

## תנו כבוד למספר 20 – מספר שגור בתרבות המאיה

### עדה קצף

המכונה התקופה הקלאסית בתרבות המאיה, שנמשכה, בערך, משנת 250 לספירה (לפי מקורות אחרים משנת 300) ועד לשנת 900 לספירה. מסיבות לא ברורות, חלה שקיעתה של תרבות המאיה לאחר תקופה זו. בני המאיה המודרניים אינם שולטים בידע המדעי הרחב שבו שלטו בני המאיה הקדומים בתקופת תפארתם.

האם יש מקום בחינוך המתמטי לפרספקטיבה תרבותית? והאם חובתנו להכיר את דרכה המתפתלת של ההיסטוריה של המתמטיקה חוצת היבשות, העמים, והקהילות התרבותיות השונות, על מנת לרדת לסוף דעתם של הרעיונות המתמטיים הבסיסיים? לא ניחפז לענות על שאלות אלה ולהסיק מסקנות. תחילה נבצע גיחה קטנה לאחת התרבויות העתיקות במרכז אמריקה - תרבות שבטי המאיה הקדומים, ונתחקה אחר המספר 20, המספר שליווה את בני המאיה בתחומים שונים של חייהם, החל במשמעות שהעניק לשיטת הספירה שלהם במתמטיקה, וכלה בקביעת רצף הזמן וחישובים אסטרונומיים ואסטרונומיים שביצעו בעזרתו.



בני המאיה המודרניים במקסיקו (צילומים: עדה קצף)



אזור ממלכת המאיה במפה (אנציקלופדיה Ynet)

כפירות ארכיאולוגיות, שהתחילו בממלכת המאיה לפני כ-200 שנה, חושפות ערים ויישובים חקלאיים, בהם מערכות השקיה מורכבות, כבישים ומשכנות פאר, וכל אלה ברמה גבוהה גם לפי קנה המידה של ימינו. למבקר באזור נגלים מבנים ארכיטקטוניים מרשימים, מגולפים לרוב, ביניהם מקדשים שצורתם פירמידה מרובעת קטומה במידות שונות. הבסיס העליון של הפירמידה הוא גג המקדש, ששימש כמזבח, והפאות של הפירמידה

### ממלכת המאיה

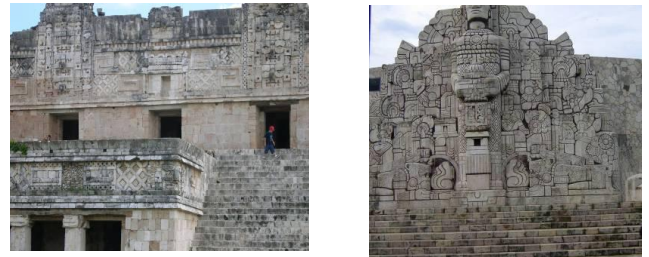
בני המאיה הקדומים התגוררו באזור מרכז אמריקה, רובם בחצי-אי יוקטן, כיום זהו אזור שמאחד חלקים של המדינות: מקסיקו, הונדורס, בליז, אל-סלבדור וגואטמלה (ראו נקודות על המפה). השרידים שנתרו מתרבות המאיה מוכיחים כי הם חיו באזור החל מהאלף השני לפנה"ס. במאמר זה נתייחס לתקופה מאוחרת יותר,

