



על תובנה מספרית ו"קסם" ריבוע המספרים

דורית פטקין

• תפישת מושגים והעלאת השערות ברמה אינטואיטיבית.

הפעילות המתוארת להלן הינה פעילות מודרכת של חקר בנושא ריבועי מספרים, מתוך רצון לעודד פיתוח תובנה מספרית, תוך שילוב כל התחומים המוזכרים לעיל, שראוי לעסוק בהם. פעילויות חקר וגילוי מודרכות אמורות להיות חלק מאסטרטגיות ההוראה של המתמטיקה.

מטרות הפעילות הן:

1. חזרה על לוח הכפל;
2. היכרות עם המושג ריבוע של מספרים – או העלאת מספר בחזקת 2;
3. חקר הקשר בין ספרת היחידות של מכפלה למספר המקורי שהועלה בריבוע (כלומר, לשורש המספר);
4. התמודדות עם אומדן וסדר גודל.

אוכלוסיית היעד: תלמידים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי.

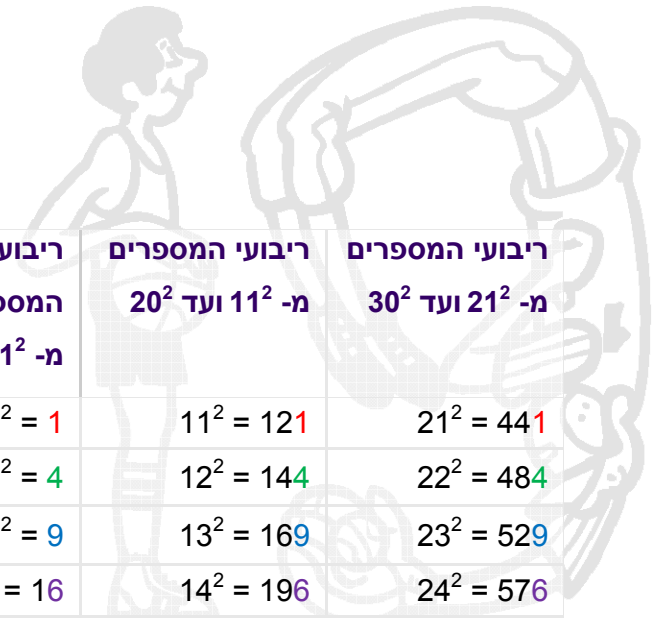
שלב א: יש לחשב את ריבועי המספרים מ- 1^2 עד 30^2 (1×1 עד 30×30), ולרשום זאת במקום המתאים, כמודגם בטבלה 1. (מומלץ לחשב בעל פה, ובמידת הצורך, להיעזר בחישובים כתובים. מומלץ לאמת את התוצאות באמצעות מחשבון).

בשלב הראשון של הרישום, אין לבקש צביעה של ספרת האחדות. שלב זה יגיע מאוחר יותר.

"תובנה מספרית מתבטאת בראייה אינטואיטיבית של מבנים מתמטיים ובקישורם לפעולות חשבון, בתחושה שקיים קשר בין דברים, ביכולת גיוס ידע וניסיון קודם על מנת לפתח אסטרטגיות פתרון שונות, בהבנת דרכי פתרון שונות ובגילוי פתיחות לדרכים חדשות." (משרד החינוך, 2006, עמ' 11). אנשים שונים פותרים אותה משימה בדרכים שונות "אישיות", מה שמקנה תחושה שהמתמטיקה אינה רק מקצוע נוקשה אלא היא בעלת היבט רחב. פיתוח דרכי פתרון מקוריות מאפשר שליטה בתהליך, ותורם לביטחון עצמי. התובנה המספרית (כמו התובנה הגיאומטרית) מתייחסת להתמצאות מתמטית כללית, ולא רק לפרק מתמטי מסוים.

תחומים שראוי לעסוק בהם תוך טיפוח תובנה מספרית (משרד החינוך, 2006):

- המספר בגודלו הכמותי ולא רק בפירוט אנליטי פורמלי של הספרות שלו;
- חישובים בעל פה, חישוב יעיל;
- אומדן, קירובים, תחושת סדר גודל של מספר ומקומו במערכת המספרים;
- אומדני מידות שונות;
- הבנת נחיצות הבקרה, בחינת סבירות של תוצאות, איתור טעויות, הכרת שיטות בקרה;
- בחינת מגוון דרכי הפתרון השונות, פתרון תרגיל חדש על סמך תרגיל ידוע ומוכר;
- פירוק צורה (במקרה של אריתמטיקה הכוונה למבנה מספרי) מורכבת למרכיביה, וצירוף של מרכיבים ליחידות מורכבות יותר;



- כשמעלים בריבוע מספרים, שספרת האחדות שלהם היא 6 או 4, מתקבל מספר, שספרת האחדות שלו היא 6.
- כשמעלים בריבוע מספרים, אשר ספרת האחדות שלהם היא 5, מקבלים מספר, שהסיומת שלו (ספרת העשרות וספרת האחדות ביחד) היא 25.
- כשמעלים בריבוע מספרים שספרת האחדות שלהם היא 0, מתקבל מספר, שגם ספרת האחדות וגם ספרת העשרות שלו הן 0.

