פינה של הפתעה

טעימות של חקר
בשיעור מתמטיקה

דר' פיטר סמובול
המכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי;
בית ספר אשל הנשיא

יוסף חפץ
מורה בבית ספר אשל הנשיא

רן שקלר
תלמיד כיתה י"ב בבית ספר אשל הנשיא

יונתן חשפר
תלמיד כיתה י"ב בבית ספר אשל הנשיא

טעימות של חקר בשיעור מתמטיקה

פיטר סמובול, יוסף חפץ, רן שקלר, יונתן חשפר

במאמר זה נציג מספר בעיות חקר "קטנות" שנוצרו במהלך דיון בבעיה אחת עם תלמידי כיתות ה'-ו'. המורים מעידים, כי שימוש בבעיות חקר בשיעורי מתמטיקה מציב אתגר ללומדים ומפתח יצירתיות בקרב התלמידים ומוריהם.

עשרות תלמידים בארץ כותבים עבודות חקר במתמטיקה מידי שנה. כדי לשמר (ואולי אף להגדיל) את מספרם של התלמידים העוסקים במשימות חקר, על המורים לחשוף את התלמידים כבר מגיל צעיר, לבעיות חקר בתחום זה. בעיית חקר במתמטיקה היא בעיה המקיימת את התנאים הבאים: (1) פתרונה אינו ידוע לתלמיד, ו- (2) כדי לפתור את הבעיה על התלמיד לפתח אסטרטגיה חדשה או דרך חדשה לפתרון עבורו. מכאן נובע שפתרון "בעיית חקר" - הוא אישי ותלוי ביכולתו של התלמיד להגיע לפתרון באופן עצמאי.

התמודדות של תלמידים צעירים עם בעיות חקר "קטנות" עשויה להכשירם לעשייה משמעותית במתמטיקה, ואף לסלול את דרכם לפתרון בעיות חקר "גדולות" בעתיד. הבעיות המוצגות הן תוצר של דיון בכיתה בבעיה אחת (בעיה 2) - ושל העלאת בעיות חדשות במהלכו.

בעיה 1

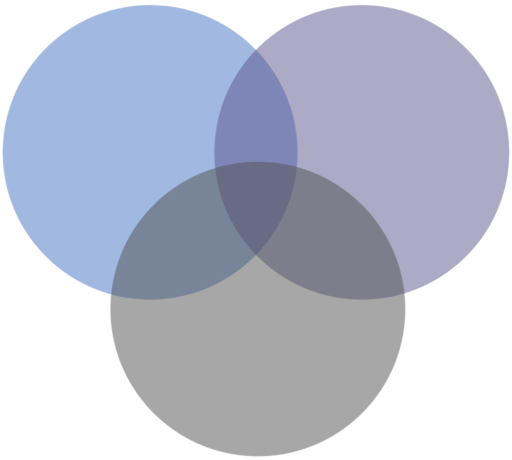
מהו מספר התחומים המקסימלי שיוצרים שלושה עיגולים נחתכים?

פתרון

אפשר להתחיל באסטרטגיית ניסוי וטעייה, ובהמשך להגיע למסקנה שמספר התחומים המקסימלי הוא 7, כאשר ניתן לחזק את המסקנה בנימוק הבא: יצירת מספר התחומים הגדול האפשרי כרוכה במספר נקודות החיתוך הגדול ביותר בין שלושת המעגלים. כך למעשה עלינו ליצור מצב שבו כל שני מעגלים נחתכים ביניהם בשתי נקודות, ואין מצב שבו שלושה מעגלים נחתכים בנקודה אחת.

אחד המצבים האפשריים מוצג בסרטוט 1 ויש בו 7 תחומים שונים.

סרטוט 1:



בעיה 2

נתונים שלושה עיגולים נחתכים, כמתואר בסרטוט 1. יש לשבץ בכל אחד משבעת התחומים שנוצרו את המספרים מ- 1 עד 7 (כל מספר פעם אחת בלבד), כך שסכום המספרים הרשומים בכל עיגול יהיה זהה ושווה ל- 15.

פתרון

נתבונן בסרטוט 1. בכל עיגול יש ארבעה תחומים, ולכן הפתרון האפשרי עובר דרך מציאה של כל הרביעיות האפשריות (מהמספרים 1-7) שסכומן 15.

