אומרים שאני אינני אני, אז מי אני בכלל?

היכולת של ילדי כיתות ב לזהות ולאפיין גופים ידועים במצגים שונים

יעל צרפתי
ודורית פטקין

תקציר

הצורך בזיהוי ושיום צורות דו-ממדיות וצורות תלת-ממדיות (גופים)[1] מתבקש כבר מגיל צעיר. גם הסטנדרטים להוראת גאומטריה של איגוד מורי המתמטיקה בארה"ב (NCTM, 2000) מצביעים על חשיבות היכולת לזהות ולשיים צורות גאומטריות שונות כבר מגיל הגן.

אחת ממטרות מחקר זה הייתה להתחקות אחר היכולת של תלמידים בכיתה ב לזהות דוגמאות ואי-דוגמאות של שלושה גופים ידועים: גליל, חרוט ופירמידה, תוך התבססות על התכונות של אותם גופים (תכונות קריטיות ותכונות שאינן קריטיות) ולנמק את החלטותיהם. מטרה נוספת הייתה לבדוק האם שינוי במנח של אותם גופים יגרום לילדים לשנות את החלטתם בנוגע לשם הגוף תוך מתן נימוק גם להחלטה זו.

מממצאי מחקר זה עולה, כי ילדים מזהים גופים המוצגים להם במנח אב-טיפוסי (פרוטוטייפ), ומתקשים לזהות נכונה את אותם גופים הנמצאים במנח אחר.

מסקנות המחקר הן, שיש חשיבות רבה להציג בפני לומדים מגוון של אי-דוגמאות של גופים, באותה מידה כמו שמציגים בפניהם דוגמאות של אותם גופים. כמו כן, מומלץ להציג בפני הלומדים את הגופים במנחים שונים, לאו דווקא במנח האב-טיפוסי המקובל, כדי לשפר את יכולתם לזהות את הגופים, ולהבין את העובדה שהגוף לא משתנה אם משנים את המנח שלו.

מילות מפתח: זיהוי גופים, מנח אב-טיפוסי, דוגמאות, אי-דוגמאות, תכונות קריטיות, תכונות אי-קריטיות.

רקע תאורטי

זיהוי ושיום צורות גאומטריות נעשים כבר מגיל צעיר. ילדים נחשפים לצורות גאומטריות הרבה לפני שהם מגיעים ללימוד הפורמלי שלהן בבית הספר. בסטנדרטים לגאומטריה של איגוד מורי המתמטיקה בארה"ב מציינים במפורש כי יש

[1] בתכנית הלימודים ובספרי הלימוד מכנים את הצורות התלת-ממדיות בשם גופים.

להתחיל בתכניות ההוראה בנושא זה כבר מגיל הגן, כדי להביא את הילדים לכך שיוכלו "לנתח מאפיינים ותכונות של צורות גאומטריות דו-ממדיות צורות תלת-ממדיות ולפתח נימוקים מתמטיים אודות יחסים גאומטריים" (NCTM, 2000). לגבי השנים הראשונות, הציפיות מהלומדים הצעירים הן שיוכלו:

- לזהות, לשיים, לבנות, לצייר, להשוות ולמיין צורות דו-ממדיות ותלת-ממדיות.
- לתאר מאפיינים וחלקים של צורות דו-ממדיות ותלת-ממדיות.

נייר עמדה, שחובר במשותף על-ידי המועצה הלאומית למורי המתמטיקה בארה"ב (NCTM) והארגון הלאומי אמריקאי לחינוך בגיל הרך (NAEYC), קובע ש"חינוך מתמטי ברמה גבוהה, מאתגר ונגיש לילדים בגילאי 3-6 הוא בסיס הכרחי ללימוד מתמטי עתידי". (NAEYC, NCTM, 2002, p. 1).

גם תכנית הלימודים במתמטיקה בגן הילדים בישראל (משרד החינוך, 2010) כוללת את נושא הגופים. לפיה, (עמ' 44): "הילד ידע:

- לזהות ולשיים גופים. שיום הגופים כולל: קובייה, גליל, כדור, פירמידה, חרוט, תיבה, מנסרה.
- לזהות צורות (זיהוי הפאות) המרכיבות את הגופים."

בהמשך, בתכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי, נושא הגופים מופיע בכיתה ב (משרד החינוך, 2006). על-פי התכנית (עמ' 48), "הילד ילמד על:

- גופים: קובייה, תיבה, גליל, פירמידה, חרוט, כדור - היכרות ראשונית;
- זיהוי ושיום גופים (במקרים פשוטים);
- הכרת מגוון גופים;
- התבוננות בגופים ותיאורם, כולל ספירת פאות, מקצועות וקדקודים."

על-פי מודל החשיבה הגאומטרית של ואן הילה (Van Hiele, 1997, 1999) החשיבה הגאומטרית של ילדים מתפתחת היררכית, בארבעה שלבים, כאשר בהגיע אדם לשלב האחרון הוא נמצא בשלב של יכולת הנמקה דדוקטיבית פורמלית. לאור העובדה, שמאמר זה עוסק בידע הגאומטרי של ילדים צעירים, ענייננו הוא בעיקר בשתי הרמות הראשונות, הרמה הוויזואלית ורמת התיאור.

