמר שהסיפור מזכיר לו "יווני אחד" שאינו זוכר את שמו. הרגעתי את הרוחות, וסיפרתי להם כי התלמיד שהזכיר את היוונים אכן צדק, והאיש המזוהה עם סיפורים מסוג זה הוא זנו. מאז ימי היוונים ועד לפני כארבע מאות שנה, אנשים רבים תהו על הסתירה שבין אינטואיציות המבוססות על התנסויות בסביבה (הסופית) שלנו, ובין המשמעות המתמטית של סיפורים כביכול מציאותיים, המבוססים על סכומים אינסופיים של שברים. הסיפורים שהם כביכול "מציאותיים" מעוררים בנו ציפיות לתוצאה ברורה ומוגדרת (רונית "תחסל" בסופו של דבר את כל העוגה, יוסי יגיע לבית חברו), אך המסקנה המתמטית המופשטת מצביעה על התקרבות מתמדת אל מטרה, מבלי להגיע אליה. הצבעתי על שני עולמות המתנהלים לפי חוקיות שונה. המציאות המוחשית שלנו היא של עולם סופי, ולכן האינטואיציות שלנו מתבססות על עולם זה. המתמטיקאים בנו "עולמות" תיאורטיים המאפשרים תהליכים וכמויות אינסופיים, המבוססים על חוקים והגדרות המתאימים לעולמות אלה. כתוצאה מכך, המתמטיקאים הגדירו את מושג הגבול, המאפשר התמודדות עם סכומים אינסופיים שאינם משתווים לעולם לאותו גבול, אך מתקרבים בהתמדה אליו.



אציין כאן, כי בסיום השלב הזה הרגשתי אי-שביעות רצון מסוימת וזאת משתי סיבות:

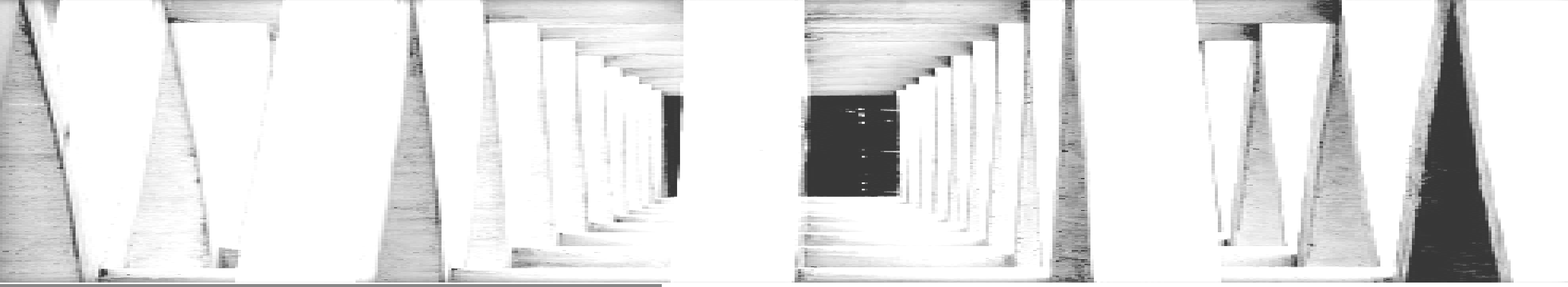
- o בדרך כלל, אני משתדל להצביע על קשרים בין סביבת התלמידים ובין תחום המתמטיקה. במקרה זה, הרגשתי צורך להפריד בין שני "העולמות".
- o שמחתי לאפשר לתלמידים להביע את תהיותיהם לגבי הסתירה שבין אינטואיציה לפתרון מתמטי. יחד עם זאת, השיחה לגבי הניסיונות ליישוב הסתירות הייתה די חד-צדדית, ואף לא הייתי בטוח לגבי המידה שבה שכנעתי חלק מן התלמידים. הזכרתי לעצמי, כי מטרתי הייתה עריכת היכרות ראשונית עם הנושא, ושיחזור היסטורי של השלבים ההתחלתיים של התפתחות המושג.

"סכום הרבעים"

