מתמטיקה מצרית חלק ב - פעולות בשברים

עטרה שריקי

במאמר הקודם עסקנו בארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים, כפי שבוצעו במצרים העתיקה. במאמר זה נציג מקצת מהידע האריתמטי שהיה למצרים בנושא השברים.

1. שברים

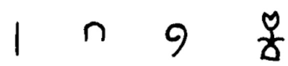
א. סימון שברים

שיטת הסימון המצרית גרמה לכך שהמצרים השתמשו רק בשברי יחידה (שברים שהמונה שלהם הוא 1, כלומר, שברים מהצורה $\frac{1}{n}$), למעט שני שברים יוצאי דופן: השבר $\frac{2}{3}$, ולעתים נדירות גם השבר $\frac{3}{4}$.

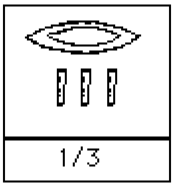
הסיבה לכך היא שהסימון עבור שבר היה באמצעות השמת הסימון ההירוגליפי  (פה פעור) מעל למספר.

ניזכר בכמה מהסימונים שהיכרנו:

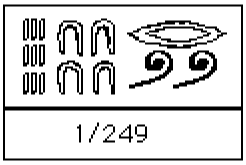
1 10 100 1000



בהתאם לכך המספר $\frac{1}{3}$ סומן באופן הבא:



כאשר היו סימנים רבים, סימן הפה הפעור צויר רק מעל שני הסימנים הראשונים.



במקרה זה ניתן היה לטעות ולחשוב שמדובר במספר $49+\frac{1}{200}$. ההבנה שמדובר במספר $\frac{1}{249}$ יכולה לנבוע מתוך אחת משתי אפשרויות: הבנת ההקשר שבו מוצג המספר, או היכרות עם האופן שבו רשמו המצרים את המספרים בדרך-כלל - מהגדול לקטן, מימין לשמאל. אילו אכן היה מדובר במספר

$\frac{1}{200}+49$, ניתן לשער שהמצרים היו רושמים

את $\frac{1}{200}$ משמאל ל- 49. יחד עם זאת, מכיוון שלא תמיד נשמרה ההקפדה על כללי הרישום, ההקשר היה במקרים רבים משמעותי יותר להבנת המספר.

כאשר החלו לכתוב מספרים בכתב היראטי, ה"פה הפעור" הפך לנקודה קטנה, מה שהיקשה לעיתים קרובות על פיענוח מידי של המספר.

את השבר $\frac{2}{3}$ ייצגו המצרים על-ידי הסמל 

בדקו את עצמכם:

1. מיהו המספר שלהלן:

(פתרון ניתן למצוא בסוף המאמר.)

ב. פירוק שבר לסכום שברי יחידה

כל שבר, מלבד $\frac{2}{3}$ הוצג על-ידי המצרים כסכום של שברי יחידה שונים זה מזה. לדוגמה:

$$\frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28} \quad ; \quad \frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

נראה ששבר כגון $\frac{6}{7}$ פרקו המצרים לשברי יחידה באמצעות ביצוע פעולת החילוק 6:7.

כפי שראינו במאמר הקודם, המצרים כפלו וחילקו ב- 2. בהצגת פעולת החילוק באמצעות טבלאות, הראינו כיצד יש לבחור את המספרים המופיעים בעמודה הימנית של הטבלה, כך שסכומם יהיה שווה למחולק. לאחר מכן סיכמנו את המספרים המתאימים בעמודה השמאלית, וקיבלנו את המנה.

לאור זאת, בפעולת החילוק של 6 ב- 7, נרצה שבעמודה הימנית של הטבלה יופיעו מספרים שסכומם יהיה המחולק 6.

בהתאם לכך ביצעו המצרים את פעולת החילוק של 6 ב- 7 באופן הבא (Burton, 2006):

מתחילים עם פעם אחת 7		7	1	
מחלקים ב- 2	←	$3+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	→
שוב מחלקים ב- 2	←	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	→

שימו לב לכך שסכום המספרים בשתי השורות האחרונות של העמודה הימנית הוא $5+\frac{1}{4}$,

ולכן חסר לנו עוד $\frac{3}{4}$ כדי להגיע לסכום 6.

