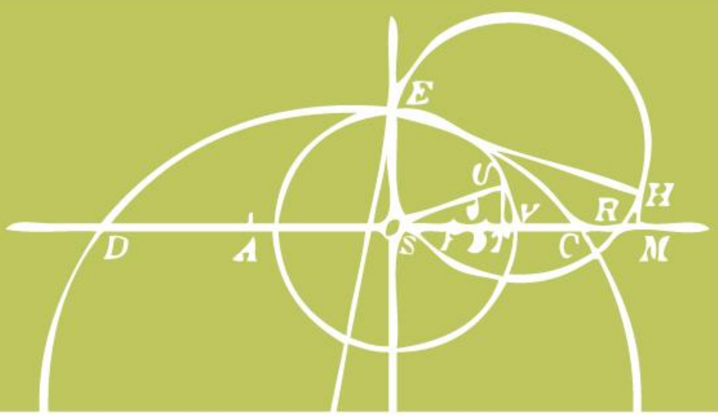


גאומטריה מצרית

עטרה שריקי

מאמר זה מהווה המשך למאמר שעסק בפעולות במספרים טבעיים במצרים העתיקה, שהתפרסם בגיליון 22, ולמאמר שעסק בפעולות בשברים פשוטים במצרים העתיקה, שהתפרסם בגיליון 23. במאמר זה נכיר מקצת מהרעיונות בתחום הגאומטריה בהם עסקו במצרים העתיקה, ובפרט, חישוב שטח מרובע ושטח עיגול.

הגאומטריה התפתחה במצרים בשל הצורך למדוד מחדש את שטחן של חלקות האדמה אשר הוצפו מדי שנה על-ידי הנילוס בעת הגאות. מדידת השטחים נדרשה כדי לקבוע את גובה המס שהיה על בעל החלקה לשלם. כפי שראינו במאמר על הגאומטריה הבבלית, המילה היוונית "גאומטריה" מורכבת משתי מילים – "אדמה" ו"מדידה".

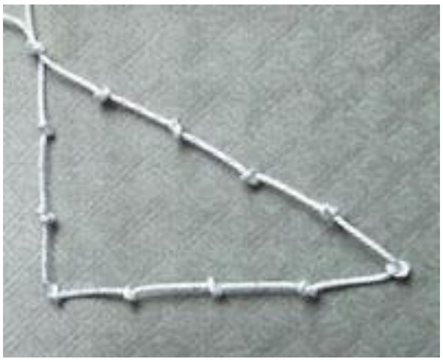
בספרו, מציין Burton (2006) שההיסטוריון היווני הרודוטוס, המכונה גם בשם "אבי ההיסטוריה", ביקר באזור הנילוס בסביבות השנים- 455-460 לפנה"ס, ובדק כיצד התבצעו התצפיות הגאומטריות השיטתיות הראשונות. הרודוטוס רשם:

"...הם גם אומרים שהמלך הזה [סוסוסאריס] חילק את האדמות בין כל המצרים כך שכל אחד יקבל חלקה מרובעת בגודל שווה, ולקבל מכל אחד את התשואה שלו, על-ידי כך שהטיל עליהם מס שנגבה בכל שנה. אבל כל מי שהנהר לקח ממנו משהו, היה צריך לגשת אליו ולהודיע מה קרה. הוא שלח אליו מפקחים שמדדו בכמה קטן השטח, על מנת שהבעלים ישלם מס רק על מה שנשאר, ביחס למס הכולל שהוטל. בדרך זו, כך נראה לי, התחילה הגאומטריה" (עמ' 56-57).

מה העסיק את המצרים לפני כ- 4,000 שנה? הפפירוסים המתמטיים מכילים דוגמאות רבות הנוגעות לחישובים גאומטריים. יחד עם זאת, בניגוד לגאומטריה שהתפתחה ביוון, המצרים לא הציגו משפטים והוכחות, או חוקים כלליים לחישוב שטחים של צורות או נפחים של גופים. נראה שהמצרים הכירו את החוקים לחישובים אלה מתוך התנסות, אשר התפתחה במשך שנים של ניסוי וטעייה ושל תצפיות. חלק מהכללים שבהם השתמשו נתנו תוצאות מקורבות, אך יחד

עם זאת, קירובים אלה היו בהחלט מספקים לצורך חיי היום-יום שלהם.