הערה: אם התלמידים אינם מכירים היטב את שיטת הברירה והבדיקה, מומלץ להראות להם את הסדר שבו בוחנים ובוחרים את הרביעיות.

יש רק ארבע רביעיות של מספרים מ- 1 ועד 7 שסכומן 15:

$1+2+5+7=15$

$1+3+5+6=15$

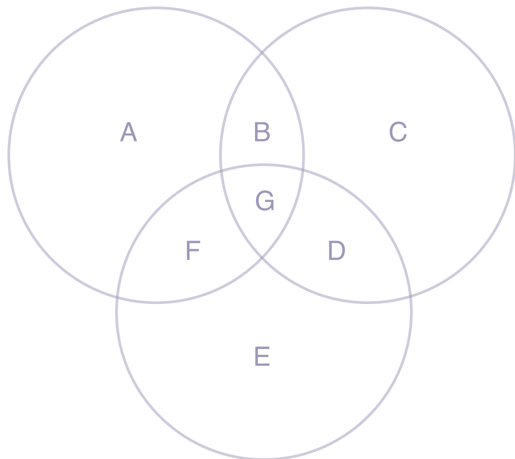
$1+3+4+7=15$

$2+3+4+6=15$

כעת עלינו לבחור שלוש רביעיות (בהתאם למספר העיגולים) מתוך ארבעת השוויונות הנ"ל. אפשר כמובן לעבור על כל ארבע השלישיות השונות של השוויונות (בחירה של 3 מתוך 4 שוויונות). אולם לפני כן ננסה לנתח

את המבנה שנוצר על-ידי חיתוך של שלושה עיגולים. נשים לב שעל המספרים שיהיו רשומים באזורים השונים יש "עומס" (השתתפות במספר סכומים) שונה. נסמן את האזורים באותיות: A-G כפי שמתואר בסרטוט 2.

סרטוט 2:



אפשר לראות כי המספרים שיהיו רשומים במקומות A ,C ו- E ישתתפו כל אחד בסכום אחד בלבד, המספרים שיהיו רשומים במקומות B ,D ו- F ישתתפו כל אחד בשני סכומים, כאשר המספר שיהיה רשום במקום G ישתתף בכל שלושת הסכומים. ידע זה מביא לבחירת שלושה מתוך ארבעה שוויונות בשני אופנים בלבד:

$\mathbf{1}+2+5+7=15$

$\mathbf{1}+3+5+6=15$

$\mathbf{1}+3+4+7=15$

או

$1+\mathbf{3}+5+6=15$

$1+\mathbf{3}+4+7=15$

$2+\mathbf{3}+4+6=15$

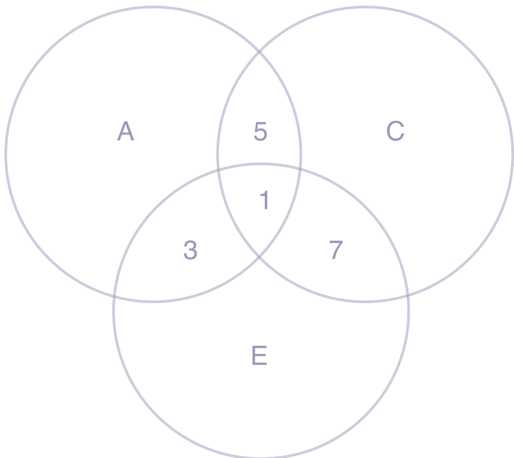
השיקול לבחירת שתי האפשרויות של שלושת השוויונות הוא: קיומו של אותו מחבר בכל שוויון (המועמד למקום G). במקרה הראשון זהו המספר 1 ובמקרה השני זה המספר 3.

הערה 1: רק שני מספרים אלה שותפים לשלושה סכומים שונים.

הערה 2: קיום של שני סטים של שוויונות אינו מבטיח את קיום הפתרון לבעיה, הוא רק מצביע על העובדה שאם קיים פתרון לבעיה - יהיו לכל היותר שני פתרונות שונים (למקרה שסכום המספרים בכל עיגול הוא 15).

נתבונן במקרה הראשון. נשבץ את המספר 1 לאזור G. המספרים 3,5,7 משתתפים כל אחד בשני סכומים ולכן יתפסו את האזורים F ,B ,D (בענייני סימטריה אין חשיבות לסדר). נקבל את המצב הבא (ראו סרטוט 3).