כלומר, בעמודה הימנית אנו זקוקים ל- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

לצורך זה נקטו המצרים באסטרטגיה הבאה - הם ידעו ש- $\frac{1}{7}$ מ- 7 שווה ל- 1, ולכן בהמשך הטבלה רשמו:

		1	$\frac{1}{7}$	
מחלקים ב- 2	←	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$	→
שוב מחלקים ב- 2	←	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$	→
המכפלה		6	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$	סה"כ פעמים

הערה: אמנם השבר $\frac{1}{7}$ אינו מתקבל מתוך התהליך הרגיל של חילוק מספר ב- 2, אך כפי שנראה במאמר הבא, המצרים ידעו לחשב

שבר שהוא $\frac{1}{n}$ ממספר כלשהו n, והשתמשו בכך לצורך פתרון משוואות.

המצרים, מתוך עניין, חיפשו אחר הצגות של שברים כך שבסכום שברי היחידה לא תהיה חזרה.

ברור שכל שבר מהסוג $\frac{m}{n}$ ניתן להציג כסכום של m פעמים השבר $\frac{1}{n}$, אך הדבר לא היווה כל אתגר עבור המצרים, ולכן הפירוק שהם ביצעו היה לסכום שברי יחידה שונים זה מזה.

בפפירוס רינד מופיעה טבלה עבור פירוק של שברי יחידה (העמודה הימנית) המוכפלים פי 2 (העמודה האמצעית) לסכום של שברי יחידה אחרים (העמודה השמאלית), עבור מכנה אי-זוגי בין 5 ל- 101. לדוגמה (בכתב של ימינו):

שבר יחידה	שבר היחידה מוכפל פי 2	פירוק לסכום שברי יחידה
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$
$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$

מובן שהעמודה האמצעית לא הופיעה בפפירוס רינד, שכן לא היה להם סימון עבור שבר שהמונה שלו הוא 2, אלא רק העמודה הימנית והעמודה השמאלית.

נבדוק את הפירוק הראשון המוצג בטבלה:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{5+1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

אכן קיבלנו את השבר $\frac{1}{5}$ מוכפל פי 2.

בדקו את שאר הפירוקים.

בדקו את עצמכם:

2. לאיזה שבר יחידה המוכפל ב- 2 מתאים הפירוק: $\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{380}$?

(פתרון ניתן למצוא בסוף המאמר.)

מספר חוקרים (למשל, Gillings, 1982) סבורים שמפפירוס רינד עולה שהמצרים נקטו במספר כללים בסיסיים בעת פירוק שבר לסכום שברי יחידה:

1. מתן עדיפות לשברים בעלי מכנים שהם מספרים נמוכים (1000 לכל היותר);
2. מתן עדיפות לפירוק שבר לסכום של שני שברי יחידה (במידת האפשר), או לארבעה לכל היותר;
3. רישום השברים מהקטן לגדול;
4. העדפת מכנה שהוא מספר זוגי (לעתים על חשבון כמות השברים).

לפי Burton (2006), המצרים נקטו בכלל נוסף:

5. המכנה של השבר הראשון הוחלף במספר גדול יותר, במקרים בהם ניתן היה להקטין את המכנים של שאר השברים. כך, למשל, העדיפו המצרים את הפירוק:

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$$

על-פני הפירוק:

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{18}+\frac{1}{186}+\frac{1}{279}$$

אחרים (למשל, Bruins, 1981) טוענים שכדי לעמוד במגבלות אלה היה על המצרים לבצע פירוקים רבים לאותו מספר, כדי להיות בטוחים שאכן עמדו במגבלה, ואין כל עדות לכך שאכן עשו זאת. יחד עם זאת, השאלות שעליהן **אין** לחוקרים מענה הן - כיצד ביצעו המצרים את הפירוק, ומדוע העדיפו פירוק מסוים על-פני פירוק אחר, שכן במרבית המקרים ניתן לפרק שבר יחידה ביותר מאשר דרך אחת.

