פינה דידקטית

בן כמה הרועה?
או הוראה משמעותית
וביקורתית של פתרון בעיות

פרופ' אביקם גזית
מרצה לחינוך מתמטי במכללת סמינר הקיבוצים

בן כמה הרועה? או הוראה משמעותית וביקורתית של פתרון בעיות

אביקם גזית

במאמר בשם ?How old is the shepherd (Merseth,1994) מדווחת החוקרת על שאלה שהוצגה לתלמידי כיתה ג' במערב התיכון של ארה"ב: "לרועה יש בעדר 125 כבשים וחמישה כלבים. בן כמה הרועה?" השאלה מעלה בת צחוק, כי מה הקשר בין מספר הכבשים והכלבים ובין גיל הרועה? אולי אם היו מציגים גרף שמתאר את גיל הרועה כפונקציה של מספר הכבשים (ככל שיש לך יותר ניסיון אתה יכול לרעות יותר כבשים) ואז שואלים מה גיל הרועה שיש לו 125 כבשים לפי הגרף.

נחזור לשאלה שנשאלו תלמידי ג' בארה"ב ולדיווחים של חוקרים שליקטה מרסט (Merseth, 1994). התברר ששלושה מכל ארבעה תלמידים (75%) נתנו תשובה מספרית. במאמר מוצג צילום מחברת של אחד התלמידים ושם כתוב בערך כך: 130=125+5, זקן מדי. 125-120=5, עדיין זקן. 25=125:5, זהו! הרועה בן 25. למקרא הדברים אתה נדהם, משתומם ומתפלא איך תלמידים מהמעמד הבינוני ברמה ממוצעת נותנים תשובה לא הגיונית כזו. הוראת פתרון בעיות במתמטיקה הופכת לדברי ברואר (Bruer,1994) לנטל משעמם, מרגיז, חסר אתגר החוזר על עצמו בניואנסים קלים. ברואר טוען בצורה מטפורית שהבעיות המילוליות הן החור השחור של המתמטיקה, שמכניסים לתוכו הרבה אנרגיה אך לא יוצא משם אור. תהליך ההוראה של המתמטיקה מציג ללומד בעיות שצריך לפתור באמצעות נתוני הבעיה. אין כנראה התייחסות במהלך ההוראה לחשיבה ביקורתית, הבודקת את נתוני הבעיה, או למצב בו אין אפשרות למצוא פתרון באמצעות הנתונים, ואז צריך לענות שאין פתרון. פוליה מציג בספרו כיצד פותרין (פוליה, 1961) מספר בעיות עם רמזים ודרכי פתרון. בין היתר מוצגת הבעיה הבאה: נתונים 10 כיסים ו- 44 מטבעות. איך אפשר להכניס את 44 המטבעות ל- 10 הכיסים כך שבכל כיס יהיה מספר שונה של מטבעות? מנסים, מנסים, מנסים ולא מצליחים, כי אם פותרים בצורה שיטתית מגיעים למסקנה שאי-אפשר - אין פתרון. בכיס הראשון לא שמים מטבעות, כלומר, מספר המטבעות 0, בכיס השני שמים מטבע אחד, בכיס השלישי שמים 2 מטבעות, וכך הלאה עד לכיס התשיעי שבו שמים 8 מטבעות. סה"כ לפי סכום סדרה חשבונית: $36=(0+8)\times\frac{9}{2}$ מטבעות. נשארו 8 מטבעות לכיס העשירי, וזה מספר זהה למספר המטבעות בכיס התשיעי - בניגוד לתנאי הבעיה. מי שנזכר במספר הנרות שמדליקים בחנוכה, יכול אולי להגיע לתשובה שבשמונת ימי החנוכה מדליקים, משני נרות ביום הראשון ועד לתשעה נרות ביום השמיני - לפי סכום סדרה חשבונית: $44=(2+9)\times\frac{8}{2}$ נרות. בדיוק כמספר המטבעות בחידה של פוליה. נשארו שני ימים או שני כיסים. כדי שיהיה מספר שונה בכל כיס צריך להכניס מטבע אחד לכיס התשיעי, כאשר בכיס העשירי יש 0 מטבעות. כך מגיעים ל- 45 מטבעות בניגוד לתנאי הבעיה. אגב, סטודנטית מאחת המכללות נתנה פתרון יצירתי שלא ציפיתי לו, וזה מה שיפה כשמציגים חידות לאוכלוסייה מגוונת. היא אמרה שמכניסים כיס לתוך כיס, כך שלבסוף כל הכיסים נמצאים זה בתוך זה. במצב כזה שמים את המטבעות בפיזור כלשהו, וכך בכל כיס יש יותר מטבעות מאשר בכיס שלפניו. (בכיס התחתון שאליו נכנסים כל הכיסים האחרים אחד בתוך השני יש 44 מטבעות, בכיס שלפניו 44 מטבעות פחות מספר המטבעות שבכיס התחתון וכך הלאה). בנוסף לכך שתלמידים מתרגלים לתת פתרון באמצעות נתוני הבעיה ללא ביקורת ורפלקציה, הם מתרגלים לענות בהתאם לנושא הנלמד. הכוונה היא שאם מלמדים בכיתה **חיבור שברים** פשוטים, ומציגים בעת הלימוד בעיה עם שברים פשוטים, אז צריך **לחבר**...