סרטוט 3:



בהסתמך על השוויונות:

$1+2+5+7=15$

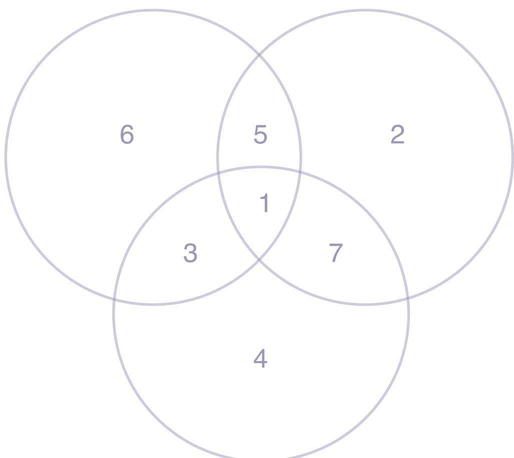
$1+3+5+6=15$

$1+3+4+7=15$

אפשר להשלים את המספרים הנותרים: באזור A נשבץ 6, באזור C - 2, ובאזור E - 4.

להלן הפתרון הראשון:

סרטוט 4:



באופן דומה ניתן למצוא **פתרון נוסף** למקרה של האפשרות השנייה:

1+3+5+6=15

1+3+4+7=15

2+3+4+6=15

נסו להשלים את הפתרון.

בעיה 3

שלושה עיגולים נחתכים, כמתואר בסרטוט 2. יש לשבץ בכל אחד משבעת התחומים שנוצרו את המספרים מ-1 עד 7 (מספר אחד בכל תחום), כך שסכום המספרים הרשומים בכל עיגול יהיה זהה, וגם יהיה:

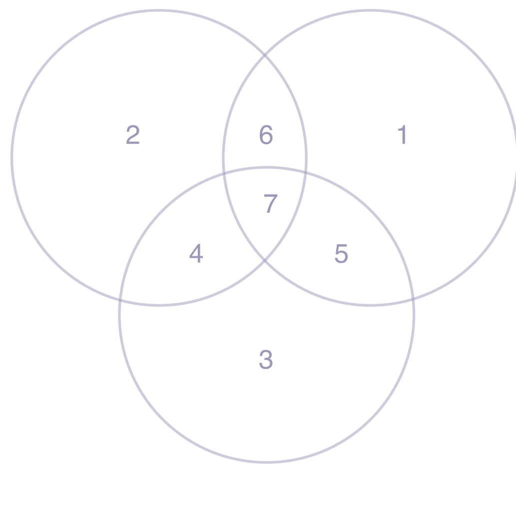
א. הגדול ביותר האפשרי.

ב. הקטן ביותר האפשרי.

פתרון לסעיף א

כדי ליצור את הסכום הגדול ביותר יש להשתמש במספרים הגדולים ביותר במספר רב של סכומים. מסיבה זו נשבץ את המספר 7 כמספר הגדול בין המספרים 1-7, במקום האופטימאלי - G, כך שהוא יופיע בכל שלושת הסכומים, מאותה סיבה נכתוב את המספרים: 6, 5 ו- 4 באזורים B,D,F כך שיופיעו כל אחד בשני סכומים (עיגולים); את המספרים הנותרים 1, 2 ו- 3 נשבץ בשלושת המקומות האחרונים: A,C,E, כך שבכל עיגול סכום המספרים שבתוכו יהיה זהה.

סרטוט 5:



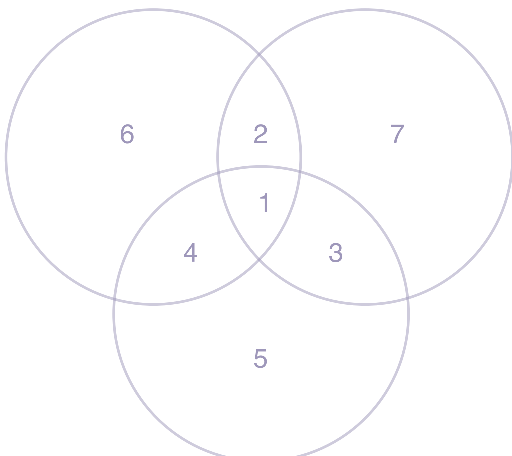
לסיכום: הסכום הגדול ביותר האפשרי הוא 19 כמתואר בסרטוט 5. מומלץ לחזק את ההסבר על-ידי דיון באסטרטגיה שהצגנו: הצבת המספרים הגדולים ביותר במקומות "המרכזיים" ובעלי ה"עומס" המרבי, מבטיחה את קבלת הסכומים הגדולים ביותר מבין אלה האפשריים.