## המספר 20 - הבסיס לספירה במתמטיקה של המאיה

מערכות מספרים ובסיסי ספירה הומצאו בתרבויות עתיקות שונות, בהשפעת הרגליהם הרחוניים וצורכיהם היום-יומיים של בני אותן תרבויות. הבבלים קבעו את הבסיס 60, שמקורו, כנראה, בבחירת מספר "נוח" לחישובים מתמטיים (עד היום אנו משתמשים במספר 60 למדידת שניות ודקות, ומודדים גודל זוויות במעלות, שכל מעלה היא  $1/360$  של המעגל). רבים אחרים ניצלו את האפשרות לספור באמצעות חלקי הגוף. אחת הסברות היא שהבחירה בשיטה העשרונית נבעה מספירת 10 אצבעות הידיים. השיקול שעמד מאחורי שיטת הספירה של המאיה הוא ספירה באמצעות אצבעות הידיים והרגליים גם יחד, ומכאן הבסיס היה 20. שלוש שיטות הספירה, שנבנו על בסיסים אלה נקראות: סקסגסימלית (sexagesimal), לפי בסיס 60 אצל הבבלים; ויג'סימלית (vigesimal), לפי בסיס 20 אצל המאיה; והשיטה הנהוגה היום, עשרונית (decimal), לפי בסיס 10. המשותף לשלוש השיטות שכולן שיטות פוזיציוניות – המבוססות על **שמירת ערך המקום**, כלומר, ערכה של ספרה נקבע על-פי מיקומה במספר. אך על אף שהבבלים הכירו באפס הם לא הציעו סימן בשבילו, אלא השאירו רווח במספר כדי לציין אפס. יתרון של שיטות המאיה והשיטה העשרונית הוא שהעניקו משמעות לאפס, וקבעו סימן מיוחד להצגתו. השוני בין שתי השיטות האחרונות בא לידי ביטוי במגוון הסימנים (ספרות) לכתיבת המספרים. השיטה העשרונית, הנקראת גם השיטה ההודו-ערבית, שהובאה על-ידי הערבים מהודו כבר במאה ה-9 לספירה, ונודעה ברבים באירופה עם פרסום ספרו של פיבונצ'י "Liber Abaci", בשנת 1202 לספירה, כללה 10 סימנים (0-9). לעומתה, מערכת המספרים של המאיה נבנתה באמצעות 3 סימנים בלבד. נרחיב עתה לגבי שיטת הספירה של המאיה.

הסימנים בהם השתמשו המאיה לכתיבת המספרים הם: סימן לרישום ערך השווה לאפס וצורתו דמות קונְכְּה; סימן

בנויות כך, שהן מהוות גרם מדרגות תלול וארוך המוביל מתפללים אל המזבח. כמעט בכל אתר ניתן לראות גם מבנה ששימש כמצפה כוכבים, ולפי השרידים שנמצאו, התנהלה במצפים אלו פעילות ענפה, החל מעריכת תצפיות וכלה במדידות, שעיבודן נחשב היום להישג מעורר התפעלות באסטרונומיה ואסטרוולוגיה.



שרידי המבנים של המאיה במקסיקו (צילומים: עדה קצף)

במתמטיקה של המאיה נעשה שימוש בשני מושגים יסודיים: אפס וערך המקום. בזה הקדימו המאיה להעניק לעולם את שיטת הספירה הפוזיציונית ואת הספרה אפס, בעת ובעונה אחת, שנים רבות לפני שאירופה התוודעה לשיטה העשרונית, שאנו נוהגים בה כיום. שרידים של לוחות, גילופי קיר וכתב-יד, שנמצאו בחפירות הארכיאולוגיות באזור, נאספו במרכזים החוקרים את תרבות המאיה, בדרזדן (למשל, Finley, 2002), במדריד ובפריס. שרידים אלה מאפשרים הצצה, בין היתר, ללוחות הכפל והחישובים האסטרונומיים והאסטרוולוגיים, המעוררים הערכה רבה כלפי העיזבון התרבותי העשיר שהשאירו אחריהם בני המאיה הקדומים. מטרת מאמר זה לחשוף את הרעיונות המתמטיים, שבעתיים זכתה תרבות המאיה להיכנס אל דפי ההיסטוריה של המתמטיקה.