יש לציין, שבדומה לבבלים, גם המצרים הכירו את משפט פיתגורס. המצרים השתמשו בחבל עם קשרים כדי לבנות משולשים ישרי-זווית. בעזרת הקשרים חילקו המצרים את החבל ל- 12 חלקים שווים (ראו איור 1), שלמעשה מאפשרים לבנות משולש ישר-זווית בהתאם לשלשה הפיתגורית 3,4,5 ($3^2+4^2=5^2$; $3+4+5=12$). שימו לב לכך שאין חשיבות לגודל של יחידת המרווח בין קשר לקשר, שכן ממילא משפט פיתגורס אינו מתייחס למידתה של יחידת האורך.



איור 1 - משולש ישר-זווית מחבל עם קשרים

חישוב שטחי מרובעים

בנוסף לפפירוסים, ניתן היה ללמוד על המתמטיקה המצרית גם מתוך ציורי קיר והקדשות למלכים ולאלים. במקדשו של הורוס באדפו נמצאה הקדשה שתוארכה לכ- 100 שנים לפנה"ס. בהקדשה זו יש התייחסות לשטחיהן של חלקות שדה מרובעות רבות, שניתנו כמתנות למקדש. עבור כל חלקה כזו, השטח נקבע על-ידי חישוב הממוצע של אורכי שתי צלעות נגדיות והכפלתן.

המקדש של הורוס באדפו

חישוב השטח, כפי שניתן ללמוד מתוך דבריו של ההיסטוריון היווני הרודוטוס, היה נחוץ לצורך גביית מיסים על חלקות השדה.

בשימוש בסימון של ימינו, המצרים חישבו את שטחה של חלקה מרובעת באופן הבא:

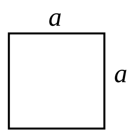
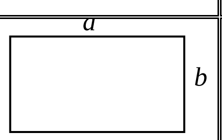
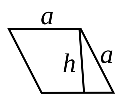
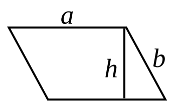
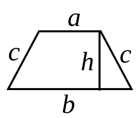
נתון שדה בעל חלקה מרובעת. נסמן את אורכי צלעותיה של החלקה ב – d, c, b, a (לפי הסדר). חישוב גודלה של החלקה התבצע לפי הנוסחה הבאה:

$$S=\frac{(a+c)}{2}\cdot\frac{(b+d)}{2}=\frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4}.$$

כלומר – רבע המכפלה של סכום מידות האורך של הצלעות הנגדיות של המרובע.

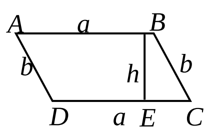
האם אכן נוסחה זו נכונה לכל מרובע?

נתבונן בטבלה הבאה:

הצורה		השטח בהתאם לחישוב המקובל	השטח בהתאם לחישוב המצרי
ריבוע		a^2	$\frac{(a+a)\cdot(a+a)}{4}=\frac{2a\cdot 2a}{4}=a^2$
מלבן		$a\cdot b$	$\frac{(a+a)\cdot(b+b)}{4}=\frac{2a\cdot 2b}{4}=a\cdot b$
מעוין		$a\cdot h$	$\frac{(a+a)\cdot(a+a)}{4}=\frac{2a\cdot 2a}{4}=a^2$
מקבילית		$a\cdot h$	$\frac{(a+a)\cdot(b+b)}{4}=\frac{2a\cdot 2b}{4}=a\cdot b$
טרפז שו"ש		$\frac{(a+b)\cdot h}{2}$	$\frac{(a+b)\cdot(c+c)}{4}=\frac{(a+b)\cdot 2c}{4}=\frac{(a+b)\cdot c}{2}$

מתוך הטבלה ניתן לראות שבמקרה של מלבן (וריבוע כמקרה פרטי של מלבן), חישוב השטח בדרך המוכרת כיום, נותן תוצאה זהה לזו של חישוב השטח בדרך שהייתה מקובלת אצל המצרים. בכל המקרים האחרים מתקבלים שטחים שונים. למעשה, ככל שצורתה של החלקה קרובה יותר לצורתו של מלבן, כך השטח המחושב על-ידי המצרים יהיה קרוב יותר לשטח האמיתי. השאלה היא, האם השטח המחושב לפי הנוסחה של המצרים גדול או קטן מהשטח האמיתי. במילים אחרות - האם גובי המיסים של המלך גבו יותר כסף מהדרוש או פחות כסף מהדרוש?