פתרון לסעיף ב

ניעזר באסטרטגיה של סעיף א', אך הפעם בחשיבה הפוכה: נשים במקום המרכזי והמשותף לשלושת העיגולים את המספר 1, ואת המספרים 2,3,4 נשים במקומות המשותפים לשני עיגולים בלבד; את המספרים הנוספים נפזר כך שסכום המספרים בכל אחד מהעיגולים יהיה שווה, כמו שמתואר בסרטוט 6.

הסכום הקטן ביותר הוא 13.

סרטוט 6:



בעיה 4

בדקו אם ניתן לקבל את כל הסכומים, שבין הסכום הקטן ביותר - 13, לבין הסכום הגדול ביותר - 19.

הערה: אנחנו מציעים לקוראים לפתור את הבעיה בדומה למה שהוצג קודם או בכל דרך אחרת.

בעיה 5

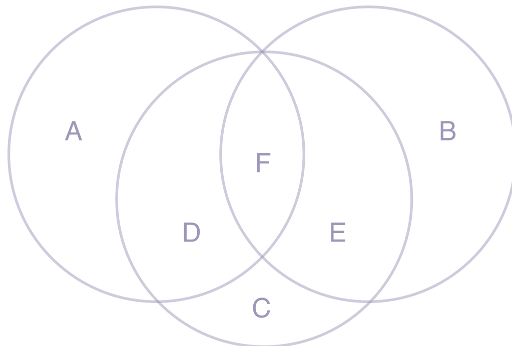
סרטטו שלושה עיגולים שנחתכים ויוצרים שישה תחומים.

פתרון

נזכור, כי בבעיות קודמות דנו במקרים שבהם כל מעגל נחתך בשתי נקודות עם מעגל אחר, וכך נוצרו 7 תחומים. אם ברצוננו

ליצור 6 תחומים עלינו להקטין את מספר נקודות החיתוך. אחת האפשרויות לעשות זאת היא לדאוג שבנקודה אחת ייפגשו 3 מעגלים. דוגמה לפתרון מוצגת בסרטוט 7.

סרטוט 7:



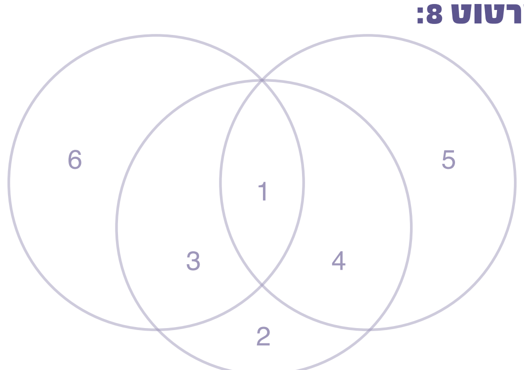
בעיה 6

שלושה עיגולים נחתכים, כמתואר בסרטוט 7. יש למקם בששת התחומים שנוצרו את המספרים מ- 1 עד 6 (אחד בכל תחום), כך שסכום המספרים שרשומים בכל עיגול יהיה שווה ל- 10.

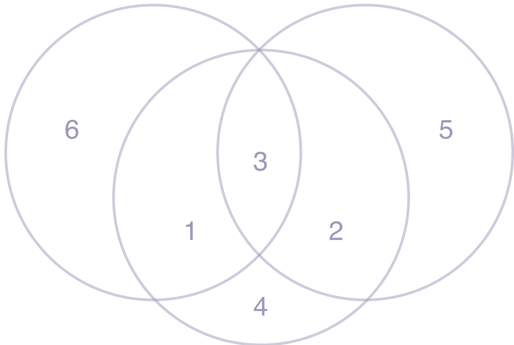
פתרון

נשים לב כי העיגול המרכזי מכיל בתוכו ארבעה תחומים שונים: C,D,E,F. הרביעייה היחידה של המספרים מ- 1 עד 6 שסכומם 10 היא: 10=1+2+3+4. מכאן שבאזורים הנותרים A ו- B ישובצו המספרים 5 ו- 6. נשבץ באזור A את המספר 6 ובאזור B את המספר 5. כעת בעיגול השמאלי המכיל את האזורים A,D,F סכום המספרים הרשומים באזורים D ו- F חייב להיות 4 (משלים ל- 10). זוג מספרים יחיד (מהמספרים 1-6) שמקיים את התנאי הוא 1 ו- 3 (או 3 ו- 1). התבוננות בשני המקרים מביאה לשני פתרונות המוצגים בסרטוטים 8 ו- 9.