ברמה הראשונה, הרמה הוויזואלית, הלומד מכיר צורות שונות ואף מבדיל ביניהן, אך הוא אינו מבחין במרכיבים ובתכונות הצורה. הוא שופט צורה על-פי המראה שלה, ויכול לנמק זאת על-פי דמיון לצורה מוכרת וידועה לו. ישנה התייחסות לצורה הגאומטרית בשלמותה. קוסטר (Koester, 2003) מביאה דוגמה של ילד שקבע שצורה מסוימת היא מלבן כי: "הוא נראה כמו קופסה". הנימוק שלו שגוי. בנימוק זה הוא מערבב בין מושג דו-ממדי (מלבן) למושג תלת-ממדי (קופסה).

ברמה השנייה, על-פי תאוריית ואן-הילה (רמת התיאור), הלומד יכול לתאר או לנתח צורות על סמך תכונות ומאפיינים של אותה צורה, הוא מכיר את הצורה לפי תכונותיה.

שתי הרמות האחרות מאפיינות לומדים בעלי רמת חשיבה גאומטרית גבוהה יותר.

כאשר שופטים בגאומטריה נימוקים לקביעת שמות של צורות, שיום הצורה והנימוק לכך, אפשר לחלק את הנימוקים לשני סוגים: סוג אחד מתייחס לתכונות קריטיות, והסוג האחר הוא של הצגת תכונות שאינן תכונות קריטיות של אותן צורות. תכונות קריטיות הן אותן תכונות החייבות להימצא בכל דוגמה של המושג, והן נובעות מהגדרת המושג (Hershkowitz, 1989, 1990). דוגמה לתכונה קריטית של גוף: "זאת פירמידה משולשת כי כל פאותיה בצורת משולש". תכונות אי-קריטיות הן תכונות הנמצאות רק בחלק

מדוגמאות המושג. דוגמה לתכונה אי-קריטית: "הצורה היא פירמידה כי יש בה בסיס שצורתו מרובע". זאת אינה תכונה קריטית כי בסיס הפירמידה יכול להיות כל מצולע, והתכונה הזאת אינה הכרחית לקביעה שהגוף הוא אכן פירמידה. בורגר ושאונסי (Burger & Shaughnessy, 1986) טוענים, שלתכונות אי-קריטיות יש אלמנט של נימוק חזותי. אחת ממטרות החינוך המתמטי היא להביא את התלמידים להשתמש רק בתכונות קריטיות כגורם להחלטתם בזיהוי דוגמאות ובבניית מושגים מתמטיים. אלה המבססים את ההנמקות על תכונות קריטיות פועלים ברמה השנייה של ואן- הילה.

בבניית ידע ומושגים ישנה חשיבות רבה להציג לפני התלמידים דוגמאות של הצורות הנלמדות, בד בבד עם הצגת אי-דוגמאות של צורות, כדי לסייע ליצירת מושג בדרך מהירה ומלאה יותר (Klausmeier & Feldman, 1975; McKinney, Larkins, Ford & Davis, 1983). בחינוך המתמטי, השימוש בדוגמאות ואי-דוגמאות נחקר רבות בהקשר לרכישת מושגים גאומטריים (Cohen & Carpenter, 1980; Petty & Jansson, 1987; Vinner, 1991; Wilson, 1986). אחת המסקנות היא שהשימוש באי-דוגמאות הוא חלק מהתהוות ומיצירה של מושג (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008). על-פי קלמנטס וסרמה (Clements & Sarama, 2000), אי-דוגמאות טובות ורלוונטיות שיכולות לתרום ליכולת לזהות ולשיים צורות, הן אותן אי-דוגמאות שיש בהן רק חלק מהתכונות הקריטיות אך לא את כל התכונות הקריטיות הנחוצות. בדרך זו הלומד יגבש נכון את המושג הנלמד.

מרכיב חשוב נוסף שיש להיות מודעים אליו בעת הצגת דוגמאות הוא שיש דוגמה או מספר דוגמאות המהוות "אב-טיפוס" (פרוטוטייפ). לכל מושג גאומטרי יש לפחות דוגמה פרוטוטיפית אחת. דוגמה זו, האב-טיפוס, היא הנרכשת ראשונה באופן אינטואיטיבי בלימוד מושג. לאב-טיפוס יש תפקיד חשוב ביצירת מושג. הרשקוביץ (Hershkowitz, 1989) טוענת, שבנוסף לתכונות ההכרחיות והמספיקות המשותפות לכל הדוגמאות של אותו מושג, לדוגמאות שהן אב-טיפוס של צורה יש גם תכונות מיוחדות (אי-קריטיות) "שמשתלטות ותופסות את תשומת לבנו". לדוגמאות אלה המהוות אב-טיפוס, יש מאפיינים ויזואליים חזקים. בגלל מאפיינים אלה נרכשת דוגמת האב-טיפוס ראשונה, ואילו שאר הדוגמאות נדחות בזמן רכישתן בשל היעדר אותן תכונות מיוחדות שיש לדוגמת האב-טיפוס (הרשקוביץ, 1992).