להלן נציג דרך אפשרית לפירוק שבר כסכום של שברי יחידה שונים.

לדוגמה, ניקח את השבר $\frac{2}{5}$. בטבלה הקודמת ראינו כיצד ביצעו המצרים את הפירוק. אולם, ניתן היה לפרק את השבר לשברי יחידה גם בדרך אחרת:

שבר היחידה הקרוב ביותר ל- $\frac{2}{5}$, אך קטן ממנו, הוא $\frac{1}{4}$. נחשב את ההפרש בין שניהם: $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{8-5}{20}=\frac{3}{20}$. עתה נרשום את ההפרש שהתקבל, באמצעות שברי יחידה.

שבר היחידה הקרוב ביותר ל- $\frac{3}{20}$, אך קטן ממנו, הוא $\frac{1}{7}$ ($\frac{3}{20}>\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$). נחשב את ההפרש ביניהם הוא:

$$\frac{3}{20}-\frac{1}{7}=\frac{21-20}{140}=\frac{1}{140}$$

$\frac{1}{140}$ הוא שבר יחידה, ולכן סיימנו את תהליך הפירוק. סה"כ קיבלנו באמצעות שיטה זו:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{140}$$

סביר להניח שהמצרים לא בחרו בפירוק זה, אלא בפירוק אותו הצגנו קודם לכן, משתי סיבות עיקריות: כמות השברים בפירוק זה גדולה מכמות השברים בפירוק שהוצג, וכמו כן המכנה הקטן ביותר בפירוק זה הוא 4, לעומת המכנה הקטן ביותר בפירוק שהוצג - 3.

הערה: לצורך ביצוע פירוק של שבר לסכום שברי יחידה ניתן להיעזר בזהות $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$ (למעשה, בדרך זו ניתן ליצור שרשרת אינסופית של שברי יחידה).

לכן, את הפירוק של $\frac{2}{5}$ לשברי יחידה ניתן היה להתחיל באופן הבא: $\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$. אבל היות והמצרים לא חזרו על אותו שבר יחידה, ניתן לפרק את $\frac{1}{5}$ בעזרת הנוסחה שלעיל, באופן הבא:

$$\frac{1}{5}=\frac{1}{5+1}+\frac{1}{5\cdot(5+1)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

במקרה זה, הפירוק של $\frac{2}{5}$ יהיה:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

מובן שגם פירוק זה אינו עונה על הכללים הנוקשים שכנראה הציבו לעצמם המצרים.

מתוך שלושת הפירוקים שהצגנו לשבר $\frac{2}{5}$ עולה שפירוק של שבר לסכום שברי יחידה אינו יחיד.

בשנת 1883 הציג המתמטיקאי סילבסטר הוכחה לכך ש**כל** שבר בין 0 ל- 1 ניתן להצגה כסכום של שברי יחידה שונים.

מפליא לגלות שאחמס לא ביצע ולו טעות העתקה אחת. ייתכן אף שהוא עצמו היה זה שביצע את החישובים. יש לציין שבפפירוס רינד עצמו מופיעות כמה טעויות, אך הללו נראות כשגיאות חישוב ולא כטעויות העתקה, היות ויש שימוש מצטבר בטעויות במקום לחזור ולהשתמש בחישובים נכונים, כפי שהיה קורה אילו היה מדובר בטעויות העתקה.

נדגים כעת כיצד השתמשו המצרים בטבלת הפירוקים של שברי יחידה המוכפלים פי 2 לסכום של שברי יחידה אחרים. דוגמה כזו ניתן

למצוא, למשל, בבעיה מספר 21 בפפירוס רינד (הערה: בבעיה זו מופיע גם השבר $\frac{2}{3}$ שהיה מקובל על המצרים, למרות שלא היה שבר יחידה).

נוסח בעיה מספר 21, בתרגום חופשי, הוא:

השלם את $\frac{2}{3}$ ו- $\frac{1}{15}$ ל- 1.