נתבונן, למשל, במקבילית:



חישוב השטח צריך להתבצע לפי הנוסחה $a\cdot h$.

כפי שראינו, לפי הנוסחה המצרית השטח מחושב לפי $a\cdot b$. לכן, למעשה עלינו להשוות בין שני הגדלים הללו ($a\cdot h$ לעומת $a\cdot b$), או בין b לבין h.

נתבונן במשולש הישר-זווית BEC. במשולש זה h הוא אחד הניצבים ו- b הוא היתר. היות שבמשולש ישר-זווית היתר הוא הצלע הארוכה ביותר, הרי שמתקיים $b < h$. לכן, השטח

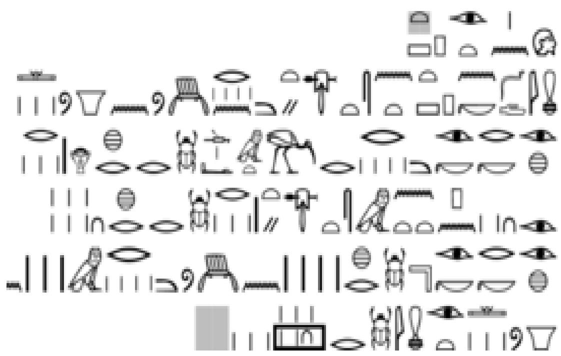
המתקבל באמצעות הנוסחה המצרית גדול מהשטח האמיתי של המקבילית (ובכלל זה גם מעוין, כמקרה פרטי של מקבילית). באמצעות שיקולים דומים ניתן לראות שכך קורה גם במקרה של הטרפז השווה-השוקיים.

קיימת הוכחה כללית לכך שעבור כל מרובע שאיננו מלבן, השטח המתקבל בעזרת הנוסחה המצרית גדול מהשטח האמיתי. ההוכחה מבוססת על חלוקת המרובע לארבעה משולשים בעזרת אלכסוניו, וחישוב שטחי המשולשים בכלים טריגונומטריים. במסגרת זו לא נציג את ההוכחה הכללית.

לאור מה שראינו, המשמעות היא שאם גובי המיסים המצריים השתמשו בנוסחה זו לחישוב שטחי החלקות, הרי שאדם שהחלקה שלו לא הייתה מלבנית שילם מס גבוה יותר מזה שאמור היה לשלם בפועל.

יש לציין שמתוך פפירוס מוסקבה עולה שהמצרים הכירו את הנוסחה לחישוב שטח משולש. בדומה לנוסחה שבה משתמשים כיום, המצרים חישבו את השטח באמצעות מחצית המכפלה של מידת אורך אחת הצלעות במידת האורך של הגובה לאותה צלע. ייתכן ואילו היו מפעילים שיקולים אלה בחישוב שטחן של חלקות מרובעות (באמצעות חלוקתן למשולשים), היו מצליחים להגיע לקירובים טובים יותר.

בפפירוס מוסקבה מופיעות 26 בעיות גאומטריות. מרביתן עוסקות בחישובים של שטחי אדמה ונפחיהם של כלים המשמשים לצורך אכסון גרעינים. לדוגמה, **בבעיה מספר 6** (ראו איור 2) מופיעה השאלה הבאה: שטחו של מלבן הוא 12 יחידות שטח. מידת האורך של צלע אחת היא שלושה רבעים ממידת האורך של הצלע האחרת. מהם אורכי צלעות המלבן? (פתרון ניתן למצוא בסוף המאמר.)