זכור לי מפגש שעסק בהוראת מתמטיקה בו הציגה פרופ' נצה מובשוביץ-הדר בעיה שניתנה לתלמידי כיתה ד' בארץ. דני בן 5, רות גדולה ממנו ב- 3 שנים. בת כמה רות? התלמידים התבקשו לרשום את הדרך לפתרון ולהסביר מדוע השתמשו בדרך זו. תלמידים כתבו למשל שאם כתוב "גדול ב-", אז מחברים (אגב, זה לא נכון תמיד כי "גדול ב-", יכול להוביל לתרגיל חיסור, אם למשל רות בת 8 וגדולה מדן ב-3 שנים, בן כמה דן?) או נתנו הסבר ארוך יותר בנוסח: שאם רות גדולה מדני בשלוש שנים אז צריך להוסיף. ילד

אחד (אולי החכם מכולם) כתב: "עכשיו אנחנו עוסקים בתרגילי חיבור לכן חיברתי...". בהסבר האחרון שנראה אולי "מתחכם" טמון שורש הבעייתיות של הוראת פתרון בעיות. כפי שנכתב כבר קודם, התלמידים אינם מתמודדים עם פתרון בעיות, אלא עם התאמת פתרון הבעיה למבנה מתמטי אותו למדו בשיעור.

עד כאן יש שני טיעונים על הכלים שרוכשים התלמידים בשיעורי מתמטיקה כדי לפתור בעיות מילוליות: 1. פתרון בעיה דורש שימוש בנתונים ללא חשיבה ביקורתית האם בכלל אפשר לפתור. 2. פתרון בעיה דורש שימוש באלגוריתם הנלמד בסמיכות למתן הבעיה. נשאלת השאלה: מה קורה להתפתחות מיומנות פתרון בעיות במעבר בין הכיתות בבית הספר היסודי? התשובה נמצאת במידה מסוימת במחקר של גזית (2010), שאי-אפשר להכלילו אבל בהחלט נותן מקום למחשבה. כ- 60 תלמידי כיתה ג', כ- 60 תלמידי כיתה ד', כ- 30 תלמידי כיתה ה', וכ- 30 תלמידי כיתה ו' מאותו בית-ספר, נשאלו: מהי הקומה האמצעית בבית בן 9 קומות? כ- 50% מתלמידי ג', כ- 65% מתלמידי ד', כ- 50% מתלמידי כיתה ה', וכ- 35% מתלמידי ו' ענו נכון. מרבית תלמידי כיתה ו' רשמו את התרגיל: $9:2=4\frac{1}{2}$. לעומתם רוב תלמידי ד' שאינם מנוסים עדיין בשברים וחלוקת שלם לחלקים לא שלמים, ציירו בית עם קומות, ורשמו מספרים מ- 1 עד 9 או השתמשו באמצעי המחשה. במחקר של אסמן ומרקוביץ (2002) נשאלו 50 תלמידי כיתה ו' כמה אוטובוסים יש להזמין עבור 175 תלמידים, הורים ומורים, אם בכל אוטובוס ישנם 40 מקומות. חלק מהתלמידים ענה $4\frac{3}{8}$ אוטובוסים, מבלי להתייחס לכך שאי-אפשר להזמין חלקי מכונית. אחרים רשמו 4 ושארית 15.