כיום היינו פותרים את הבעיה באופן הבא:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+x=1 \quad /\cdot 15 \Rightarrow$$

$$10+1+15x=15 \Rightarrow 15x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{15}$$

למצרים לא היה, כמובן, הסימון של x, ולא היה להם סימון עבור שבר שהמונה שלו הוא 4, ולכן הם הציגו את הפתרון באופן שונה. המצרים רשמו בצבע אדום: השְלם את 10 ו- 1 ל- 15 (כמו שמופיע בשלב הביניים לעיל: $10+1+\square=15$). כלומר, הם חיפשו את הערך של $\square$, או במקרה של המשוואה שלמעלה - את הערך של $15x$. התשובה שלהם הייתה - 4 (כלומר, $15x=4$, כי $10+1+4=15$). את המספר 4 הם פירקו ל- $2\cdot2$, ולאחר מכן חיפשו פתרון ל- $2\times2\times\frac{1}{15}$.

היות והטבלה הכילה פתרון עבור $2\times\frac{1}{15}$, הם רשמו $\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$. עתה נשאר להם לכפול ב- 2 את $\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$. היות ואין כל בעיה לכפול ב- 2 שבר שמכנהו מספר זוגי (שכן המונה והמכנה מצטמצמים), המצרים רשמו בקלות את הפתרון הסופי- $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$:

$$2\times(\frac{1}{10}+\frac{1}{30})=\frac{2}{10}+\frac{2}{30}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$$

ואכן, $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{3+1}{15}=\frac{4}{15}$, כפי שמצאנו קודם.

הטבלה המוכנה גם סייעה למצרים לבצע את פעולת הכפל עם שברים.

ג. כפל שברים

במסגרת זו לא נציג את הדרך המורכבת שבה נעזרו המצרים בטבלה המוכנה שלעיל לצורך ביצוע כפל בשברים, אלא נציג רק את הרעיון הכללי של פעולת הכפל, כהרחבה לרעיון שהוצג במאמר הקודם.

נמצא את תוצאת המכפלה: $24\times34\frac{1}{8}$.

	1	24	
→	**2**	**48**	←
	4	96	
	8	192	
	16	384	
→	**32**	**768**	←
	$\frac{1}{2}$	12	
	$\frac{1}{4}$	6	
→	$\frac{1}{8}$	**3**	←
סה"כ פעמים	$34\frac{1}{8}$	819	המכפלה

יש לשים לב לכך שכאשר מגיעים ל- 32, "חוזרים בחזרה" ל- 1, ומתחילים לחלק ב- 2 עד שמגיעים לשמינית.

בדקו את עצמכם:

3. מיהם המספרים שיש לחבר כדי למצוא את המכפלה $14\frac{1}{2}\cdot16\frac{1}{4}$?

	1	$16+\frac{1}{4}$	
	2	$32+\frac{1}{2}$	
	4	65	
	8	130	
	$\frac{1}{2}$	$8+\frac{1}{8}$	
סה"כ פעמים	$14+\frac{1}{2}$		המכפלה

(פתרון ניתן למצוא בסוף המאמר.)

ד. חילוק עם שברים

בדומה לדרך שבה ביצעו כפל עם שברים, ביצעו המצרים גם חילוק עם שברים. את הדרך שבה ביצעו זאת נדגים בעזרת הפתרון של 207:12

→	**1**	**12**	←
	2	24	
	4	48	
	8	96	
→	**16**	**192**	←
סה"כ פעמים		207	המכפלה

לא ניתן להמשיך מעבר ל- 192, שכן הכפלתו פי 2 תיתן תוצאה גדולה מ- 207.

באופן דומה, לא ניתן להוסיף ל- 192 את 96, או 48, או 24. ניתן להוסיף רק את 12. נקבל: 192+12=204. אולם, עדיין חסרה לנו כמות של 207-204=3 כדי להגיע למכפלה המבוקשת. כמות זו קטנה מפעם אחת 12, ולכן עתה עלינו להתחיל לחלק ב- 2:

→	**1**	**12**	←
	2	24	
	4	48	
	8	96	
→	**16**	**192**	←
	$\frac{1}{2}$	6	
→	$\frac{1}{4}$	**3**	←
סה"כ פעמים	$17+\frac{1}{4}$	207	המכפלה

כלומר: $207:12=17\frac{1}{4}$.

