אולימפיאדת מספרים או איך להפוך תרגול שגרתי לחוויה יצירתית

אביקם גזית

שיעורי האריתמטיקה העוסקים בפעולות החשבון, כמו גם בסדר פעולות החשבון והשימוש בסוגריים, הם שגרתיים למדיי. במרבית המקרים יש אוסף תרגילים בהם יש ליישם את החוקים, ואליהם מצרפים פעילות שגרתית, כמו, משחק או דף עבודה, כאשר התרגול בו בנוי על אותו עיקרון. אבל אפשר גם בלי משחקים ודפי עבודה שגרתיים להפוך את השיעור למעניין ומשמעותי, אם מציגים בו פעילויות חקר, שיש בהן יציאה מהשגרה עם לחלוחית של חשיבה יצירתית. המתמטיקה נתפסת כמקצוע הנשלט על-ידי אוסף של חוקים נוקשים עם פתרונות חד-משמעיים. אולם המתמטיקה מזמנת הזדמנויות לחשיבה יצירתית ומקורית לא רק במצבים בהם ישנם כמה פתרונות אלא גם בגיוון האסטרטגיות לפתרון.

אחת הדרכים ליצור מצבים הדורשים חשיבה יצירתית היא להציג בעיות פתוחות, בהן אין פתרון אחד חד-משמעי. אם נשאל תלמידים כיצד נחלק שווה בשווה 12 תפוחים בין 3 קערות, האלגוריתם הוא חד-משמעי, ותשובה אחת מתבקשת בתנאים הנתונים. אבל אם נשאל כיצד נחלק שווה בשווה 12 תפוחים בין מספר קערות, לשאלה זאת אין פתרון אחד, והתלמיד צריך להניח הנחות לפני שייתן את הפתרון מתוך כמה תשובות אפשריות (Yee, 2005).

דוגמה לפעילות כזו מהוות סדרות של מספרים, שצריך באמצעות פעולות החשבון וסוגריים המופעלים עליהן להגיע לתוצאה 28.

להלן הסדרות:

1,	2,	3,	4
2,	3,	4,	5
3,	4,	5,	6
4,	5,	6,	7
5,	6,	7,	8
6,	7,	8,	9
7,	8,	9,	10
8,	9,	10,	11
9,	10,	11,	12

התנאים:

1. צריך להשתמש בכל מספר פעם אחת.
2. אסור להצמיד ספרות, כמו למשל: להצמיד את 1 ל- 2 ולקבל את המספר 12.
3. אפשר להשתמש בסוגריים.
4. אפשר להתחיל בכל מספר והסדר לא חשוב.
5. אפשר להשתמש בכל פעולות החשבון ללא הגבלה (גזית, 1996).

פתרון באמצעות ארבע פעולות החשבון

איך מתחילים?

אפשר לנסות אפשרויות שונות ועל-ידי אינטואיציה, ניסוי וטעייה או הארה, להגיע לפתרון.

אבל אפשר בדרך אנליטית לנתח את המצב הנתון, ולהגיע למסקנות המוליכות לפתרון מהיר יותר. הנה רעיון לדרך המקילה על תהליך הפתרון:

ניקח את הרביעייה הראשונה 1, 2, 3, 4 במטרה להגיע ל- 28.

אפשר לבדוק את הגורמים של 28 שבמקרה הנו מספר מושלם-משוכלל (מספר משוכלל מוגדר כמספר השווה לסכום הגורמים המחלקים אותו ללא המספר עצמו. המספר המשוכלל הקטן ביותר הוא 6 השווה לסכום גורמיו 1+2+3).

במקרה של 28 הגורמים הם: 1,2,4,7,14.

נרשום מכפלות אפשריות בין הגורמים:

2×14=28

4×7=28

בכל אחת משתי האפשרויות להגיע ל- 28 יש לנו את אחד המספרים בסדרה: 2 או 4.

באפשרות הראשונה ננסה להגיע ל- 14 באמצעות 1,3,4.

תהליך זה מוריד את העומס על הזיכרון העובד, כאשר במקום להתעסק עם 4 מספרים צריך להתעסק רק עם שלושה. האם אפשר להגיע ל- 14 עם 1,3,4? כנראה שלא.

עכשיו נעבור לאפשרות השנייה וננסה להגיע ל- 7 באמצעות המספרים 1,2,3.

זה כבר הרבה יותר קל ואפילו לפי הסדר: **1+2×3**.

וקיבלנו את הפתרון: **(1+2×3)×4 = 28**.

נעבור לרביעייה השנייה: 2, 3, 4, 5.

יש לנו גם 2 וגם 4 המהווים גורמים של 28, ושוב ניווכח שלא ניתן להגיע ל- 14 באמצעות 1,3,4 באמצעות ארבע פעולות החשבון.

כדי להגיע ל- 7 באמצעות המספרים 2,3,5, צריך לחשוב על שתי פעולות: האחת מגדילה מעבר לשבע: 2×5, והשנייה מחזירה ל- 7 על-ידי הפחתת 3: **(2×5-3)×4 =28**.

פעילות מסוג זה מתאימה לתלמידי ביה"ס היסודי החל מכיתה ב. בכיתות ב-ג פעילות כזו משמשת לחיזוק מיומנויות פעולות החשבון ושימוש בסוגריים. בכיתות ד-ו פעילות מעין זו עשויה לשמש להעשרה ולהעמקת ההבנה של מספרים פריקים.

פתרון הסדרות בתוספת השימוש בפעולות חזקה ושורש ריבועי

אפשר להרחיב את טווח הפתרונות, ובכך להציג באורח גלוי יותר את המרכיב היצירתי של המשימות. הפעולות הנוספות הניתנות להפעלה הן החזקה והשורש הריבועי.