בהבחנה בין דוגמאות לאי-דוגמאות של צורות, אפשר לראות כי אב-טיפוס הינו הבסיס לשיפוט פרוטוטיפי. דהיינו, דוגמת האב-טיפוס משמשת ללומד מסגרת התייחסות ועל-פיה הוא שופט את הדוגמאות האחרות, במקום להשתמש בהגדרת המושג, כלומר, בתכונותיו (הרשקוביץ, 1992). במקרה כזה, הלומד נצמד לדוגמת אב-טיפוס שגוררת אכיפת דוגמאות עם תכונות אי-קריטיות על שאר דוגמאות המושג. מהלך זה גורם ללומד שלא מצליח לזהות דוגמה מסוימת של מושג, לקבל החלטות שגויות, ולא לכלול אותה כדוגמה של המושג (Hershkowitz & Vinner, 1983). ווטסון ומייסון (Watson & Mason, 2005) טוענים שמכלול הדוגמאות שתלמידים מכירים הוא בדרך כלל קטן. בורגר ושאונסי (Burger & Shaughnessy, 1986) מתייחסים לכיוון או למנח של צורה כתכונה אי-קריטית ולא רלוונטית. גם תירוש, צמיר ולוינסון (2010) מציינות, כי "מחקרים מראים כי ילדים נוטים להתייחס לתכונות שאינן קריטיות כגון מנח הצורה (בסיס מאוזן) או גודל הצורה (רחבה או צרה) כאל תכונות קריטיות, ולא להתייחס לתכונות קריטיות מסוימות" (תירוש, צמיר ולוינסון, 2010, עמ' 163). בדוגמאות אב-טיפוסיות הצורות תמיד

מונחות במנח הרגיל שלהן. כדי למנוע הצמדות לדוגמת אב-טיפוס אחת, במנח אב-טיפוסי, מומלץ לחשוף את התלמידים למספר רב של דוגמאות המייצגות מושג מסוים כמו גם אי-דוגמאות רבות של אותו מושג במנחים שונים. באמצעות חשיפה כזו יתגבש המושג אצל הלומדים (NCTM, 2000).

מחקר זה התחקה אחר היכולת של תלמידים בכיתה ב לזהות גופים במנחים שונים ולהסביר את תשובתם.

מטרות המחקר

1. לבדוק את יכולתם של תלמידים בכיתה ב לזהות דוגמאות ואי-דוגמאות של שלושה גופים: גליל, חרוט ופירמידה, במנח טיפוסי, תוך התייחסות לתכונות קריטיות ולתכונות אי-קריטיות בהנמקות שנתנו.
2. לבדוק, האם שינוי במנח של גופים בעלי שם מתמטי ידוע (ר' נספח 1, גופים 1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 14) יגרור שינוי בזיהוי הגוף (מעבר ממנח א למנח ב), ונתינת הנימוקים בהתאם.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר מנתה 35 תלמידים בכיתה ב, בבית-ספר במרכז הארץ. עד תחילת המחקר התלמידים לא למדו בצורה פורמלית את נושא הגופים.

כלי המחקר

כלי המחקר כללו 14 גופים מוחשיים (נספח מס' 1) וריאיון מובנה.

הגופים (נספח מס' 1)

לפני הילדים הוצגו 14 גופים מוחשיים: שמונה גופים עם שמות מתמטיים ידועים ומקובלים: שני גלילים (גופים מספר 1 ו- 2), שני חרוטים (גופים מספר 6 ו- 7), ארבע פירמידות: משולשת, מרובעת, מרובעת קעורה ומשושה (גופים מספר 8, 9, 11 ו- 14 בהתאמה). מבין אותם שמונה גופים בעלי שמות מתמטיים ידועים, שלושה (גוף מס' 2 – גליל "פחוס", גוף מס' 11 – פירמידה קעורה, וגוף מס' 14 – פירמידה משושה) נתפסים פחות כאבי-טיפוס של גליל ופירמידה.

ששת הגופים האחרים מייצגים אי-דוגמאות לאותם גופים ידועים. גופים מספר 3, ו- 4 הם אי-דוגמאות לגליל; גוף מספר 5 הוא אי-דוגמה לחרוט; והגופים 10, 12 ו- 13 הם אי-דוגמאות לפירמידות.