שימו לב לכך שרשמנו $17+\frac{1}{4}$, כפי שעשו המצרים, ולא $17\frac{1}{4}$.

בדקו את עצמכם:

4. מיהם המספרים שיש לחבר כדי למצוא את המנה של 399:14?

	1	14	
	2	28	
	4	56	
	8	112	
	16	224	
	$\frac{1}{2}$	7	
סה"כ פעמים		399	תוצאת המכפלה

(פתרון ניתן למצוא בסוף המאמר.)

2. חוקיות בחיבור שברי יחידה מתוך הפפירוס EMLR

ה - Egyptian Mathematical Leather Roll (EMLR) היא יריעת עור מגולגלת בגודל

43 × 25 ס"מ שנמצאה בת'אבס. יריעה זו נרכשה אף היא על-ידי הנרי רינד, ונשלחה למוזיאון הבריטי בשנת 1864 יחד עם פפירוס רינד. עברו יותר מ- 60 שנה, ורק בשנת 1927 הצליחו עובדי המוזיאון למצוא דרך לרכך את יריעת העור ולפתוח אותה. היריעה מתוארכת ל- 1650 לפנה"ס, והיא כתובה בכתב היראטי. תוכנה של היריעה הוא טבלאות עזר לחישוב סכום של 26 שברי יחידה השווים אף הם לשבר יחידה. הסכומים מופיעים בשתי עמודות, ואחריהן שתי עמודות המכילות בדיוק את אותם הסכומים (Imhausen, 2003).

להלן כמה מהסכומים שרשמו המצרים. הסכומים אינם מופיעים באותו הסדר שבו הופיעו בפפירוס, אלא מאורגנים כאן לפי חוקיות מסוימת, שאותה מצאו המצרים.

כמו כן, מוצגים כאן רק סכומים של שני מחוברים (המצרים הציגו בטבלה גם שלושה, ארבעה וחמישה שברי יחידה, שסכומם גם הוא שבר יחידה).

1	2		3	4
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$
$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}$		$\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{21}+\frac{1}{42}=\frac{1}{14}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=\frac{1}{16}$		
	$\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{20}$	$\frac{1}{45}+\frac{1}{90}=\frac{1}{30}$		
	$\frac{1}{48}+\frac{1}{96}=\frac{1}{32}$	$\frac{1}{96}+\frac{1}{192}=\frac{1}{64}$		

מהי החוקיות שהייתה ידועה למצרים?

נתבונן בעמודה 1. כפי שניתן לראות, הכלל לפיו פעלו המצרים היה: אם מחברים שני שברי יחידה זהים, סכומם הוא שבר יחידה בעל מכנה שערכו מחצית מהמכנה של המחוברים. מובן שכלל זה "עובד" רק כאשר מדובר במכנה שהוא מספר זוגי, אחרת מחציתו הוא מספר לא שלם.

במילים אחרות, הכלל הוא: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}$.

קל להוכיח כלל זה: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n}{2}}$

נתבונן בעמודה 2. הכלל לפיו פעלו המצרים היה: אם מחברים שני שברי יחידה שהמכנה של אחד מהם כפול מהמכנה של השני, הסכום הוא שבר יחידה שמכנהו שווה לשליש מערכו של המכנה הגדול מבין השניים.

כלומר, הכלל הוא: $\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{\frac{2n}{3}}$. נתבונן במכנה של שבר היחידה שהוא סכום שני השברים: $\frac{2n}{3}$. מובן שנקבל מספר שלם רק אם n מתחלק ב- 3 (שכן 2 אינו מתחלק ב- 3). לכן, למעשה השבר הגדול מבין שני המחוברים (זה שהמכנה שלו n) צריך להיות בעל מכנה המתחלק ב- 3. ואכן, כפי שניתן

לראות בכל הדוגמאות שרשמו המצרים, n הוא מספר המתחלק ב- 3 (9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 45, 48, 96).