מהדוגמאות שהוצגו אפשר להניח שקיימת בעיה בהוראת פתרון בעיות, ובמתן כלים לתלמידים כדי להתמודד עם פתרון בעיות. הייתה לי הזדמנות לבדוק מצב זה פנים אל פנים בכיתה ג' מזדמנת, אליה הוזמנתי לתת שיעור העשרה של חידות ושעשועים מתמטיים. בכיתה נכחו כ- 30 תלמידים. שאלתי אותם בהתחלה את השאלה על הרועה עם 125 כבשים וחמישה כלבים. בן כמה הרועה? התלמידים מבלי להסס נתנו פתרונות כמו: 130, 120, 25. כאשר שאלתי אותם מה הקשר בין מספר הכלבים והכבשים וגיל הרועה, לא ידעו לתת לי את התשובה שאי-אפשר לפתור. רק תלמיד אחד אמר שהשאלה לא טובה. בהמשך שאלתי על הקומה האמצעית בבית בן 9 קומות, כאשר אני מצפה לפי המחקר הקודם שבערך 50% יענו נכון, אך התבדיתי. בסבב הראשון אף אחד לא נתן תשובה נכונה, והתשובות היו: ארבע וחצי, ארבע, או אין קומה. לאחר שחזרתי וביקשתי שלא יפתרו בראש אלא יציירו את הבניין, הגיעו כמה תלמידים לקומה 5, אולם מרביתם לא חשבו בכיוון הנכון. אך מדוע ללכת לכיתה ג' אם גם "בארזים נפלה שלהבת"... והכוונה לסטודנטיות המכשירות עצמן להוראת מתמטיקה בחטיבת הביניים. זה קרה לפני כ- 20 שנה במסגרת מתודיקה של הוראת המתמטיקה, והנושא היה פתרון בעיות. הצגתי להן בעיה שמקורה בפיבונאצ'י: נערה נכנסה לפרדס וליקטה תפוזים. בדרכה לצאת עצר אותה השומר ולקח ממנה מחצית ממספר התפוזים ועוד תפוז. בהמשך עצר אותה שומר נוסף ולקח מחצית ממספר התפוזים שנותרו ועוד תפוז. לפני צאתה עצר אותה שומר שלישי ולקח מחצית מהנותר ועוד תפוז. הנערה יצאה מהפרדס עם תפוז אחד. כמה תפוזים ליקטה? נתתי לסטודנטיות את הזמן כדי לחשוב על אסטרטגיה לפתרון. כאשר ביקשתי לקבל פתרונות קיבלתי תשובות שונות ומשונות, כמו למשל מספרים לא שלמים או מספרים שליליים. מרבית הסטודנטיות למעט אחת פתרו באמצעות משוואה עם נעלם אחד x - מספר התפוזים שקטפה. לפתור את הבעיה עם משוואה זו אסטרטגיה מתאימה, אך אליה וקוץ בה: צריך לדעת לפתור משוואה עם שברים. אם x מייצג את מספר התפוזים שקטפה, והשומר לקח מחצית ממספר התפוזים ועוד תפוז, אז נשארו לה $\frac{x}{2}-1$ תפוזים. השומר השני ביצע פעולה זהה ואז נשארו לה $\frac{\frac{x}{2}-1}{2}-1$. השומר השלישי מבצע פעולה זהה ואז נשארו לה $\frac{\frac{\frac{x}{2}-1}{2}-1}{2}-1$ וזה שווה ל-1. כאן צריך לפתור משוואה לא מסובכת אך מורכבת, $\frac{\frac{\frac{x}{2}-1}{2}-1}{2}-1=1$ כאשר מבצעים מכנה משותף בשלושה שלבים, ובכל שלב מוסיפים 1 (פעולה נגדית ל- 1-) וכופלים ב- 2. מכאן אפשר לראות את האסטרטגיה הלא אלגברית לכאורה, אך הברורה והאנליטית לפתרון: מהסוף להתחלה. הנערה שיצאה מן הפרדס עם תפוז אחד חוזרת אל השומר הראשון שנותן לה תפוז אחד