הריאיון המובנה

הריאיון כלל 28 שאלות. שתי שאלות לכל אחד מארבעה-עשר הגופים. השאלה הראשונה התייחסה למנח המקובל של הגוף (מנח א) והשאלה השנייה התייחסה למנח הגוף לאחר שינוי פוזיציה, במרבית המקרים, התבטא שינוי זה באמצעות השכבת הגוף (מנח ב). בכל שאלה התבקשו התלמידים לנמק את תשובותיהם, לדוגמה:

החוקרת הראתה לתלמידה את גוף מס' 1 במנח א ושאלה:

האם זה גליל? ______________

הסבירי מדוע: ____________________

____

לאחר מכן, שינתה החוקרת את המנח של גוף מס' 1 למנח ב ושאלה את התלמידה:

האם זה גליל? ______________

הסבירי מדוע: ____________________

____

מהלך המחקר

במסגרת פגישה אישית עם כל תלמיד הוצגו ארבעה-עשר הגופים המוחשיים בשני מנחים: מנח טיפוסי, כלומר, על בסיס הצורה (מנח א)

ומנח שאינו טיפוסי, "שוכב", כלומר, על מעטפת החרוט או הגליל או על אחת מפאות המעטפת של הפירמידה (מנח ב). סדר הצגת הגופים היה זהה לכל התלמידים.

כאמור, בכל אחת מהשאלות התבקש התלמיד להסכים או לא להסכים עם השאלה הראשונה, ואז להסביר ולנמק את תשובתו. באמצעות ההסברים נבחנו דרכי השיפוט והזיהוי של אותם גופים. כל ריאיון ארך בין 30 ל- 40 דקות.

ניתוח הממצאים

מטרת המחקר הראשונה הייתה לבדוק את יכולת התלמידים לזהות דוגמאות ואי-דוגמאות של גליל, חרוט ופירמידה במנח טיפוסי, תוך התייחסות לתכונות קריטיות ולתכונות אי-קריטיות בהנמקות שנתנו. בטבלה מס' 1 מוצגות שכיחות (באחוזים) של התשובות הנכונות ושכיחות התשובות השגויות של הדוגמאות והאי-דוגמאות. כמו כן הטבלה מציגה את השכיחות (באחוזים) של התלמידים שלא ענו על השאלות.

	N=35 גוף מספר	זיהוי נכון (%)	זיהוי שגוי (%)	לא ענו (%)
גליל	גוף מס' 1 גליל	100	0	0
	גוף מס' 2 גליל	65.7	34.3	0
	גוף מס' 3 אי-דוגמה לגליל	42.9	57.1	0
	גוף מס' 4 אי-דוגמה לגליל	48.6	51.4	0
חרוט	גוף מס' 5 אי-דוגמה לחרוט	71.4	28.6	0
	גוף מס' 6 חרוט	91.4	0	8.6
	גוף מס' 7 חרוט	85.7	5.7	8.6
פירמידה	גוף מס' 8 פירמידה משולשת	88.6	11.4	0
	גוף מס' 9 פירמידה מרובעת	80	20	0
	גוף מס' 10 אי-דוגמה לפירמידה	57.1	42.9	0
	גוף מס' 11 פירמידה קעורה	11.4	88.6	0
	גוף מס' 12 אי-דוגמה לפירמידה	82.9	17.1	0
	גוף מס' 13 אי-דוגמה לפירמידה	80	20	0
	גוף מס' 14 פירמידה משושה	42.9	57.1	0

טבלה מס' 1: שכיחות באחוזים של זיהוי דוגמאות ואי-דוגמאות של גופים (המונחים במנח א)

מטבלה מס' 1 עולה, כי בהתייחס לזיהוי ושיום הגופים בעלי שם מתמטי ידוע (גליל, חרוט ופירמידה) במנח א, טווח התשובות הנכונות נע בין 42.9% ל- 100%, כאשר מעל 80% מהמשיבים זיהו נכון את הגופים המוכרים להם, אלו שנחשפו אליהם בחיי היום-יום (גופים מספר 1, 6, 7, 8, 9). כולם (100%) זיהו את גוף מס' 1 (גליל), אחוז העונים נכון על 2 החרוטים (גופים 6 ו- 7) היה אף הוא גבוה (91.4%) ו- 85.7% בהתאמה). בנוגע לפירמידות (גוף מס' 8 - הפירמידה המשולשת וגוף מס' 9 - הפירמידה המרובעת), ענו נכון 88.6% ו- 80% בהתאמה.
האחוז הנמוך של תשובות נכונות התייחס לגופים שאף הם בעלי שם מתמטי ידוע (גליל, חרוט ופירמידה) אך פחות נחשפים אליהם בחיי היום-יום: גוף מס' 2, הגליל ה"פחוס", שגובהו קצר מקוטרו (65.7%), גוף מס' 14, הפירמידה המשושה (42.9%), וגוף מס' 11, הפירמידה הקעורה (11.4%).

בהתייחס לגופים שמהווים אי-דוגמאות, טווח התשובות הנכונות נע בין 42.9% ל- 82.9%. כאשר אחוז המזהים נכון אי-דוגמאות של גליל (גוף מס' 3) היה הנמוך ביותר (42.9%), ואחוז המזהים של אי-דוגמאות של פירמידה (גוף מספר 12) היה הגבוה ביותר (82.9%).