נוכיח את הכלל:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}=\frac{2+1}{2n}=\frac{3}{2n}=\frac{1}{\frac{2n}{3}}$$

באופן דומה, בעמודה 3 הכלל הוא: $\frac{1}{n}+\frac{1}{3n}=\frac{1}{\frac{3n}{4}}$ (n חייב להתחלק ב- 4),

והכלל בעמודה 4 הוא: $\frac{1}{n}+\frac{1}{4n}=\frac{1}{\frac{4n}{5}}$

(n חייב להתחלק ב- 5).

אם נתבונן בארבעת הכללים, נוכל להכליל את החוקיות שהייתה ידועה למצרים:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{kn}=\frac{k+1}{kn}=\frac{1}{\frac{kn}{k+1}}$$

האם הכלל תמיד "עובד"? כלומר – האם תמיד מחיבור שני שברי יחידה נקבל שבר יחידה?

מה צריך להיות הקשר בין שני המחוברים?

כדי שאכן הסכום יהיה שבר יחידה, $k+1$ צריך לחלק את kn, על מנת שהמכנה של סכום שני השברים יהיה מספר שלם.

מאחר ו- $k+1$ אינו יכול לחלק את k (שכן $k+1$ גדול מ- k), הרי שכדי שהמכנה של הסכום יהיה מספר שלם, $k+1$ חייב לחלק את n.

דוגמאות:

1. האם יתקבל שבר יחידה כתוצאה מחיבור שני שברי היחידה הבאים: $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}$?

נסמן: $n=6$, ולכן $4n=24$. לפי הכלל, המכנה של הסכום יתקבל מתוך: $\frac{1}{n}+\frac{1}{4n}=\frac{1}{\frac{4n}{5}}$.

כלומר, n צריך להתחלק ב- 5. היות ו- 6 אינו מתחלק ב- 5 (ללא שארית), הרי שסכום שברי היחידה הנתונים אינו שבר יחידה.

2. האם יתקבל שבר יחידה כתוצאה מחיבור שני שברי היחידה הבאים: $\frac{1}{18}+\frac{1}{144}$?

נסמן: $n=18$, ולכן $8n=144$. לפי הכלל, המכנה של הסכום יתקבל מתוך:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{8n}=\frac{1}{\frac{8n}{9}}.$$

כלומר, n צריך להתחלק ב- 9. היות ו- 18 מתחלק ב- 9, הרי שסכום שברי היחידה הנתונים יהיה, בהתאם לכלל, שבר יחידה:

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{144}=\frac{1}{18}+\frac{1}{8\times18}=\frac{1}{\frac{8\times18}{9}}=\frac{1}{16}$$

3. יש למצוא מחוברים מתאימים:

$$\frac{1}{70}+\frac{1}{\ }=\frac{1}{\ }$$

בהתאם לחוקיות, נקבל את המבנה הבא:

$$\frac{1}{70}+\frac{1}{k\times70}=\frac{1}{\frac{k\times70}{k+1}}$$

על מנת שהמכנה של הסכום יהיה מספר שלם, $k+1$ צריך לחלק את 70.

נבחן את הגורמים של 70: 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70. לכן, $k+1$ יכול להיות כל אחד מהמספרים הללו, ו- k עצמו יכול להיות אחד מהמספרים: 1, 4, 6, 9, 13, 34, 69 (ורק מספרים אלה).

לדוגמה:

$$\frac{1}{70}+\frac{1}{630}=\frac{1}{70}+\frac{1}{9\times 70}=\frac{1}{\frac{9\times 70}{10}}=\frac{1}{9\times 7}=\frac{1}{63}$$

$$\frac{1}{70}+\frac{1}{910}=\frac{1}{70}+\frac{1}{13\times 70}=\frac{1}{\frac{13\times 70}{14}}=\frac{1}{13\times 5}=\frac{1}{65}$$

4. יש למצוא מחוברים מתאימים:

$$\frac{1}{125}+\frac{1}{-}=\frac{1}{-}$$

בהתאם לחוקיות, נקבל את המבנה הבא:

$$\frac{1}{125}+\frac{1}{k\times 125}=\frac{1}{\frac{k\times 125}{k+1}}$$

על מנת שהמכנה של הסכום יהיה מספר שלם, $k+1$ צריך לחלק את 125.