והנה דוגמה למספר הגדול מ-400 ( $20^2 \times m = 400m$ ) והקטן מ-8000 ( $20^3$ ), המספר 1263. בקומה הראשונה (המספרים מ-1 עד 19), פירושו:  $2^0 \times 3 = 3$ , בקומה השנייה (כל סימן מייצג מספר שהוא כפולה של 20), פירושו:  $20^1 \times 3 = 60$ , בקומה השלישית (כל סימן מייצג מספר שיש להכפילו ב- $20^2$ ), פירושו:  $20^2 \times 3 = 1200$ . אם נחבר את המספרים שרשמנו כאן ( $3+60+1200$ ) נקבל את המספר 1263 בכתיב המאיה:

קומה 3		$20^2 \times 3 = 1200$
קומה 2		$20^1 \times 3 = 60$
קומה 1		$20^0 \times 3 = 3$
<hr style="width: 100%;"/>		
1263		

להלן דוגמאות נוספות למספרים הגדולים מ-100 בסימני המאיה, והסבר במספרים של השיטה העשרונית.

מספרים בסימנים של המאיה	פירוש המספרים בשיטה העשרונית
	$(15 \times 20^0) + (5 \times 20^1) = 115$
	$(1 \times 20^0) + (12 \times 20^1) = 241$
	$(0 \times 20^0) + (1 \times 20^1) + (6 \times 20^2) = 2,420$
	$(3 \times 20^0) + (0 \times 20^1) + (0 \times 20^2) + (6 \times 20^3) = 48,003$

רישום זה של המספרים, השומר על עליית ערך החזקה באחת בכל קומה נוספת, הקנה לשיטת הספירה של המאיה את הזכות להיקרא שיטה פוזיציונית.

לרישום ערך השווה לאחד וצורתו נקודה; וסימן לרישום ערך השווה לחמש וצורתו קו.

			<b>סימני מאיה</b>
0	1	5	<b>סימנים תואמים בשיטה העשרונית</b>

ברוב המקרים, רשמו המאיה את המספרים במבנה קומתי (פחות נפוץ היה סדר אופקי בכתיבה מימין לשמאל). מה שאצלנו קרוי 'יחידות' הופיעו בקומה הראשונה, בסיס המבנה, ובהמשך, בכל קומה נוספת, הוכפל ערך הרשום בחזקות עוקבות של 20.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19

המספרים מ-0 ועד 19 בסימני המאיה, ובסימנים של השיטה העשרונית.

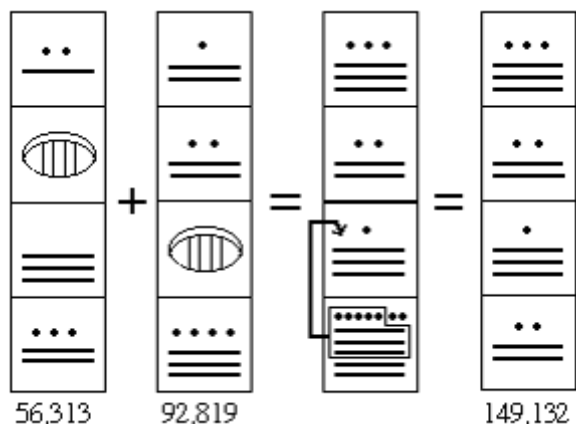
כאמור, כל המספרים הקטנים מ-19 מופיעים בקומה הראשונה (בסיס) ופירושם:  $20^0 \times m = m$ , כאשר רישום המספר עצמו אף הוא מסודר בצורת קומות. ראו, לדוגמה, פירוש הסימנים למספר 12:

$$\begin{array}{r}
 \bullet \bullet \quad (2) \\
 \text{—} \quad (5) \\
 \text{—} \quad (5) \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

המספרים הגדולים מ-20 ( $20^1 \times m = 20m$ ) והקטנים מ-400 ( $20^2$ ), נרשמו באמצעות שתי קומות. ראו דוגמאות:

23	55	60	91	100

Fought (1989) מדגים כמה פשוט לחבר שני מספרים גדולים יחסית, בשיטת המאיה:



$$\begin{aligned}
 &(13 \times 1 + 15 \times 20 + 0 \times 400 + 7 \times 8000) + \\
 &(19 \times 1 + 0 \times 20 + 12 \times 400 + 11 \times 8000) = \\
 &12 \times 1 + 16 \times 20 + 12 \times 400 + 18 \times 8000 = \\
 &(13 + 300 + 0 + 56000) + (19 + 0 + 4800 + 88000) = \\
 &12 + 320 + 4800 + 144000 = \\
 &56,313 + 92,819 = \\
 &149,132
 \end{aligned}$$

המאיה שלטו בביצוע של ארבע פעולות החשבון. עם זאת, יש לציין שפעולות הכפל והחילוק שלהם נראות מסובכות למדי ליישום. קיימת סברה שהמאיה לא שלטו בידע מתמטי בשברים, והשתמשו בדרכים עקיפות לביצוע החילוק. מתמטיקאים הנחשפים לכתבי המאיה המכילים חישובים ותיאורים מתמטיים, מציעים הסברים לדרכים בהן ביצעו המאיה, לדעתם, את ארבע פעולות החשבון. כך חוקר מקסיקני בשם Cristóbal de Las Casas (2005), מביא פירוש מפורט לא רק לארבע פעולות החשבון, אלא מרחיק לכת ונותן את גרסתו לפעולות הוצאת שורש, כפי שהוא מאמין שעשו זאת המאיה.

### המספר 20 - חוט השני בלוחות השנה של המאיה

לוחות השנה הראשונים הופיעו כבר בעת העתיקה. הם היו פועל יוצא של אורח חיים, פיתוח חקלאי, מצב מדיני והיבטים רוחניים ותרבותיים של החברה, שיצרה את הלוח. בסעיף הקודם למדנו להכיר את שיטת הספירה של המאיה המבוססת על בסיס 20. בסיס זה שימש את

בשרידי לוחות של חישובים מתמטיים ולוחות השנה, שנמצאו בחפירות בממלכת המאיה, ניתן לראות גם כתיבה של מספרי המאיה בסדר אופקי מימין לשמאל. להלן שתי דוגמאות:

$$\begin{array}{c}
 \cdot \quad || \\
 13 + 6(20) = 133
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 : \quad \text{shell} \quad \cdot \quad || \quad || \\
 8 + 11(20) + 0(400) + 2(8000) = 16228
 \end{array}$$

### חיבור וחיסור מספרים בשיטה העשרימית (לפי בסיס 20)

סכום חיבור של שני מספרים נקבע בשיטת המאיה על-פי עיקרון ההוספה (additive), חיבור ערכי הסימנים בשני המחברים בהתאמה. במידה וסכום הנקודות המחוברות גדול מ-4, כלומר, שווה ל-5 ויותר, מחליפים את חמש הנקודות בקו (סימן המייצג את הערך 5). כנ"ל עם מספר הקווים, כשסכום הקווים המחוברים גדול מ-3, כלומר, שווה ל-4 ויותר, מחליפים את ארבעת הקווים בנקודה אחת בקומה מעל (4 קווים הם שווי ערך ל-20, מה שמוביל להקפצת קומה). חיסור מתבצע על-פי אותו היגיון. להלן מספר תרגילים לדוגמה בחיבור ובחיסור:

$$\begin{array}{c}
 \underline{5} + \underline{\cdot \cdot \cdot} = \underline{\cdot \cdot \cdot} \\
 \underline{\cdot \cdot \cdot} - \underline{5} = \underline{\cdot \cdot \cdot} \\
 \underline{\cdot} + \underline{\cdot \cdot \cdot} = \underline{\cdot}
 \end{array}$$

אולם לוחות אלו לא השביעו את רצונם המלא של האסטרונומים של המאיה, וזאת בשל חוסר יעילותם במעקב אחר פרקי זמן ארוכי טווח. משום כך הם הציעו לוח נוסף, המכונה "הספירה הארוכה", וייעדו אותו למעקב אחרי תהליכים גלובליים, המתייחסים למחזוריות בחישוב עידנים. העידן הראשון, על-פי הלוח, התחיל בשנת 3113 לפנה"ס ואורכו 5,125 שנה. מה שאומר שהוא צפוי להסתיים בסוף 2012 לספירה (לפי חישובים של לוח השנה הגריגוריאני).