איור 2 - בעיה 6 מתוך פפירוס מוסקבה בכתב הירוגליפי

שתי בעיות **בפפירוס ברלין**, המכונה בשם "הפפירוס הרפואי" בשל העובדה שהוא מכיל הנחיות לריפוי בעיות בריאות שונות (ואפילו הנחיות לזיהוי מינו של עובר), עוסקות בבעיות שטחים שפתרונן מצריך ידע בפתרון מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים. אחת המשוואות ממעלה שנייה, ואחרת ממעלה ראשונה. פפירוס זה נמצא במצב לא טוב, ולכן שחזורו נתון למספר פרשנויות. להלן אחת הבעיות: שטחו של ריבוע הוא 100 [יחידות שטח], והוא שווה לשטח של שני ריבועים קטנים יותר. מידת האורך של צלע ריבוע אחד היא שלושה רבעים ממידת האורך של צלע הריבוע השני. מהו אורך הצלעות של שני הריבועים הקטנים? (פתרון ניתן למצוא בסוף המאמר.)

חישוב שטח עיגול

בעיות 41-60 בפפירוס רינד, עוסקות בחישוב כמויות של חיטה המאוכסנת באסמים שצורתם תיבה מלבנית או גלילים.

כדי לחשב את נפחו של גליל היה על המצרים לדעת את שטחו של העיגול, שהוא בסיס הגליל. בעיה מס' 50 בפפירוס רינד, עוסקת בחישוב שטח עיגול. חוקרים רבים רואים בדרך שבה פתרו המצרים את הבעיה של מציאת שטח עיגול את אחד מההישגים המרשימים שלהם.

הבעיה ופתרונה מנוסחים באופן הבא (במונחים המקובלים כיום):

הבעיה: נתון שדה עגול שמידת האורך של קוטרו היא 9 [יחידות אורך]. מהו שטח השדה?

הפתרון המצרי התבצע לפי ההנחיות הבאות:

1. יש להוריד $\frac{1}{9}$ ממידת האורך של הקוטר.
   כלומר, במקרה הנתון, להוריד מ- 9 תשיעית ממנו. נשארו 8 יחידות אורך.
2. יש לכפול את מה שהתקבל (8) בעצמו. מתקבל 64.

גודל השדה הוא 64 יחידות שטח.

בטרם ננסה להבין את ההיגיון העומד מאחורי הפתרון המצרי, נבדוק עד כמה המצרים היו קרובים לחישוב השטח האמיתי של עיגול שקוטרו 9 יחידות אורך.

כידוע, את שטחו של עיגול ניתן למצוא בעזרת הנוסחה $\pi \cdot r^2$. במקרה הנתון אורך הקוטר הוא 9 יחידות, ולכן אורך הרדיוס הוא 4.5 יחידות.

כלומר, חישוב שטח העיגול אמור לתת:

$\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4.5^2 = 63.6172511625...$, שהוא ערך די קרוב ל- 64, שאותו הציעו המצרים.

למעשה, אם אכן השטח הוא 64, כפי שטענו המצרים, הרי שלפי החישוב המצרי נקבל שהערך של π שבו השתמשו (מבלי, כמובן, להכיר את π) הוא:

$$\pi \cdot r^2 = 64 \Rightarrow \pi \cdot 4.5^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\pi \cdot 20.25 = 64 \Rightarrow \pi = \frac{64}{20.25} = 3.1604938271....$$

שהוא קירוב די טוב לערכו של π.

בשיעור על הגאומטריה הבבלית ראינו שהבבלים השתמשו ב- 3 כערך מקורב ל- π, וכאשר הזדקקו לקירוב טוב יותר השתמשו בערך 3.125.

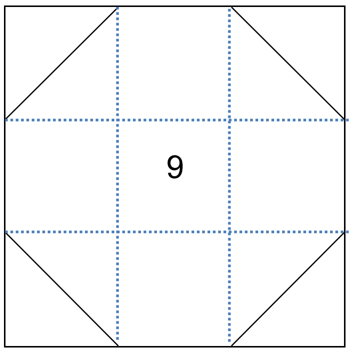
אם נתבונן ב- 5 הספרות הראשונות של π אחרי הנקודה העשרונית, בהתאם לידוע לנו כיום (3.14159), נוכל לראות שהקירוב הבבלי לערכו של π טוב יותר מאשר הקירוב המצרי, אולם ההבדל הגדול הוא באופן שבו ניגשו המצרים למציאת שטחו של עיגול. הגישה המצרית מעידה על הבנה עמוקה יותר של המעגל, כפי שנראה מיד.