נבחן את הגורמים של 125: 1, 5, 25, 125. לכן, $k+1$ יכול להיות כל אחד מהמספרים הללו, ו- k עצמו יכול להיות אחד מהמספרים: 4, 24, 124 (ורק מספרים אלה. שימו לב לכך ש- k אינו יכול להיות 1, שכן כפי שראינו כאשר מדובר בחיבור של שני שברי יחידה זהים, המכנה חייב להיות מספר זוגי אם רוצים לקבל שבר יחידה כסכום שני השברים).

לדוגמה:

$$\frac{1}{125}+\frac{1}{500}=\frac{1}{125}+\frac{1}{4\times 125}=\frac{1}{\frac{4\times 125}{5}}=\frac{1}{4\times 25}=\frac{1}{100}$$

$$\frac{1}{125}+\frac{1}{3000}=\frac{1}{125}+\frac{1}{24\times 125}=\frac{1}{\frac{24\times 125}{25}}=\frac{1}{24\times 5}=\frac{1}{120}$$

בדקו את עצמכם:

5. מבין שברי היחידה הבאים, איזה מהם **אינו מתאים** לשמש כמחובר בתרגיל $\frac{1}{84}+\frac{1}{-}=\frac{1}{-}$, אם רוצים שהסכום יהיה שבר יחידה?

א. $\frac{1}{588}$; ב. $\frac{1}{168}$; ג. $\frac{1}{420}$; ד. $\frac{1}{1092}$

(פתרון ניתן למצוא בסוף המאמר.)

כאן נסיים את ההיכרות הקצרה שלנו עם האריתמטיקה המצרית.

במאמר הבא נעסוק בידע של המצרים הקדמונים בתחום האלגברה.

רשימת מקורות

Bruins, E. M. (1981). Egyptian Arithmetic. *Janus 68*(1-3), 33-52.

Bruins, E. M. (1981). Reducible and trivial decompositions concerning Egyptian Arithmetic. *Janus 68*(4), 281-297.

Burton, D. M. (2006). *The history of Mathematics: An Introduction*, 6th Edition. McGraw-Hill.

Gillings, R. J. (1981). The Egyptian Mathematical Leather Role - line 8: How did the scribe do it? *Historia Mathematica, 8*(4), 456-457.

Gillings, R. J. (1982). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. Cambridge, MA.

Gong, K. (1992). *Egyptian Fractions.* Berkeley, UC.

http://kevingong.com/Math/EgyptianFractions.pdf

Imhausen, A. (2003). Egyptian mathematical texts and their contexts. *Science in Context*, *16*, 367-389.

Rising, G. R. (1974). The Egyptian use of unit fractions for equitable distribution. *Historia Mathematica, 1*(1), 93-94.

מקורות אינטרנטיים

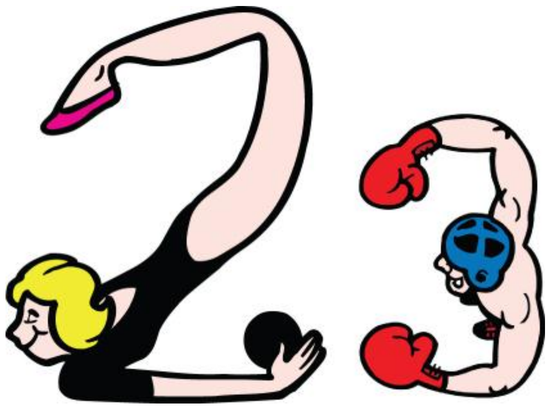
http://www.eyelid.co.uk/maths4.htm

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Egyptian_mathematics.html

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri.html

http://www.scribd.com/doc/42733544/Ancient-Egyptian-Mathematics

ד"ר עטרה שריקי
מרצה לחינוך מתמטי במכללת אורנים. תחום עניינה העיקרי הוא התפתחות מקצועית של מורים ושל פרחי הוראה כתוצאה מהתנסותם בביצוע פעילויות חקר מתמטיות ומחקר פעולה בכיתותיהם.