התשובות לוו בנימוקים. נאספו 306 נימוקים. הנימוקים לקביעת התשובה מוינו על-פי שתי קטגוריות:

קטגוריה מס' 1: נימוקים שהתבססו על תפיסת הגוף באופן כללי, בשלמותו (רמה ראשונה על-פי תיאוריית ואן-הילה, השלב הוויזואלי).

קטגוריה מס' 2: נימוקים שהתבססו על תכונות הגוף (רמה שנייה על-פי תיאוריית ואן-הילה, שלב התיאור), תוך התייחסות והבחנה בין תכונות קריטיות ובין תכונות שאינן קריטיות.

קטגוריה מס' 1 - נימוקים שהתבססו על תפיסת הגוף בשלמותו

28 נימוקים (כ- 9%) התבססו על תפיסה כללית של הגוף. להלן הנימוקים:

- *"כי לו צורה של גליל נייר טואלט".*
- *"כי לו צורה של חרוט".*
- *"כי זה כמו גביע של גלידה".*
- *"כי זה כמו בסירה שיש לה חרטום".*
- *"כי זה דומה לכובע של ליצן".*
- *"כי זה כמו הפירמידות במצרים – היא יפה גם מבפנים וגם מבחוץ".*
- *"כי זה כמו אוהל של קרקס".*

קטגוריה מס' 2 - נימוקים שהתבססו על תכונות הגוף

שאר הנימוקים, 276 נימוקים, (כ- 90%) התבססו על תכונות הגוף. חלק גדול מהנימוקים ניתנו תוך כדי נגיעה והמחשה של קיום אותה תכונה בגוף. לדוגמה: התלמידים תיארו את תכונת המשטח העקום בגליל תוך גלגול הגוף.
כאמור, את הנימוקים המבוססים על התכונות אפשר לחלק לשני סוגים: נימוקים המבוססים על תכונות קריטיות ונימוקים המבוססים על תכונות אי-קריטיות.
דוגמאות לנימוקים המבוססים על תכונות קריטיות של הגוף:

- *"זה גליל כי הוא עגול ואין לו קדקודים".*
- *"זה חרוט כי למטה יש לו עיגול ולמעלה יש לו שפיץ".*
- *"זו פירמידה כי יש לה שפיצים וכמה משולשים".*

דוגמאות לנימוקים המבוססים על תכונות אי-קריטיות של הגוף:

- *"זה גליל כי הוא ארוך..." (גוף 1) "...וזה לא גליל כי הוא לא גבוה והוא דומה לתוף" (גוף 2). תכונה אי-קריטית זו מתייחסת לאורך גובה הגליל.*
- *"כי יש 7 קדקודים אז לא יכול להיות פירמידה." (נימוק שניתן לאי-זיהוי גוף 14 כפירמידה משושה).*
- *"כי פה יש ריבוע ואז זה פירמידה היה פה משושה." (תוך הצבעה על בסיס הפירמידה המרובעת, גוף מס' 9). תכונה אי-קריטית המתייחסת למצולע המהווה את בסיס הפירמידה.*
- *"כי בלמטה אין משושה." (תוך הצבעה על בסיס הפירמידה המשושה, גוף מס' 14). תכונה אי-קריטית המתייחסת למצולע המהווה את בסיס הפירמידה.*

מטרת המחקר השנייה הייתה לבדוק האם שינוי במנח של גופים בעלי שם מתמטי ידוע (גופים 1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 14) יגרור שינוי בזיהוי הגוף (מעבר ממנח א למנח ב), וקבלת הנימוקים בהתאם.

	גוף מספר / N=35		זיהוי נכון (%)	זיהוי שגוי (%)	לא ענו (%)
גליל	גוף מס' 1 גליל	מנח א	100	0	0
		מנח ב	85.7	14.3	0
	גוף מס' 2 גליל	מנח א	65.7	34.3	0
		מנח ב	65.7	34.3	0
חרוט	גוף מס' 6 חרוט	מנח א	91.4	0	8.6
		מנח ב	71.4	28.6	0
	גוף מס' 7 חרוט	מנח א	85.7	5.7	8.6
		מנח ב	71.4	28.6	0
פירמידה	גוף מס' 8 פירמידה משולשת	מנח א	88.6	11.4	0
		מנח ב	85.7	14.3	0
	גוף מס' 9 פירמידה מרובעת	מנח א	80.0	20	0
		מנח ב	40.0	60	0
	גוף מס' 11 פירמידה קעורה	מנח א	88.6	11.4	0
		מנח ב	8.6	91.4	0
	גוף מס' 14 פירמידה משושה	מנח א	42.9	57.1	0
		מנח ב	11.4	88.6	0

טבלה מס' 2: שכיחות באחוזים של זיהוי הצורות במנח א לעומת מנח ב

מטבלה מס' 2 עולה, כי טווח התשובות הנכונות בזיהוי הגופים גליל, חרוט ופירמידה, במנח ב נע בין 11.4% ל- 85.7%, לעומת הטווח במנח א (בין 42.9% ל- 100%).