ריבועי המספרים מ-1 ועד 10 ²	ריבועי המספרים מ-11 ועד 20 ²	ריבועי המספרים מ-21 ועד 30 ²
1 ² = 1	11 ² = 121	21 ² = 441
2 ² = 4	12 ² = 144	22 ² = 484
3 ² = 9	13 ² = 169	23 ² = 529
4 ² = 16	14 ² = 196	24 ² = 576
5 ² = 25	15 ² = 225	25 ² = 625
6 ² = 36	16 ² = 256	26 ² = 676
7 ² = 49	17 ² = 289	27 ² = 729
8 ² = 64	18 ² = 324	28 ² = 784
9 ² = 81	19 ² = 361	29 ² = 841
10 ² = 100	20 ² = 400	30 ² = 900

מסקנות

- אם כופלים מספר שלם בעצמו, ספרת היחידות של ריבועי המספרים המתקבלים היא: 1 או 4 או 5 או 6 או 9 או 0.
- לא מתקבל ריבוע של מספר, שספרת היחידות שלו היא 2 או 3 או 7 או 8.
- אם ספרת היחידות במכפלה שהתקבלה היא 2 או 3 או 7 או 8 – ניתן להסיק כי **טעינו!**

שלב ג: יש לרשום על הלוח את המספרים הבאים, כמכפלות (כמתואר בטבלה 2), ולבקש מהתלמידים לשער כיצד ניתן באופן מהיר לחשב ריבועי מספרים שספרת היחידות שלהם היא 5.

ריבוע המספר	תרגיל הכפל המתאים	המספר
25	5×5	5 ²
225	15×15	15 ²
625	25×25	25 ²
1225	35×35	35 ²
2025	45×45	45 ²
?	?	55 ²
?	?	65 ²
?	?	75 ²
?	?	85 ²

טבלה 2: ריבוע מספרים אשר ספרת האחדות שלהם היא 5

טבלה 1: ריבועי מספרים מ-1 ועד 30²

שלב ב: לבקש מהתלמידים לתור אחר גילויים מעניינים בטבלה, לדוגמה:

1. מה המשותף לספרת האחדות של כל ריבועי המספרים באותה שורה?
2. האם יש ריבועי מספרים בעלי אותה ספרת אחדות, שאינם באותן שורות?
3. נסו למצוא עוד תופעות מעניינות בטבלה. בהמשך, יש לבקש מהתלמידים לצבוע בצבעים זהים ספרות אחדות זהות, כמודגם בטבלה 1.

תשובות

- כשמעלים בריבוע מספרים, אשר ספרת האחדות שלהם היא 9 או 1, מתקבל מספר, שספרת האחדות שלו היא 1.
- כשמעלים בריבוע מספרים, שספרת האחדות שלהם היא 8 או 2, מתקבל מספר, שספרת האחדות שלו היא 4.
- כשמעלים בריבוע מספרים, שספרת האחדות שלהם היא 7 או 3, מתקבל מספר, שספרת האחדות שלו היא 9.

רמזים: מה תהיה סיומת המספר, אנחנו כבר יודעים... (25). מה לגבי שאר הספרות? נסו למצוא את הקשר בין ספרת המאות, או המספר המתקבל מספרות האלפים והמאות, לספרת העשרות (ניתן להיעזר בארגון הנתונים כמתואר בטבלה 3).

שלב ד: שלב זה הוא המתקדם ביותר, במסגרתו התלמידים אמורים לשלב את כל התובנות שרכשו במהלך הפעילות. בשלב זה של הפעילות יש תהליך שרומז על "ניחוש מושכל". התלמידים מתבקשים לענות על השאלה (ללא ביצוע של חישוב ממשי):

מהו המספר השלם שאם כופלים אותו בעצמו, כלומר, מחשבים את ריבוע המספר, מתקבלת המכפלה 676?

$$676 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} ?$$

רמזים ופתרון:

ידוע כי 676 הוא מספר שבין 400 ו-900, כלומר: $400 < 676 < 900$
 $20 \times 20 < 676 < 30 \times 30$

ספרת היחידות של המספר 676 היא 6,

כלומר, ייתכן שהמספר המבוקש (שריבועו הוא 676) הוא: 24 או 26.

כלומר:

$$24 \times 24 < 25 \times 25 < 26 \times 26$$

או

$$24 \times 24 < 625 < 26 \times 26$$

לכן, אם 676 הוא מכפלה של מספר שלם בעצמו,

האפשרות היחידה היא שהמספר המבוקש הוא 26

$$26 \times 26 = 676$$

דוגמה נוספת

מהו המספר השלם שאם כופלים אותו בעצמו,

מחשבים את ריבוע המספר, מתקבלת המכפלה

$$1,444 ?$$

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} = 1,444$$

המספר	התרגיל	ספרת העשרות של המספר המוכפל	ספרת העשרות (או במספרים גדולים יותר - ספרות המאות והעשרות) במכפלה
15^2	15×15	1	2
25^2	25×25	2	6
35^2	35×35	3	12
45^2	?	?	?