פתרונות

1. היות וסימן הפה הפעור הוא מעל שניים מהסימנים בלבד, הרי שההתלבטות יכולה להיות בין המספר $60+\frac{1}{2000}$ לבין $\frac{1}{2060}$.

אולם, היות ובדרך כלל רשמו המצרים את המספרים מהגדול לקטן, מימין לשמאל, הרי שאילו היה מדובר במספר $60+\frac{1}{2000}$, ניתן לשער שהמצרים היו רושמים את $\frac{1}{2000}$ משמאל ל- 60.

2. נתבונן בזוג השברים: $\frac{1}{20}+\frac{1}{380}$. בין המכנים שלהם מתקיים הקשר: $380=19\cdot 20$, ולכן, בהתאם לנוסחה $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$ מתקיים:

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{380}=\frac{1}{19+1}+\frac{1}{19(19+1)}=\frac{1}{19}.$$

סה"כ קיבלנו:

$$\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{380}=\frac{1}{19}+\frac{1}{19}=\frac{2}{19}$$

שהוא שבר היחידה $\frac{1}{19}$ המוכפל פי 2.

מובן שניתן לפתור את הבעיה גם באופן הבא (שימו לב שלא הייתה זו דרכם של המצרים, שכן בפתרון זה נעזרנו גם בשברים שאינם שברי יחידה):

$$\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\frac{1}{380}=\frac{20}{380}+\frac{19}{380}+\frac{1}{380}=\frac{40}{380}=\frac{2}{19}$$

3. נשלים את הטבלה:

	$16+\frac{1}{4}$	1	
←	$32+\frac{1}{2}$	**2**	→
←	**65**	**4**	→
←	**130**	**8**	→
←	$8+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	→
המכפלה	$235+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$	$14+\frac{1}{2}$	סה"כ פעמים

היות ו- $14+\frac{1}{2}=8+4+2+\frac{1}{2}$, הרי שכדי לקבל את המכפלה יש לחבר את המספרים:

$$130+65+32+\frac{1}{2}+8+\frac{1}{8}=235+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}.$$

שימו לב לכך שהמצרים לא רשמו $235\frac{5}{8}$, היות והשתמשו רק בשברי יחידה.

4. נשלים את הטבלה:

	14	1	
	28	2	
←	**56**	**4**	→
←	**112**	**8**	→
←	**224**	**16**	→
←	**7**	$\frac{1}{2}$	→
תוצאת המכפלה	399	$16+8+4+\frac{1}{2}$	סה"כ פעמים

הפעם המכפלה ידועה - 399. היות ו- $399=244+112+56+7$, הרי שכדי לקבל את המנה יש לחבר את המספרים:

$$16+8+4+\frac{1}{2}.$$

5. בהתאם לחוקיות המצרים, מתקיים המבנה הבא: $\frac{1}{84}+\frac{1}{k\times 84}=\frac{1}{\frac{k\times 84}{k+1}}$

על מנת שהמכנה של הסכום יהיה מספר שלם, $k+1$ צריך לחלק את 84.

נבחן את הגורמים של 84: 1, 2, 3, 6, 7, 12, 14, 28, 42, 84. לכן, $k+1$ יכול להיות כל אחד מהמספרים הללו, ו- k עצמו יכול להיות אחד מהמספרים: 1, 2, 5, 6, 11, 13, 27, 41, 83 (ורק מספרים אלה).

נחלק ב- 84 כל אחד מהמכנים המופיעים באפשרויות לתשובה, ונבדוק אם המנה היא אחד מהערכים של k:

$$168:84=2\ ;\ 420:84=5\ ;$$
$$588:84=7\ ;\ 1092:84=13$$

מכאן ניתן לראות שכאשר המכנה של המחובר המבוקש הוא 588 סכום שני שברי היחידה לא ייתן שבר יחידה.