במנח ב, מבין חמשת הגופים המוכרים יותר (גופים מספר 1, 6, 7, 8, 9), 85.7% מהמשיבים שיימו נכון שניים מהם (גוף 1 - הגליל האב-טיפוסי, וגוף 8 - הפירמידה המשולשת). בעוד שבמנח א, מעל 80% מהמשיבים זיהו נכון את כל חמשת הגופים המוכרים.

השינוי הגדול ביותר בזיהוי בין מנח א למנח ב נמצא בחרוט מספר 6 (במנח א: 91.4% ובמנח ב: 71.4%) ובפירמידה המרובעת (במנח א: 80% ובמנח ב: 40%).

לגבי שלושת הגופים הפחות מוכרים (גוף מספר 2 - הגליל ה"פחוס", גוף מספר 11 – הפירמידה הקעורה וגוף מספר 14 - הפירמידה המשושה): בגליל ה"פחוס" לא נמצא שינוי בין 2 המנחים (65.7%), את הפירמידה המשושה זיהו לאחר שינוי המנח, רק 11.4% מהמשיבים, ואילו את הפירמידה הקעורה זיהו רק 8.6% לאחר שינוי המנח.

גם התשובות שניתנו לגופים במנח ב לוו בנימוקים. נאספו 108 נימוקים. מרבית הנימוקים (73 מתוך 108) ניתנו בהקשר לאותם גופים שהתלמידים לא שינו את שמם. כלומר, שמרו על שמם, גם לאחר שינוי המנח.

37 נימוקים התייחסו לגופים שהם גלילים, כאשר 34 מתוכם היו נימוקים לצידוק שמירת שם הגוף גם לאחר שינוי המנח. הנימוקים היו מהסוג הבא:

- "אותו דבר אבל רק הפוך".
- "יש להם צורות קבועות".
- "עדיין גליל".
- "כי לא משנה איך נשים אותו".
- "בכל צורה שנהפוך אותו עדיין יהיה גליל".

שלושת הנימוקים האחרים התייחסו לשינוי השם שנבע משינוי המנח, וההסבר שניתן לכך היה:

- "כי גליל צריך לעמוד ולא לשכב".
- "כי הוא שוכב אז הוא לא גליל".

24 נימוקים התייחסו לגופים שהם חרוטים, כאשר 12 מתוכם היו נימוקים לצידוק שמירת שם הגוף גם לאחר שינוי המנח. הנימוקים היו מהסוג הבא:

- "אותו דבר אבל שוכב".
- "כי הוא מתגלגל כמו חרוט".
- "זה עדיין חרוט לא משנה איך זה ייראה".

12 הנימוקים האחרים התייחסו לשינוי השם שנבע משינוי המנח, וההסבר שניתן לכך היה:

- "כי רק כשהוא ישר הוא חרוט".
- "כי חרוט הוא עומד וצריך שפיץ למעלה".
- "כי הוא שוכב והוא נמוך".

47 נימוקים התייחסו לגופים שהם פירמידות, כאשר 27 מתוכם היו נימוקים לצידוק שמירת שם הגוף גם לאחר שינוי המנח. הנימוקים היו מהסוג הבא:

- "זו תמיד פירמידה. כי לא משנה איך, תמיד יש לה את השפיץ". (לגבי פירמידה משולשת)
- "לא משנה איך נסובב אותה".
- "כי זו עדיין אותה צורה רק הפכנו אותה".

- *"אפשר להעמיד אותה איך שרוצים. היא עדיין תישאר פירמידה".*
- *"כי עדיין יש לה שפיצים בכל סיום קו".*

20 הנימוקים האחרים התייחסו לשינוי השם שנבע משינוי המנח וההסבר שניתן לכך היה:

- *"כי עכשיו יש לה 2 שפיצים ופירמידה צריכה שפיץ אחד." (כאשר השכבנו את הפירמידה המרובעת.)*
- *"כי זה (הצביעה על הבסיס, הריבוע) שטוח מדי". (פירמידה מרובעת)*
- *"כי בפירמידה צריך לראות את המשולשים ופה רואים ריבוע". (פירמידה מרובעת)*
- *"כי עכשיו אין לה צורה של פירמידה. יש למעלה קו". (פירמידה מרובעת)*
- *"כי היא על הצד וזה (מצביעה על המשושה) לא משולש". (פירמידה משושה)*

לסיכום ניתן לראות, כי הילדים שדיווחו על אי-שינוי בשם הצורה במנח ב ציינו כי הגוף לא השתנה, ואף חזרו וציינו את אותן תכונות שנתנו לגוף במנח א גם במנח ב. הסיבה אצל התלמידים, ששינוי המנח גרם לשינוי שם הגוף, נובעת משינוי המנח האב-טיפוסי למנח לא טיפוסי.

דיון ומסקנות

יכולת שיום וזיהוי צורות היא אחד הכישורים שיש לפתח אצל לומדים צעירים, כדי לקדם אותם בשליטה ברמות הראשונה והשנייה של החשיבה הגאומטרית.

במחקר זה התחקינו אחר יכולת הזיהוי של צורות תלת-ממדיות (גופים) מוכרות במנחים שונים, ואחר ההנמקות שנתנו תלמידים בכיתה ב לקביעותיהם.