ניתן להיווכח בחשיבות שייחסו המאיה לכל הקשור ללוחות שנזכרו לעיל, כשאנו רואים כיצד בחרו להכניס שינויים בשיטת הספירה, על מנת להסתייע בה בעריכת חישובים אסטרונומיים. תפקידו של לוח שנה הוא לתת מענה לחלוקת הזמן לשנים, לחודשים ולימים, ולאפשר לבצע פעילויות מתמטיות הכרוכות בכך בנוחות מרבית. כך, כנראה, סברו גם המאיה, כשהתאימו את שיטת הספירה שלהם ללוח השנה השמשי, ההאב, על-ידי סטייה שעשו בחזקות העוקבות של 20.

נעקוב אחר שתי שיטות ספירה, האחת לפי בסיס 20 ("תקינה"), והשנייה, לפי בסיס מעורב, 20 ו-18 ("לא תקינה", המותאמת ללוח השנה). ניתן לראות, ש"טעות" בקומה השלישית הובילה למחזור של 360 בהמשך הקומות, כשהחל מהקומה הרביעית ממשיך תהליך של החזקות העוקבות של 20, כלומר, כאשר  $n \geq 3$  יירשם כל מחובר בצורה:  $m \times 18 \times 20^{n-2}$ .

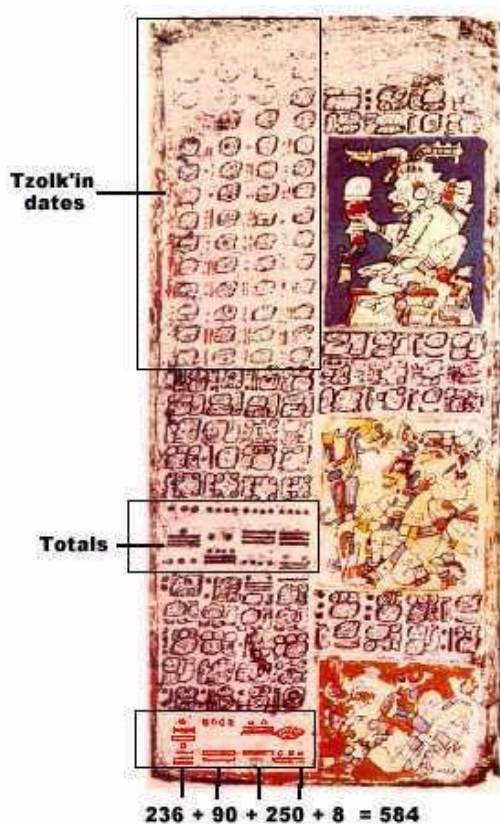
המאיה גם בבניית שני לוחות שנה. הלוח הראשון היה בעל מחזור של 260 יום, שהתחלקו ל-20 חודשים בני 13 יום כל אחד. לוח זה, המכונה צולק'ין (Tzolkin), היה לוח קוסמי, פולחני-דתי, שבעזרתו ביצעו המאיה ניתוח אסטרולוגי על-פי תאריך לידתו של האדם, בהתאם למיקומם של כוכבי לכת בגלגל המזלות בתאריך זה. הלוח השני, המכונה האב (Haab), היה לוח שמשי שעל-פיו זמן ההקפה של כדור הארץ את השמש נמשך 365 יום. הלוח שימש למטרות אזרחיות, וכלל 18 חודשים בני 20 יום כל אחד, ועוד חודש 1 קצר בן 5 ימים. המאיה סברו שימי החודש הקצר בן 5 הימים הנם ימים של מזל ביש, ולכן יש להעביר אותם באי-עשיית דבר, ומי שנולד באחד הימים האלה יהיה חסר מזל ואושר. המספר 260, שנבחר על-ידי המאיה כאורך השנה בלוח צולק'ין, נחשב למספר קסם באסטרונומיה, הודות להופעתו בשלמותו, או הופעה של גורמיו (52 x 5, 20 x 13, וכו'), בחישובים אסטרונומיים בהקשר לירח ולשמש - בחישובי תופעות ליקויי ירח ושמש, וכן בהקשר לתנועות של כוכבי הלכת. המאיה גילו שאיחוד שני הלוחות, הצולק'ין וההאב, מאפשר למצוא מחזור משותף של 18,980 יום. התאריך של תחילת המחזור מתרחש בכל פעם שעוברות 52 שנים לפי לוח ההאב ו-73 שנים לפי לוח הצולק'ין. לפי מסורת של המאיה, זהו תאריך להתחדשות ולהתחלות חדשות. לוח מאוחד זה כונה "לוח כפול" (Calendar Round). להלן דוגמה ללוח ההאב.



