ברור כמו 2x2...

ד"ר איליה סיניצקי– מכללת גורדון לחינוך, חיפה

למידה משמעותית בבית ספר צריכה להתבסס על תהליכי פיתוח חשיבה אצל התלמיד. למרות הוויכוח על ההבנה המדויקת של המושג, הוסכם כי בעיות פתוחות הן אחד מהכלים המרכזיים לפיתוח חשיבה מתמטית. בעיות פתוחות מאפשרות שימוש במודלים שונים לפתרון, משלבות ידע ומיומנויות חשיבה מתחומים שונים של המקצוע ומזמינות בעיות נוספות שקשורות בבעיה (Silver, 1993).

הפעילות המוצגת במאמר בוצעה בסדנאות למורים למתמטיקה ולפרחי הוראה במטרה להדגים פעילות חקר בכיתת לימוד באמצעות בעיה, שמתאימה לרמות ידע שונות של התלמידים. במאמר מודגשות יתרונותיה של למידה דרך התמודדות עם בעיות פתוחות. הבעיה הנבחרת לפעילות חקר צריכה לענות על הדרישות הבסיסיות לתהליך למידה פעילה (סיניצקי, 2000; Borasi,1992):

- הבעיות המתמטיות חייבות להתאים לרמת המשתתף מבחינת רמת הידע הקודם ומבחינת הכלים המקצועיים להתמודדות / התקדמות בתהליך החקר. הבנת הנוסח של הבעיה כמעט ואינה דורשת ידע מקצועי ומובנת אפילו לתלמידי בית הספר היסודי.
- הבעיה צריכה להיות "עשירה" מספיק כדי לאפשר שימוש בכלים מתמטיים רבים, גישות שונות ורב–כיווניות של תהליך החקר.
- קיים ערך יישומי גם לפתרונות וגם לתהליך החקר עצמו מבחינת העמקת ידע הלומד ושליטתו במושגים ובכלים מקצועיים.
- הבעיה מרתקת את החוקר מבחינה פסיכולוגית: ניסוח הבעיה מעורר סקרנות והתוצאות הן מפתיעות.

בהמשך מוצגת הדגמת פעילות חקר ברמות שונות שמקורה ב– "השוויון הידוע ביותר" $2 \cdot 2 = 4 = 2 + 2$.

"מהי הפעולה?" – הצגת הבעיה

אולי השוויון הידוע ביותר בחשבון הוא $2 \cdot 2 = 4$

אבל גם $2 + 2 = 4$

במקרה זה אפשר "להחליף" את פעולת החיבור בפעולת הכפל:

$2 \cdot 2 = 2 + 2$

ניסוי אקראי מוכיח שתכונה זאת **לא תמיד** מתקיימת, ועובדה חשבונית פשוטה משמשת כמקור לחקר שנפתח בשאלה טבעית: "האם יש עוד מספרים שמכפלתם שווה לסכומם?" ניסויים רבים בקרב אוכלוסיות שונות הראו, כי זהו הניסוח האופייני של המשימה, שאותה קובעים המשתתפים בפעילות חקר. אך התברר, כי השאלה מאפשרת מספר פירושים. ראשית, הבנת השאלה קשורה באופן ישיר **לאינטרפרטציה** של העובדה המקורית.

למשל, הצגת השוויון בין המכפלה והסכום גם כשוויון בין ריבועו של 2 ופעמיים המספר 2 מזמינה את השאלה כלפי מספרים זהים:

- האם קיימים עוד זוגות של מספרים זהים, שמכפלתם שווה לסכומם?

הניסוח הזה מכריח חקר עם **הגבלה מלאכותית** למדי, שאינה קיימת בשאלה.

משמעות השאלה משתנה גם בהתאם **לקבוצת המספרים**, שבה אנו מחפשים את התשובה:

- האם קיימים עוד זוגות של מספרים טבעיים, שמכפלתם שווה לסכומם?
- האם קיימים עוד זוגות של מספרים שלמים, שמכפלתם שווה לסכומם?
- האם קיימים עוד זוגות של מספרים ממשיים ("לאו דווקא שלמים" – בניסוח לתלמידים של בית הספר היסודי), שמכפלתם שווה לסכומם?

ברור כי אותה שאלה לגבי זוגות מספרים זהים מנוסחת בשלוש הווריאציות, שמשתנות בהתאם לקבוצת המספרים שעליה נערך החקר.

חשוב לציין, כי **אין לדרג** את השאלות הנ"ל לפי "הפרודוקטיביות" שלהן: כל אחת מזמינה תהליך חקר עם תוצאות ייחודיות, ואף חשוב יותר, מובילה לשאלות נוספות להמשך החקר. מצד שני, ניסוח השאלות מכתיב במידה רבה את דרך ההתמודדות אתן – ולכן יש מקום למיון השאלות לפי כלים לטיפול בהן – ולהתאמת הפעילות לרמות גיל וידע שונות.