מן הממצאים עולה, כי למעלה מ- 80% מהתלמידים מזהים נכון גופים הנמצאים במנחים המייצגים מנח אב-טיפוסי (מנח א). אחוז נמוך יותר נמצא בזיהוי צורות שהמראה שלהם הוא "פחות טיפוסי". ממצא זה בולט במיוחד בקרב המזהים את שני הגלילים (גופים מס' 1 ו- 2). ההבדל באחוז המזהים נכונה בין שני סוגי גלילים אלה במנח א (100% לעומת 65.7%) נובע, כנראה, מהתפיסה השגויה שאורך גובה של גליל צריך להיות גדול יותר מאורך קוטר בסיס הגליל. סביר להניח שהילדים ששגו בזיהוי הפכו תכונה אי-קריטית כמו אורך הגובה, בעקבות ההיחשפות שלהם לאב-טיפוס של גליל שהוא גבוה ו"צר", לתכונה קריטית. דבר זה הביא לשיפוט אב-טיפוסי שבעקבותיו קיבלו החלטות שגויות (34.3%) - לא לכלול את גוף מס' 2 כדוגמה של גליל. תמיכה לכך אפשר למצוא בספרות המקצועית במחקרם של וינר והרשקוביץ (Vinner & Hershkowitz, 1983).

גם את הפירמידה המשושה (גוף מס' 14), במנח האב-טיפוסי (מנח א), לא זיהו למעלה מ- 50% מהנחקרים. לדעת החוקרות, הסיבה לאחוז הנמוך נובעת מהפיכת תכונה אי-קריטית, כמו צורת הבסיס לתכונה קריטית, ולכן אותה הנחה הנחתה את אותם תלמידים לבחור בתשובה שהגוף אינו פירמידה.

אנחנו מאמינות כי הסיבה להסתמכות על האב-טיפוס נובעת מההיכרות היום-יומית של הילדים

עם גופים הדומים לגליל (גוף מס' 1) כגון, גליל נייר טואלט, ולפירמידות, המשולשת והמרובעת (גופים 8 ו- 9 בהתאמה) כגון, צורת סביבונים בחנוכה ותמונות של פירמידות בהגדות של חג הפסח.

בקרב התלמידים שזיהו נכון את הגופים נמצא כי כל הנימוקים שניתנו היו נכונים, למרות שלא כל הנימוקים התייחסו לתכונות הקריטיות של אותם הגופים. אולם דבר זה לא פגע בזיהוי הנכון של אותם גופים. ניתן לראות, בחיזוק לטענת בורגר ושאונסי (Burger & Shaughnessy, 1986), שחלק גדול מהתשובות תיארו תיאור חזותי את הגוף, כגון: "הוא עגול כזה", "הוא דומה לגליל נייר טואלט", "זה כמו אוהל אינדיאני". התמונה שונה בקרב אותם תלמידים שטעו בזיהוי הגופים ונימקו את בחירתם בהתבסס על תכונות אי-קריטיות של הגוף בלבד. לדוגמה, טעות בזיהוי גוף שהוא פירמידה משושה בגלל חוסר ידיעה שבסיס הפירמידה יכול להיות מצולע כלשהו ולאו דווקא משולש או מרובע.

נימוקים המבוססים על אבי-טיפוס מובילים, לעתים קרובות, לתפיסת צורה באופן מוגבל. מספר חוקרים, (Hershkowitz, 1989, Schwartz & Hershkowitz, 1999) מצאו, כי תלמידים נוטים לראות רק דוגמאות אב-טיפוסיות כדוגמה למושג מסוים. ואילו דוגמאות אחרות, שאינן אב-טיפוס, נתפסות בעיניהם לעתים קרובות, כאי-דוגמאות.

לפי ווילסון (Wilson, 1986, 1990) לשימוש באי-דוגמאות יש חשיבות רבה. שימוש זה מוביל להפחתת ההשפעה של האבי-טיפוס על רכישה חלקית ולא מלאה או לא נכונה של אותו מושג. לטענתה, חשיפת תלמידים לאי-דוגמאות של מושג המכילות תכונות שאינן קריטיות, מפתחת בקרב תלמידים את היכולת להבחין בין תכונות קריטיות ובין תכונות אי-קריטיות של מושגים. בהתייחס לזיהוי ושיום אי-דוגמאות של גופים בעלי שמות ידועים, נמצא כי אחוז המזהים את הגופים כאי-דוגמאות נמוך יותר. לדעת החוקרות עובדה זו נובעת מחוסר היחשפות מספקת לאי-דוגמאות מסוג זה. חיזוק לכך נמצא בנימוקים שניתנו והתייחסו למרכיב אחד, לא קריטי, של הגוף כגון: "יש לו קצת צורה של גליל עגול". (נימוק שהתייחס לאי-דוגמה: גוף מס' 3.)