לוח השנה של בני המאיה - מחזור ההאב בן 19 (18+1) חודשים (צילום מוויקיפדיה)



הסבר למספר לפי בסיס מעורב 18 ו-20 שיטת הספירה "לא תקינה"	הסבר למספר לפי בסיס 20 שיטת הספירה "תקינה"	מספר בסימני המאיה
$(4 \times 1) + (12 \times 20) + (4 \times 18 \times 20) = 1,684$ $4 \times 360$	$(4 \times 1) + (12 \times 20) + (4 \times 20^2) = 1,844$ $4 \times 400$	
$(0 \times 1) + (0 \times 20) + (6 \times 18 \times 20) = 2,160$ $6 \times 360$	$(0 \times 1) + (0 \times 20) + (6 \times 20^2) = 2,400$ $6 \times 400$	
$(9 \times 1) + (0 \times 20) + (3 \times 18 \times 20) + (2 \times 18 \times 20^2) = 15,489$ $3 \times 360 \quad 2 \times 7200$	$(9 \times 1) + (0 \times 20) + (3 \times 20^2) + (2 \times 20^3) = 17,209$ $3 \times 400 \quad 2 \times 8000$	

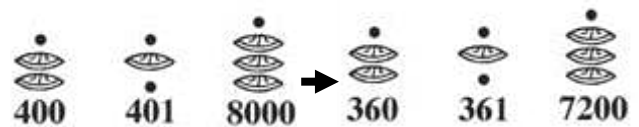


לוחות נוספים ניתן לראות באתר:

<http://www.bibliotecapleyades.net/ciencia/dresden/dresdencodex04.htm>

הישגיהם של בני המאיה מעוררים שוב ושוב התפעלות והערכה רבה. למרות שחסרו להם כלים אסטרונומיים, הצליחו להביא לידי מימוש תצפיות אחרי תנועת הכוכבים, השמש והירח, ולבצע מדידות בדיוק כה רב. כידוע, על-פי החישובים האסטרונומיים העדכניים שנת השמש נמשכת 365.2422 ימים. הלוח הלועזי (גרגוריאני) קובע את אורך

לא פעם מגיעים חוקרים שונים המפענחים את הכתוב על אותם לוחות, ובאותם כתבי-יד לממצאים סותרים. לא ניתן להאשימם, מקור הבלבול הוא ההתכוונות השונה של המאיה בשימוש באותם סימנים למספרים שונים. למשל, המאיה בחרו לסמן באותם סימנים את כל המספרים החל מהקומה השלישית, הן בחישוב מתמטי גרידא והן בלוח שנה, למרות שמדובר בערכים שונים. ראו דוגמאות:



הבה נתבונן בכתב יד ובו חישובים שערכו האסטרונומים של המאיה. זהו לוח ונוס, מוצג אחד מבין רבים באוסף הנקרא "דרזדן קודקס", השמור בספריית דרזדן בגרמניה. פריטים ראשונים באוסף הגיעו לדרזדן כבר במאה ה-18 (Dresden codex, Finley, 2002). לוח זה פוענח על-ידי ארנסט פורסטמאן בשנת 1901 (Finley, 2002). בתחתית הלוח ניתן לראות קבוצת מספרים בצבע אדום שסכום חיבורם שווה ל-584. ערך זה קרוב מאוד למחזור הסינודי (synodic period) של ונוס, שהינו עומד על 583.92 ימים.