יש לציין, שדורות רבים של מתמטיקאים עסקו בנושא הקירוב לערכו של π, ולכן כל "קפיצת דרך" בעניין זה נחשבת להתקדמות מתמטית.

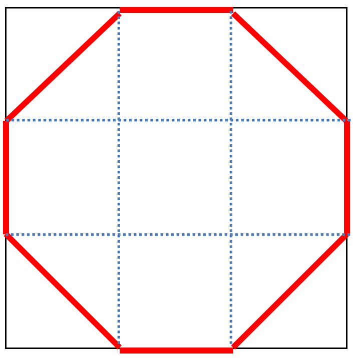
נחזור למצרים. כיצד הגיעו המצרים לפתרון שאותו הצגנו עבור בעיה 50?

רמז לדרך שבה הגיעו המצרים לפתרון הבעיה ניתן למצוא בסרטוט של אחמס לפתרון בעיה 48.

בסרטוט זה (ראו איור 3) מופיע ריבוע שבקצותיו ארבעה משולשים ישרי-זווית חופפים. במרכז הריבוע מופיע המספר 9 (בכתיב מצרי, כמובן).



איור 3

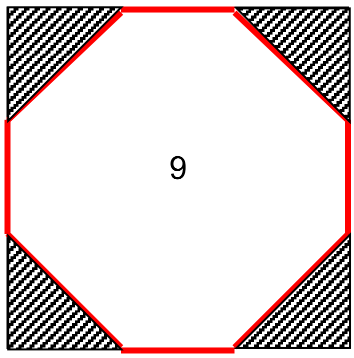


איור 4

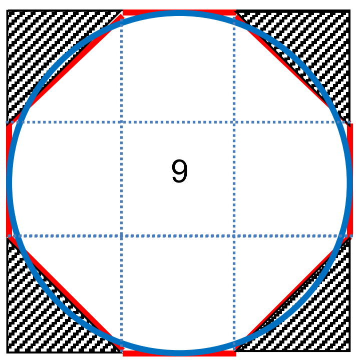
נראה שאחמס יצר מתומן מריבוע שצלעו 9 יחידות אורך על-ידי כך שחילק כל צלע לשלושה חלקים שווים והוריד את ארבעת המשולשים

הישרי-זווית והשווי-שוקיים הפינתיים (ראו מתומן אדום באיור 4).

אם מורידים מ"פינות" הריבוע את ארבעת המשולשים הישרי-זווית, מה שנותר הוא השטח הלבן באיור 5. כנראה שהמצרים הסיקו ששטח המתומן קרוב לשטח העיגול החסום בריבוע (ראו איור 6), היות וחלקים מהעיגול נמצאים "בתוך" המתומן, וחלקים ממנו נמצאים "מחוץ" למתומן. שימו לב לכך שאורך הקוטר של עיגול זה הוא 9 יחידות אורך, כאמור בבעיה המקורית.



איור 5



איור 6

כפי שניתן לראות מאיור 6, שטח המתומן הלבן שווה לשטח הריבוע המקורי (9^2) פחות השטח של ארבעת המשולשים הפינתיים

$$.(4\times\frac{3\times3}{2}=18)$$

כלומר, שטח המתומן הלבן הוא:

$$.9^2-4\times\frac{3\times3}{2}=81-18=63$$

אבל, כאמור, השטח אותו מצאו המצרים עבור העיגול היה 64 יחידות שטח ולא 63 יחידות שטח (ואכן 64 יחידות שטח קרוב יותר מאשר 63 יחידות שטח לחישוב האמיתי המתקבל מתוך $\pi\cdot r^2=\pi\cdot4.5^2=63.6172511625...$), מה שמצביע על כך שהסרטוט שאותו הציג אחמס בפפירוס אינו מביא לידי ביטוי באופן מלא את השיקולים שעמדו מאחורי החישוב המצרי. כלומר, המצרים ידעו ששטח העיגול גדול יותר משטחו של המתומן המתקבל בדרך זו.

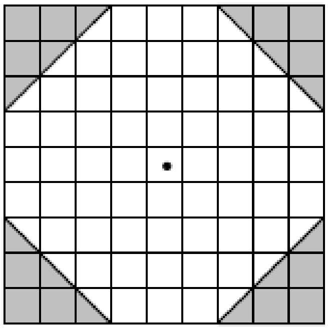
כיצד, בכל זאת, הגיעו להנחיות המופיעות למעלה?