לאחר עבודת התלמידים על שני הסיפורים של "סכום הרבעים", השווינו בין סכום חמשת המחוברים הראשונים ב"סכום הרבעים" ($\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+....\frac{1}{1024}$) ובין סכום עשרת המחוברים הראשונים ב"סכום החצאים" $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....\frac{1}{1024}$. ראינו כי שני הסכומים מסתיימים באותו שבר, מספר המחוברים בסכום הראשון הוא חצי ממספר המחוברים בסכום השני, וכל מספר שני ב"סכום החצאים" מופיע ב"סכום הרבעים". "אם כך," שאלתי בעורמה מסוימת, "האם אוכל לטעון, כי גם בשני הסכומים האינסופיים, מספר המחוברים של אחד הוא מחצית ממספר המחוברים שבשני?" הייתה הסכמה פה אחד, כי אכן כך הדבר. שאלתי שוב: "כיצד נוכל לדעת באיזו מבין שתי צנצנות יש יותר גולות?" והתשובה המיידית הייתה: "נספור". "כיצד נדע באיזה מבין שני הסכומים יש יותר מחוברים?" המשכתי בסדרת השאלות, ונתקלתי במבוכה והיסוס מצד התלמידים. הרגשתי כי אמנם הצלחתי ליצור קונפליקט, אך לא הצלחתי לשכנע. טענתי, כי זהו מקרה נוסף שבו אנחנו מנסים להפעיל את האינטואיציות שלנו המבוססות על סביבתנו הסופית, על העולם המתמטי התיאורטי האינסופי. כדי לשכנע, המשכתי עם הסיפור הבא: "נניח כי מחוברי שני הסכומים מחליטים לצאת לטיול. המחוברים שבמקום הראשון בשני הטורים תופסים יד ביד, ויוצאים יחדיו. המחוברים שבמקום השני משתדכים גם הם, וכן הלאה, כל מחובר מ'סכום החצאים' משתדך אל המחובר הנמצא באותו מקום ב'סכום הרבעים'. האם באחד הסכומים יישארו מחוברים ללא בני זוג?" הייתה הסכמה שלא יהיו מחוברים כאלה. המשכתי את הטיעון והסקתי: "אם כך, לא אוכל לטעון, כי באחד הסכומים יש יותר מחוברים מאשר בשני". לסיכום האפיזודה הזאת, אוכל לומר כי "זרקתי אבן" לכיוון העוצמות של קבוצות אינסופיות, אך לא אוכל לטעון, כי שכנעתי את תלמידיי.

היבט נוסף של "סכום הרבעים" הייתה שאלת המספר (הגבול) שאליו מתקרב הסכום – כלומר, החלק מן העוגה שגליה, גיבורת סיפור הרבעים, תאכל במשך התהליך. התשובות שניתנו היו: 1 (כנראה, בהשפעת "סכום החצאים"), $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{3}$.

העמדתי את העניין להצבעה, וקיבלנו את התוצאות הבאות: כמחצית מן הכיתה הייתה סבורה, כי גבול הסכום הוא 1, כשליש דגלו ב- $\frac{1}{2}$, ורק תלמידים ספורים הצביעו בעד $\frac{1}{3}$. סביר להניח, כי המסקנה שגבול "סכום הרבעים" הוא 1 הוסקה בהשפעת מציאת הגבול של "סכום החצאים" (הכולל בתוכו את מחוברי "סכום הרבעים"). בנוסף לכך, רוב התלמידים לא הספיקו לעבוד על הסיפור הרביעי בפעילות, שבו סרטוט הטרפזים (איור 2) מצביע ביתר בירור על התקרבות "סכום הרבעים" אל $\frac{1}{3}$.



לסיום

החלטתי לתאר את מהלך הפעילות הזאת, מכיוון שלדעתי, היא הגשימה מספר מטרות העומדות בפנינו בעבודתנו עם תלמידים מתקדמים.

- o הפעילות תרמה למיצוי הפוטנציאל החשיבתי והרגשי של התלמידים בעלי יכולות מתמטיות גבוהות.
- o הפעילות תרמה לשילוב תחומי יידע שונים (למשל, היסטוריה כללית, היסטוריה של המתמטיקה, מדעים, יידע שוטף מן הסביבה הקרובה, מידע מרשת האינטרנט) בשיעורי המתמטיקה.
- o במהלך עבודתם על הפעילות, התלמידים השתמשו במגוון רחב של ייצוגים ללמידת מושגים מתמטיים.
- o הפעילות "זרעה זרעים" ראשונים אינטואיטיביים כבסיס ללמידת מושגים מתמטיים מתקדמים בשלבים מאוחרים יותר.

מקורות

פרידלנדר, א' ורובינזון, נ' ותעיזי, נ', וסייח, ג' ואילני, ל" (2008). **אוגדן פעילויות לתלמידים מתקדמים**, חלק רביעי. רחובות: מכון ויצמן למדע, המחלקה להוראת המדעים.

על מחבר המאמר:

ד"ר אלכס פרידלנדר

ד"ר אלכס פרידלנדר מהמחלקה להוראת המדעים שבמכון ויצמן למדע, עוסק בפיתוח חומרי למידה במתמטיקה לבית הספר היסודי ולחטיבת הביניים, ובנושאים הקשורים להוראת מתמטיקה לתלמידים מתקדמים, לדרכי הערכה ולשילוב כלים טכנולוגיים בהוראת המתמטיקה.

חברי גיא הד הראה לי נימוק נוסף להתכנסות "סכום הרבעים" אל $\frac{1}{3}$.

נסתכל על "סכום החצאים" שחקרנו קודם, וראינו כי הוא מתקרב ל-1. נסדר את מחובריו בזוגות, כך: $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{32}+\frac{1}{64})+...$ (הדבר מותר לגבי סכום אינסופי מתכנס שמחובריו חיוביים, ולגבי מקרים מסוימים נוספים, אך לא לגבי כל סכום אינסופי.)

אם נחלק כל זוג מחוברים ב- 3, נקבל את "סכום הרבעים".

מכיון שבדרך זאת חילקנו את כל "סכום החצאים" ב- 3, סביר להניח כי גבול הסכום החדש (כלומר, "סכום הרבעים") יקטן אף הוא פי 3 – כלומר, יהיה $\frac{1}{3}$.