סרטוט 8:



סרטוט 9:



בעיה 7

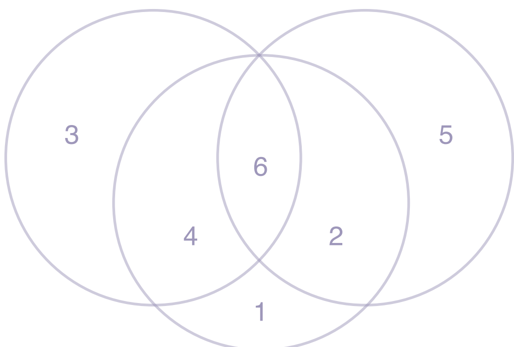
הראו שבשיבוץ של מספרים מ- 1 עד 6 בששת האזורים שבסרטוט 7, סכום המספרים הגדול ביותר האפשרי, בכל אחד מהעיגולים, הוא 13.

פתרון

בשלב הראשון של ההוכחה נראה את קיום הפתרון למקרה שבו סכום המספרים בכל אחד מהעיגולים הוא 13. ראו סרטוט 10.

הערה: אנחנו מציעים לקוראים להסביר את הפתרון ולבדוק את קיומם של פתרונות נוספים.

סרטוט 10:



נוכיח שהסכום 13 הוא הגדול ביותר האפשרי. נניח בשלילה, שקיים שיבוץ של מספרים 1-6 כך שסכומם בכל אחד מהעיגולים יהיה 14. אם השיבוץ נכון אזי קיימות **שתי** שלישיות ורביעייה אחת (בהתאם לאזורים שבעיגולים) של המספרים מ- 1-6 שסכומם 14. מהבדיקה נובע שיש רק שלישיה **אחת** שהיא: 14=6+5+3, לכן בלתי אפשרי לקבל סכום 14 בכל העיגולים. כך גם כדי להגיע לסכום

15 קיימת רק שלישיה אחת (15=6+5+4), ולסכום 16 ומעלה לא ניתן להגיע כלל.

למעשה, הוכחנו שקיים שיבוץ שבו סכום המספרים בכל העיגולים הוא 13, ולא קיימים שיבוצים אחרים שסכום המספרים בכל אחד מהעיגולים גדול מ- 13.

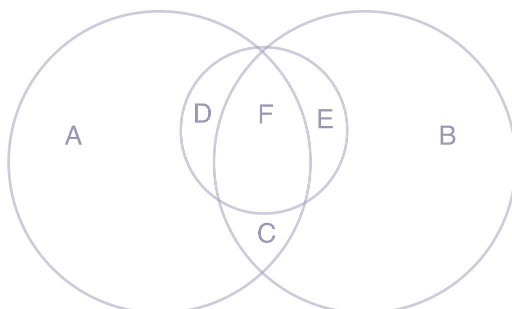
בעיה 8

מצאו סידור אחר של העיגולים עבורו יהיה ניתן לשבץ את המספרים 1-6 כך שסכום המספרים הגדול ביותר האפשרי יהיה 15 (בכל אחד מהעיגולים).

פתרון

מניתוח של סרטוט 7 נגלה, כי יש מספר אחד שמשתתף בשלושה סכומים (נמצא בתוך שלושה עיגולים) - F, שני מספרים שמשתתפים בשני סכומים (נמצאים בתוך שני עיגולים) - D,E, ושלושה מספרים שמשתתפים בסכום אחד בלבד (נמצאים בתוך עיגול אחד בלבד) - A,B,C.
סה"כ סכום כל ה"עומסים" (הניצול של המספרים) - 10.
כדי לנסות להגדיל את הסכום בתוך כל אחד מהעיגולים עלינו ליצור מצב שבו על המספרים יש יותר "עומסים" - השתתפות רבה יותר של המספרים בסכומים.
אחד המצבים מוצג בסרטוט 11:

סרטוט 11:



אפשר לראות שבמקרה זה מספר אחד משתתף בשלושה סכומים (נמצא בתוך שלושה עיגולים) - F, שלושה מספרים משתתפים בשני סכומים (נמצאים בתוך שני עיגולים) - D,C,E, ושני מספרים המשתתפים בסכום אחד בלבד (נמצאים בתוך עיגול אחד בלבד) - A,B. סה"כ סכום כל ה"עומסים" (הניצול של המספרים) - 11.
כעת עלינו לחפש מבין המספרים 1-6 את כל השלישיות והרביעיות שסכומן 15.

מתברר שיש בסה"כ 3 אפשרויות:

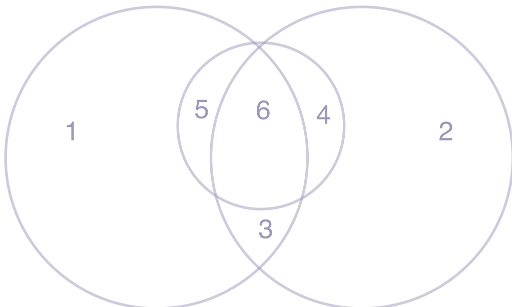
15=1+3+5+**6**

15=2+3+4+**6**

15=4+5+**6**

מכאן, רק המספר 6 שמשתתף בכל שלושת השוויונות מועמד להחליף את F, המספרים 4 ו- 5 יחליפו את האותיות D ו- E, והמספרים 1 ו- 2 יחליפו את A ו- B.
לסיכום נקבל את הפתרון שמוצג בסרטוט 12:

סרטוט 12:



להשלמת ההוכחה יש להסביר:

- מדוע במצב זה של העיגולים הסכום 15 הוא הגדול ביותר האפשרי.
- האם קיים מצב אחר של שלושה עיגולים היוצרים שישה תחומים, שבהם ניתן לשבץ את המספרים 1-6 כך שסכום המספרים בכל עיגול יהיה זהה וגדול מ- 15.

נאפשר לקוראים להשלים את ההסברים.

בפעילות שהוצגה יש טעימה של מספר בעיות חקר "קטנות" שנוצרו במהלך דיון סביב בעיה אחת. ניהול נכון של הדיון גרם לתלמידים להעלות בעיות חדשות שפתרונן לא היה ידוע למורה בתחילת השיעור. אווירה פתוחה ושיתוף פעולה מלא בין המורה לבין התלמידים השיגו את מטרתם. התלמידים יצאו בתחושה שיצרו לא רק בעיות חדשות, אלא מצאו גם את פתרונן; המורה יצא בתחושה שהשיג את מטרתו כאשר התלמידים העלו השערות, השתמשו באסטרטגיות שונות לפתרון בעיות, ואף השתמשו בשיקולים המתקבלים על הדעת. פעילות כזאת שמקורה בסוג של משחק, מאתגרת את המשתתפים ונותנת להם הזדמנות להיות יצירתיים בשיעורי מתמטיקה, ואף להרגיש עצמם כחוקרים צעירים.

פינה של הפתעה

הצעה לשאלות חקר נוספות:

פיטר סמובול, יוסף חפץ, רן שקלר, יונתן חשפר

1. מצאו מספר בן עשר ספרות המקיים את התנאים הבאים: כל ספרה מ- 0 עד 9 מופיעה בו פעם אחת בלבד; שתי הספרות הראשונות של המספר הן מספר דו-ספרתי המתחלק ב- 2, שלוש הספרות הראשונות של המספר הן מספר תלת-ספרתי המתחלק ב- 3,... והמספר עצמו מתחלק ב- 10.

2. מצאו שלושה מספרים תלת-ספרתיים, שבכל אחד מהם הספרות מסודרות בסדר עולה (משמאל לימין), וסכום אותם שלושת המספרים הוא מספר שספרותיו מסודרות בסדר יורד (משמאל לימין).

3. מצאו k מספרים k ספרתיים, כאשר בכל אחד מהם הספרות מסודרות בסדר עולה (משמאל לימין), וסכום אותם k המספרים הוא מספר שספרותיו מסודרות בסדר יורד (משמאל לימין).