נעדן את חלוקת הריבוע שאורך צלעו 9 יחידות אורך, על-ידי חלוקה של כל צלע לתשעה חלקים שווים, במקום שלושה, וקבלת 81 ריבועים קטנים ששטח כל אחד מהם הוא 1 יחידת שטח (איור 7). בהתאם לחישוב המצרי, שטח העיגול הוא בקירוב שטח המצולע בעל 8 צלעות, המתקבל לאחר שמורידים את ארבעת המשולשים השווי-שוקיים הפינתיים של הריבוע. בכל משולש פינתי יש 4.5 ריבועים קטנים (צבועים באפור). סה"כ ב-4 המשולשים הפינתיים יש $4.5\times4=18$ ריבועים קטנים.

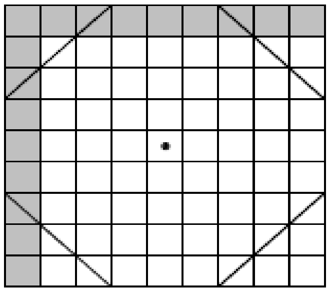
כעת נקטו המצרים (כנראה) בצעד נוסף: נסדר את 18 הריבועים הקטנים בדרך שונה מסידורם בארבעת המשולשים הפינתיים: 9 ריבועים בשורה העליונה, ו- 9 ריבועים בעמודה השמאלית, כפי שניתן לראות באיור 8. יש לשים לב לכך שסידור זה נותן לנו עתה רק 17 ריבועים קטנים הצבועים באפור, ולא 18, כי בפינה השמאלית הנחנו שני ריבועים זה על גבי זה (פעם אחת כאשר סידרנו את הריבועים בשורה העליונה, ופעם אחת כאשר סידרנו אותם בעמודה השמאלית), והם נספרים כריבוע אחד.

הריבועים הקטנים שנשארו, אלה הצבועים בלבן, יוצרים ביחד ריבוע גדול יותר שאורך צלעו היא 8 יחידות אורך, ולכן שטחו 64 יחידות שטח. השטח

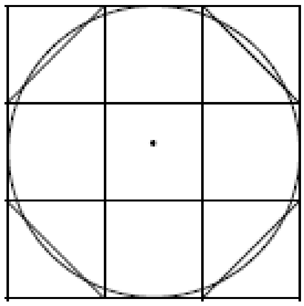
הכולל של הריבועים הקטנים הלבנים הוא הקירוב המצרי לשטח העיגול.



איור 7



איור 8



איור 9

כפי שניתן לראות מהתהליך שתואר, למעשה הקטנו בתשיעית את מידת האורך של צלע הריבוע (במקום האורך היה 9 יחידות אורך, ועתה נותרנו עם ריבוע שאורך צלעו הוא 8 יחידות אורך).

שימו לב לכך שאין חשיבות למידת האורך האמיתית, שכן אין לנו מידע בנוגע לכמה ס"מ, למשל, שווה כל יחידת אורך. במילים אחרות, אם לדוגמה, 9 יחידות אורך שוות ל- 90 ס"מ, הרי שיחידת אורך אחת שווה ל- 10ס"מ.

לאור זאת, באופן כללי ניתן לתאר את השיטה המצרית לחישוב שטח עיגול באופן הבא:

נתון מעגל שקוטרו d החסום בריבוע שאורך צלעו d (איור 9).

מחלקים את הריבוע ל- 81 ריבועים קטנים שאורך הצלע של כל אחד מהם הוא $\frac{d}{9}$, ומסדרים את הריבועים הקטנים כמו באיור 8. שטח העיגול הוא בקירוב השטח הלבן הפנימי.

אורך כל אחת מצלעותיו של הריבוע הלבן ה"פנימי", המורכב מהריבועים הלבנים הקטנים, הוא $\frac{8}{9}d$.

שטחו של ריבוע זה הוא $(\frac{8}{9}d)^2=\frac{64}{81}d^2$. וזה השטח המקורב של העיגול.

(ואכן במקרה שלנו נתון ש- $d = 9$, ולכן נקבל שטח של 64).