בזיהוי הגופים במנחים השונים נמצא כי ילדים רבים מתקשים לזהות גופים ידועים במנחים לא קונבנציונליים (שאינם אב-טיפוס). שליטה רבה יותר נמצאת באותם גופים מוכרים אליהם הם נחשפים במסגרת כמעט יום-יומית: גליל (גוף מס' 1) ופירמידה משולשת (גוף מס' 8). ממצא זה יכול להיות מוסבר על-ידי טענתם של ווטסון ומייסון (Watson & Mason, 2005) בעניין הכמות הקטנה של הדוגמאות המוצגת בפני הלומדים. גם צמיר, תירוש ולוינסון (Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008) ותירוש, צמיר, ולוינסון (2010) מציעות במחקריהן, שהוראת הגאומטריה תכלול חשיפה לסוגים שונים ומגוונים של דוגמאות ואי-דוגמאות.

לסיכום, חשיפה לדוגמאות המייצגות גופים במנחים שונים ואי-דוגמאות של אותם מושגים, היא אבן דרך בבניית הבנת המושג בקרב תלמידים. ככל שהתלמידים ייחשפו, מגיל צעיר החל מגן הילדים, אל גופים על דוגמאותיהם ואי-דוגמאותיהם הרבות, הם יוכלו לחזק את הבנתם לגבי תכונות קריטיות ותכונות אי-קריטיות של אותם גופים. לכן, חשוב ומומלץ בכל שלב בהוראת התחום גופים להביא בפני הלומדים מגוון רחב ככל האפשר של גופים מגוונים ולהציגם במנחים שונים.

מקורות

הרשקוביץ, ר' (1992). אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גאומטריה – חלק ב. *על"ה: עלון למורה למתמטיקה*, 10, עמ' 20-27.

משרד החינוך התרבות והספורט (2010). *תכנית הלימודים במתמטיקה לגן הילדים בחינוך הממלכתי והממלכתי דתי*. ת"ל, ירושלים.

משרד החינוך התרבות והספורט (2006). *תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים*. ת"ל, ירושלים.

תירוש, ד', צמיר, פ' ולוינסון, א' (2010). משולש או לא משולש? אינטואיציות ומשולשים בגני ילדים. *אוריינות ושפה*, 3, עמ' 161-175.

Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17* (1), 31–48.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2000). Young children's ideas about geometric shapes. *Teaching Children Mathematics*, *6* (8), 482-488.

Cohen, M. & Carpenter, J. (1980). The effects of non-examples in geometrical concept acquisition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *11* (2), 259–263.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11* (1), 61–76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*, Cambridge, (pp. 70-95). UK: Cambridge University Press.

Hershkowitz, R. & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th PME International Conference* (pp. 223–228). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.

Klausmeier, H. & Feldman, K. (1975). Effects of a definition and a varying number of examples and nonexamples on concept attainment. *Journal of Educational Psychology*, *67*, 174–178.

Koester, B. A. (2003). Prisms and pyramids: constructing three-dimensional models to build understanding. *Teaching Children Mathematics*, *9* (8), 436-442.

McKinney, C., Larkins, A., Ford, M., Davis III, J. (1983). The effectiveness of three methods of teaching social studies concepts to fourth-grade students: an aptitude-treatment interaction study. *American Educational Research Journal*, *20*, 663–670.

National Association for the Education of Young Children (NAEYC) and National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Position statement. Early childhood mathematics: Promoting good beginnings*. Available: 2002.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.

Petty, O. & Jansson, L. (1987). Sequencing examples and non-examples to facilitate concept attainment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18* (2), 112–125.

Schwarz, B. & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: brakes or levers in learning the function concept? *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 362–389.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, *69* (2), 81-95.

Van Hiele, P. M. (1997). *Structuure* (structure). Uitgeverij Thieme, Zutphen. Netherlands.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematic*. *5* (6), 310-316.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, (pp. 65–81). Dordrecht, The Netherlands: luwer.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). *On concept formation in geometry*. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *15*, 20-25.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Wilson, S. (1986). Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17* (2), 130–139.

Wilson, S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12*, 31–47.

יעל צרפתי
מרצה להוראת מתמטיקה ומדריכה פדגוגית במכללת סמינר הקיבוצים. מדריכה ארצית למתמטיקה באגף לחינוך קדם יסודי, משרד החינוך.

פרופ' דורית פטקין
מרצה בכירה לחינוך מתמטי במכללת סמינר הקיבוצים בתל-אביב, מדריכה מורים ו"פרחי הוראה", בעלת ניסיון עשיר בדרכי הוראה ובטיפול בטעויות ובתפיסות מוטעות של תלמידים במתמטיקה.

נספח 1: תמונות הגופים

<table>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 1</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 2</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 3</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 4</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="2">גוף מס' 5</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 6</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 7</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 8</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table dir="rtl">
<tr><td colspan="2">גוף מס' 9</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 10</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 11</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">גוף מס' 12</td></tr>
<tr><td>מנח א</td><td>מנח ב</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

גוף מס' 13	
מנח א	מנח ב
	
גוף מס' 14	
מנח א	מנח ב