וכופל ב- 2 ומקבלת 4 תפוזים. השומר השני מחזיר לה תפוז וכופל ב- 2: היא מקבלת 10 תפוזים, והשומר השלישי מחזיר לה תפוז, כופל ב-2 והיא מקבלת את הפתרון 22 תפוזים. רק סטודנטית אחת מתוך כ- 15 סטודנטיות פתרה בדרך זו, ואילו האחרות הסתבכו עם המכנה המשותף וקיבלו תוצאות אחרות, שלא לדבר על מספרים שליליים או מספרים לא שלמים. אף אחת לא קמה ואמרה שמשהו לא הגיוני או לא מתיישב עם נתוני הבעיה (כמו התלמידים בשאלה על הקומה האמצעית). הסטודנטיות ראו לפניהן משוואה עם נעלם שיש לפתור לפי הכללים (נכונים או שגויים) והציגו מספר המהווה פתרון לכאורה, מבלי לעשות רפלקציה או בקרה על התשובה - שזהו השלב הרביעי לפי פוליה בעת פתרון בעיות (פוליה, 1961). כיום אפשר כבר לראות את האור בקצה המנהרה של פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה: מה צריך לעשות כדי להשתפר. תכנית הלימודים במתמטיקה ליסודי (משרד החינוך, 2006) מדגישה את הצורך להתנתק משאלות מסורתיות להן תשובה אחת ויחידה, הנובעת באופן ישיר מהנתונים, ולהציג שאלות להן יש מספר פתרונות אפשרי, או דרכים שונות לפתרון. כדי לעשות כהצעת התכנית צריך לפעול הן ברמת בית-הספר, הן ברמת הכשרת מורים, והן ברמת תכניות הלימודים. ראשית, חשוב להציג לתלמידים את ארבעת שלבי הפתרון היעיל של בעיות, לפי פוליה (1961), או לפי גרסאות אחרות כמו: (Mayer, 1990, 1998) שהמרכיבים המהותיים בהם די דומים: הבנת הבעיה, עריכת תכנית לפתרונה, ביצוע התכנית וסקירה לאחור - בקרה. בשלב הראשון של הבנת הבעיה יש להתמקד בשלושה דברים: מה מחפשים, מהם הנתונים ומהם התנאים. בשלב השני של עריכת התכנית יש לבדוק אם הפותר או הפותרת נתקלו בעבר בבעיות דומות, ואם הם משתמשים בכל המושגים הכלולים בתוכן הבעיה. בשלב השלישי של ביצוע התכנית יש לדאוג להכנסת הנתונים צעד אחר צעד. בשלב הרביעי של סקירה לאחור ורפלקציה יש לבדוק אם התוצאה שהתקבלה הגיונית, מתאימה לתנאי הבעיה, והאם אפשר לקבל את התוצאה גם בדרך אחרת. גרסה אחרת של תהליך פתרון בעיה מתמטית מתקשרת לתהליך פתרון יצירתי של בעיה (Butcher, 1968) שגם בו ארבעה שלבים: 1. שלב ההכנה, 2. שלב הדגירה, 3. שלב ההארה, 4. שלב האימות. שלושת השלבים הראשונים במודל של פוליה (1961) זוכים לתשומת לב במידה זו או אחרת במהלך הוראת פתרון בעיות, אם כי לא במידה מספקת. אולם השלב הרביעי והחשוב של בקרה וסקירה לאחור במודל של פוליה אינו זוכה כמעט לטיפול בספרי הלימוד, וכנראה שגם לא בתהליך ההוראה-למידה בכיתה, וייתכן שגם לא מספיק בהכשרת מורים. יש צורך להדגיש שלב זה שהוא חשוב וקריטי בעת פתרון בעיות לא רק לצורך בקרת הפתרון, אלא גם כדי לבדוק אם נתוני הבעיה מאפשרים בכלל פתרון. זאת כדי שלא נגיע למצב בו תלמידים מחשבים את גיל הרועה לפי מספר הכבשים והכלבים....

מקורות

- אסמן, ד' ומרקוביץ צ' (2002). מתמטיקה ומציאות - ביחד או לחוד, מספר חזק 2000, כתב עת להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי, 3, עמ' 5-9.
- גזית, א' (2010). המקרה המוזר של קומה ארבע וחצי - כיצד מתמודדים תלמידי כיתות ג'-ו' עם פתרון בעיה מציאותית. החינוך וסביבו, שנתון מכללת סמינר הקיבוצים, ל"ב, עמ' 105-117.
- משרד החינוך, (2006). תכנית לימודים, מתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים.
- פוליה, ג' (1961). כיצד פותרין, אוצר המורה.
- Butcher, H.J. (1968). Human intelligence. London: Methuen & Co. Ltd.
- Bruer, J. T. (1994). How Children Learn Mathematics. Executive Educator, 16(8), 32-36.
- Mayer, R. E. (1990). Problem solving, in W. M. Eysenck (ed.), The Blackwell Dictionary of Cognitive Psychology. Basil Blackwell, Oxford, 284–288.
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. Instructional Science, 26: 49-63. Kluwer Academic Publishers.
- Merseth, K. K. (1994). How old is the shepherd? An assay about mathematics education. Phi Delta Kappan, 74 (7), 548-584.