טבלה 3: קשרים בין ספרת העשרות במספר לספרות העשרות והמאות במכפלה

מסקנה: סיומת כל ריבוע מספר אשר ספרת האחדות שלו היא 5, תהיה תמיד 25. שאר הספרות (ספרות המאות, האלפים...), תתקבלנה ממכפלת שאר הספרות במספר העוקב, לדוגמה: $35^2 = 1225$, המספר 12 הינו מכפלה של 3×4 .

דוגמאות

$$55 \times 55 = ? \quad 5 \times 5 = 25 \quad \text{וכן המכפלה של 5 כפול 6,}$$

שהיא 30, השלימה את המכפלה ל-3,025.

$$65 \times 65 = ? \quad 5 \times 5 = 25 \quad \text{וכן המכפלה של 6 כפול 7,}$$

שהיא 42, השלימה את המכפלה ל-4,225.

$$75 \times 75 = ? \quad 5 \times 5 = 25 \quad \text{וכן המכפלה של } \underline{\quad} \text{ כפול } \underline{\quad},$$

שהיא _____.

ומה באשר למספרים גדולים יותר?

$$85 \times 85 = ?$$

$$95 \times 95 = ?$$

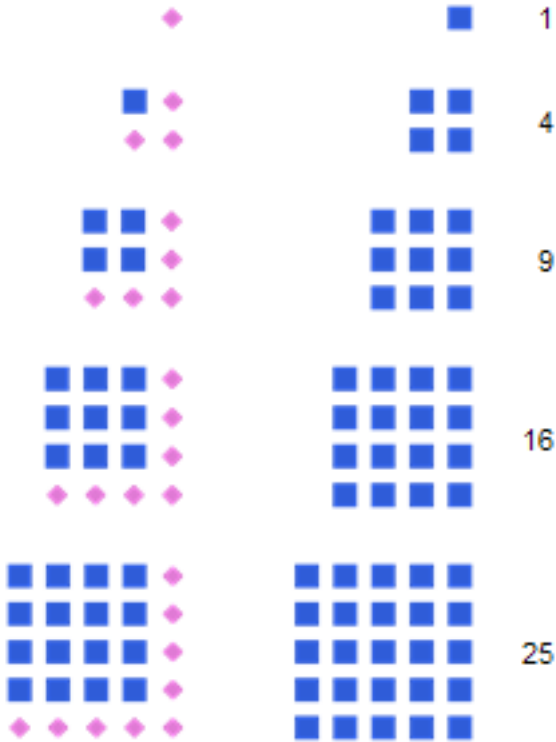
$$105 \times 105 = ?$$

$$995 \times 995 = ?$$

$$2005 \times 2005 = ?$$

מקורות

משרד החינוך (2006). תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.



מקור התמונה: <http://he.wikipedia.org>

תחת הערך: [מספר ריבועי](#)

על כותבת המאמר:

ד"ר דורית פטקין

מרצה לחינוך מתמטי במכללת סמינר הקיבוצים בתל-אביב, מדריכה מורים ופרחי הוראה, בעלת ניסיון עשיר בדרכי הוראה, ובטיפול בטעויות ובתפיסות מוטעות של תלמידים במתמטיקה.



רמזים ופתרון:

$$900 < 1,444 < 1,600$$

$$30 \times 30 < 1,444 < 40 \times 40$$

ספרת היחידות של המכפלה (1,444) היא 4, כלומר, ייתכן שהמספר המבוקש הוא: 32 או 38.

$$32 \times 32 < 35 \times 35 < 38 \times 38$$

כלומר:

$$32 \times 32 < 1,225 < 38 \times 38$$

אבל

$$1,225 < 1,444$$

לכן, אם 1,444 הוא מכפלה של מספר שלם בעצמו, האפשרות היחידה היא שהמספר המבוקש הוא 38 כלומר: $38 \times 38 = 1,444$.

כעת, אפשר לבדוק האם הניחוש המושכל אכן הצליח, וזאת באמצעות מחשבון, או באמצעות תרגיל כפל במחברת.

לסיכום, מה למדנו ומה עשינו?

- ביצענו חישובים בעל פה, חישוב יעיל.
- ביצענו אומדן, קירובים, ורכשנו תחושת סדר גודל של מספר, ומקומו במערכת המספרים.
- הבנו את הנחיצות בבקרה, בבחינת סבירות של תוצאות, באיתור טעויות, ובהכרת שיטות בקרה.
- בחנו את מגוון דרכי הפתרון השונות ויעילותן.
- פתרנו תרגיל חדש על סמך תרגיל ידוע ומוכר.
- פירקנו צורה מורכבת למרכיביה, וצירפנו מרכיבים ליחידות מורכבות.
- העלינו השערות ברמה אינטואיטיבית.