כיתוב של תאריך התואם ל- 21.12.2012 מלוח הספירה הארוכה של המאיה (הטור הקיצוני השמאלי). צילום מוויקיפדיה.

### מקורות

Cristóbal de Las Casas, S. (2005). *How to calculate with Mayan Numbers*. Chiapas, Mexico [http://localhs.com/pdf/english\\_mayan\\_math.pdf](http://localhs.com/pdf/english_mayan_math.pdf)

Finley, M.J. (2002). *The Dresden Codes, Venus Table*. Saskatoon, Saskatchewan, Canada. ,from: [The Real Maya Prophecies Website](http://www.mayanprophecies.com/).

Fought, S (1989). *Mayan Arithmetic. Provoking Thoughts - The Magazine Devoted to the Thinker in All of Us* (Knowles Dougherty, Publisher and Editor) 1(2)

מגר, נ' (1999). שבטי המאיה (מ- 2000 לפני סה"נ ועד לימינו). מתוך: צ' דרוי, עורכת, *תרבויות קדומות ביבשת אמריקה*. הוצאה לאור: משרד הביטחון, ישראל. מתוך הספרייה הווירטואלית של מט"ח, מרכז לטכנולוגיה חינוכית:

<http://lib.cet.ac.il/pages/item.asp?item=10132>

### ד"ר עדה קצף

מחברת הספר "בינה וקסם במתמטיקה ההומניסטית" (2007). ב- 20 השנים האחרונות שימשה כמרצה בחוג למתמטיקה במכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר-שבע.



השנה כ- 365.2425 ימים, ואילו המאיה חישובו את השנה כנמשכת 365.2420 ימים (מגר, 1999). את העודף בין 365 יום לבין ערך זה הוסיפו מדי פעם. לא רק זאת, אלא מהממצאים שעלו מכתבי המאיה (נמצאו בגואטמלה), ניתן ללמוד שהם מצאו ש- 149 חודשים ירחיים נמשכים 4400 ימים. פעולת החילוק מובילה למסקנה, שלפי חישוביהם, החודש הירחי נמשך  $\frac{4400}{149} = 29.5302$  ימים. זאת סטייה מזערית מהידוע כיום, שהזמן בין מולד ירח אחד למשנהו הוא 29.53059. שוב דיוק המעורר תמיהה, אם להתחשב בכך שמידע זה היה זמין לבני המאיה כבר בתחילת האלף הראשון לספירה.

ונסיים במשהו אופטימי (או לא, תלוי את מי שואלים), לפי הנבואה של המאיה ביום 21.12.2012 יסתיים העידן הנוכחי (שכאמור נמשך 5125 שנים), ויחול שינוי בגלקסיה, שינוי המתרחש כל 26,000 שנה. על-פי מסורת של המאיה זו תהיה שנה שבה יתרחש שינוי משמעותי בתולדות האנושות, שהחל כבר 20 שנה קודם לכן, כלומר, ב-1992. יש הסבורים, שההתפתחויות האינטנסיביות בכל תחומי החיים בכדור הארץ בעשרים השנים האחרונות מצביעות על קץ האנושות שלנו, כתוצאה מקטסטרופה גלובאלית. אולם מנגד, יש שרואים דווקא בתאריך זה את פתיחת הדלת: ליקום העצום, לחיים ותודעה חדשים ומשמעותיים יותר, להרמוניה של הגוף והנפש. מהי האמת ומהו המיתוס, לא נוכל לומר בוודאות. אך דבר אחד ברור, ללא החישובים המתמטיים, שידעו לבצע המאיה, לא היו כל כך הרבה אנשים עוסקים בשאלה מה יקרה בשנת 2012.