במקרה שבו הקוטר הוא, למשל, 36 ס"מ, נקבל את שטח העיגול באופן הבא:

$$d=36\ ;\ \frac{8}{9}d=32\ ;\ (\frac{8}{9}d)^2=32^2=1024$$

הקוראים מוזמנים לבדוק עד כמה חישוב זה קרוב לשטח האמיתי של העיגול.

בעזרת חישוב זה הצליחו המצרים למצוא גם את שטח הפנים של חצי כדור (אליו התייחסו כאל "סל לאכסון ביצים"). במסגרת זו לא נציג את החישובים.

המעוניינים בכך יוכלו למצוא את הפתרון של בעיה מספר 10 בפפירוס מוסקבה בקישור שלהלן:

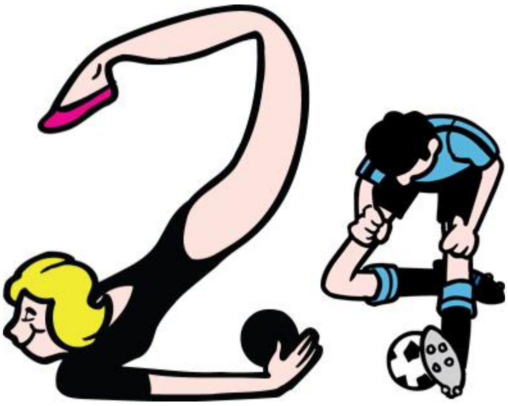
http://en.wikipedia.org/wiki/Moscow_Mathematical_Papyrus

רשימת מקורות

Burton, D. M. (2006). *The history of Mathematics: An Introduction*, 6th Edition. McGraw-Hill.

Gillings, R., J. (1982). *Mathematics in the time of the Pharaohs* .Cambridge, MA .

ד"ר עטרה שריקי
מרצה לחינוך מתמטי במכללת אורנים. תחום עניינה העיקרי הוא התפתחות מקצועית של מורים ושל פרחי הוראה כתוצאה מהתנסותם בביצוע פעילויות חקר מתמטיות ומחקר פעולה בכיתותיהם.



פתרונות

פתרון בעיה מספר 6 מפפירוס מוסקבה

נסמן ב- x את מידת האורך של המלבן. מכאן שרוחב המלבן הוא $\frac{3}{4}x$. לכן, השטח הוא:

$$x\cdot\frac{3}{4}x=12 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2=12\ /:\frac{3}{4} \Rightarrow$$
$$x^2=12\cdot\frac{4}{3}=16 \Rightarrow x=4\ ,\ \frac{3}{4}x=\frac{3}{4}\cdot 4=3$$

שימו לב שהפתרון מעיד על כך שהמצרים עסקו בפתרון משוואות ממעלה שנייה.

פתרון הבעיה מתוך פפירוס ברלין

שטח הריבוע הנתון הוא 100 יחידות שטח, ולכן אורך צלעו הוא 10 יחידות אורך.

נסמן ב- x וב- y את אורך הצלעות של הריבועים הקטנים יותר, כך ש- $y=\frac{3}{4}x$.

שטח הריבוע החדש, הגדול מבין השניים הוא x^2, ושטח הריבוע החדש הקטן יותר הוא: $y^2=\frac{9}{16}x^2$.

היות וסכום שטחי הריבועים החדשים שווה לשטחו של הריבוע המקורי, הרי שנקבל את המשוואה:

$$x^2+y^2=x^2+\frac{9}{16}x^2=100\ .$$

נפתור את המשוואה:

$$x^2+\frac{9}{16}x^2=100\ /\cdot 16 \Rightarrow 16x^2+9x^2=$$
$$1600 \Rightarrow\ 25x^2=1600 \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=8.$$

שימו לב לכך שלקחנו רק את הפתרון החיובי של המשוואה הריבועית, היות ומדובר באורכי קטעים. יחד עם זאת, בכל מקרה, המצרים לא הכירו את המספרים השליליים, והפתרון 8- לא היה עולה בדעתם.

קיבלנו שאורך צלעו של הריבוע החדש, הגדול מבין השניים, הוא 8 יחידות אורך (שטחו 64 יחידות שטח), ואורך צלעו של הריבוע הקטן מביניהם הוא 6 יחידות אורך (שטחו 36 יחידות שטח).