נקודת המוצא להרחבת השימוש בפעולות החשבון דומה: יש לחפש את שני הגורמים שמכפלתם 28 ואחד מהם, לפחות, נמצא בסדרה.

במקרה של הסדרה הראשונה, 1,2,3,4, ראינו פתרון עם הגורם 4 הנמצא בסדרה, והגורם 7 שמתקבל מפעולות עם 1,2,3.

אפשר להגיע ל- 7 גם באמצעות פעולת החזקה: 2^3-1.

2 בחזקת 3 פחות 1 שווה ל- 7, נכפול ב- 4 ונקבל: $\mathbf{(2^3-1)\times4=28}$.

פירוק אחר של 28 אינו לגורמים של מכפלה, אלא לשני מחוברים שאחד קיים בסדרה.

למשל, 1+27. האם אפשר להגיע ל- 27 עם 2,3,4? 27 שווה 3 בחזקת 3, אבל יש לנו רק 3 אחד, ומ- 4 ו- 2 אי-אפשר להגיע ל- 3, אלא אם יש לכם רעיון יצירתי.

פירוק אחר הוא 2+26, כאשר 2 מצוי בסדרה, וצריך להגיע ל- 26 באמצעות שלוש הספרות הנותרות.

נראה שאי-אפשר להגיע ל- 26 באמצעות 6 הפעולות שאנו משתמשים בהן כאן.

נעבור לפירוק 3+25. יש לנו 3 בסדרה, ואילו 25 שווה לחזקה שנייה של 5. את ספרת מעריך החזקה 2 יש לנו בסדרה. ואיך נגיע ל- 5 מ- 1 ו- 4? אין פשוט מזה, כמו שכתבנו במילים: 1+4, ונקבל $\mathbf{(4+1)^2+3=28}$

הסדרה השנייה היא 2,3,4,5. האם גם כאן אפשר להשתמש בפירוק 3+25?

הן הספרה 5 והן הספרה 3 נמצאות בסדרה. צריך להגיע למעריך 2 באמצעות 4 ו- 2 ואין קל מזה: 4-2, ונקבל $5^{(4-2)}+3$.

הפירוק 26+2 נראה שאינו יוצר מצב המאפשר פתרון, וכן גם לא הפירוק 27+1, ושוב אתם מוזמנים לנסות ולחפש פתרון שאולי לא רואים מכאן.

אבל הזכרנו את פעולת השורש, ויש בין המספרים בסדרה מספר שהנו שורש ריבועי של 4 $\sqrt{4}=2$. עכשיו צריך למצוא דרך להגיע ל- 14 באמצעות המספרים 2,3,5. 14 מתפרק ל- 5 ועוד 9. 5 יש לנו בסדרה וצריך להגיע ל- 9 מ- 2 ו- 3.

קודם הגענו ל- 8 עם 2 בחזקת 3, ועכשיו נגיע ל- 9 עם 3 בחזקת 2 ונקבל: $(3^2+5)\times\sqrt{4}=28$

פתרון הסדרות עם הוספת השימוש בפעולת העצרת(!)

פעולת העצרת המכפילה את כל המספרים העוקבים ברצף עד המספר הרשום ליד סימן העצרת, היא פעולה לא מסובכת, הניתנת ללימוד בבית הספר היסודי כהעשרה, מאחר שאינה רשומה באופן פורמלי בתכנית הלימודים.

הפעולה קיימת במחשבונים בהם משתמשים התלמידים, ונעשה בה שימוש בעת לימוד אנליזה קומבינטורית - תמורות (permutations).

השימוש בפעולת העצרת מרחיב את אפשרויות הפתרון, והמשתמשים מגיעים יותר מהר לפתרון עם פעולת העצרת מאשר עם ארבע פעולות החשבון.

הסיבה לכך היא קבלת 24 מ- 4 עצרת:

$4!=4\times3\times2\times1=24$

פעולת העצרת מכילה בתוכה את כל הגורמים הכופלים, ולכן כמו בפעולת החזקה בה 2 בחזקת 3 שווה ל- 2×2×2 ואנו משתמשים בספרה 2 רק פעם אחת, כך גם ב - 4 עצרת, המכיל בתוכו את 3,2,1, ולכן אפשר להשתמש בהם להמשך התרגיל: $4!+3+2-1=28$.

אפשר גם להשתמש ב- 3 עצרת: $3!=3\times2\times1=6$, ונקבל: $4!+3!-2\times1=24+6-2=28$ ובסדרה: 2,3,4,5 נקבל באופן דומה: $4!+5-3+2=28$.

את המשך הפתרון של הסדרות השלישית ועד התשיעית אני משאיר לכם, כדי להתנסות בתהליך היצירתי. אם לא הצלחתם בדרך אחת, או בשימוש בפעולות חשבון מסוימות, אפשר לנסות בדרכים אחרות או בשימוש בפעולות חשבון אחרות.

בכל מקרה מומלץ להגיע ליותר מפתרון אחד לפחות בחלק מהסדרות. בגיליון הבא אציג את הדרכים להגיע לפתרונות השונים בכל הסדרות.

מקורות

גזית, א' (1996). *חושבים לעניין*. מסדה, גבעתיים.

Yee, F.P. (2005). Developing creativity in the Singapore primary mathematics classes: Factors that support and inhibit. *Thinking classroom*, *6* (4), 14-46.

על כותב המאמר:

ד"ר אביקם גזית

מרצה לחינוך מתמטי במכללת סמינר הקיבוצים ובית ברל, וחבר סגל המחלקה לחינוך ולפסיכולוגיה באוניברסיטה הפתוחה. הוציא לאור שלושה ספרים שעניינם אתגרי חשיבה מתמטיים, ספר על תולדות המתמטיקה וספר שירה.