צעדים ראשונים – עם מספרים זהים.

נתחיל מחיפוש זוגות של מספרים טבעיים זהים, שמקיימים את השוויון הנדרש **בדרך של ניסוים מכוונים**. נבדוק:

$$\begin{array}{ll} 2 + 2 = 4 & 2 \cdot 2 = 4 \\ 3 + 3 = 6 & 3 \cdot 3 = 9 \\ 4 + 4 = 8 & 4 \cdot 4 = 16 \\ 5 + 5 = 10 & 5 \cdot 5 = 25 \\ 6 + 6 = 12 & 6 \cdot 6 = 36 \end{array}$$

מהניסויים מתברר כי השוויון לא מתקבל באף אחת מהמכפלות החדשות, וכן כי הפער בין מכפלת המספרים הזהים לבין סכומם הולך וגדל. חשוב **לנמק** מדוע הוא גם ימשיך לגדול (נמקו!). מכיוון שגם 1+1 אינו שווה ל– 1x1, **אין פתרונות נוספים לבעיה זאת בתחום המספרים הטבעיים.**

אותם הניסויים מהווים גם טיפול באותה השאלה בקבוצה רחבה יותר, קבוצת המספרים השלמים. המסקנה היא, שיש לשנות את כיוון החיפוש ולרדת למספרים קטנים מ–2. כאן מחכה לנו גם מסקנה נמהרת (ושגויה): "אם במספרים גדולים מ–2 המכפלה גדולה מהסכום, וב–2 מתקיים השוויון, אז במספרים קטנים מ–2 הסכום גדול מהמכפלה" (המקרה של 1 מחזק את המסקנה השגויה!). ניסוי נוסף או מחשבה על מספר ה– 0 בתור ההבדל הבולט בין מספרים טבעיים ושלמים מביאה את החוקר אל **הפתרון הנוסף**:

$$0 \cdot 0 = 0 + 0$$

ברור, כי הצגה בדרך אלגברית של בעיית חיפוש לזוג מספרים זהים, שמכפלתם שווה לסכומם, נותן משוואה ריבועית

$$a^2 = 2a$$

עם הפתרונות **$a = 2$** ו– **$a = 0$**.

כל אחת מהדרכים והתוצאות המתקבלות בהן מביאות את החוקר לשאלה לגבי ההכללות האפשריות– וחוץ מהאופציה לחפש בין מספרים, שאינם זהים בהכרח, עולה גם שאלה לגבי **יותר משני מספרים**. למשל, "פתרון טריוויאלי" מופיע כמעט באופן מיידי:

$$0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0 + 0 + \ldots + 0 \quad (*)$$

לשלושה, ארבעה וגם ל– n מספרים שלמים זהים.

גישה אלגברית נותנת כאן משוואה במעלה n:

$$a^n = na$$

בעלת פתרון $a = 0$ (כמובן) וגם פתרון אי–רציונלי נוסף $a=\sqrt[n-1]{n}$.

עבור n=3 הפתרון מקיים את השוויון

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

או בצורה מוכרת יותר: $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$

נסכם את התוצאות שהושגו בחלק זה:

- קיים שוויון דומה ל– $2 \cdot 2 = 2 + 2$ והוא: $0 \cdot 0 = 0 + 0$.
- אין פתרונות נוספים, כאשר מדובר על זוגות מספרים זהים.
- קיימים עוד שוויונות דומים עבור יותר משני מספרים זהים, אך ביניהם רק שוויון אחד (*) עבור מספרים שלמים.

משחקים סביב ה–0

בחלק הקודם מצאנו שוויון (למעשה, קבוצת פתרונות) שאינו בולט לעין עם מספרים אי-רציונלים, אבל...במקור מדובר על עניין "מוחשי מאוד", על מספרים טבעיים או שלמים! בהרבה מקרים נשמע בנקודה זאת: "ברור כי ההגבלה למספרים זהים בלבד היא נוקשה מדי, וכדאי לחשוב גם על מספרים שאינם זהים בהכרח." זאת בהחלט גישה פרודוקטיבית, ואנו נלך לפיה בהמשך, אך לפני כן, נתבונן בשוויון (*).

השוויון מבטא, בעצם, את העובדה, כי את המספר 0 ניתן לקבל גם כסכום של אפסים וגם כמכפלתם. אבל לאיפוס המכפלה מספיק רק גורם יחיד ששווה ל– 0, ולקבלת סכום, ששווה ל– 0, צריך "איזון" בין המחוברים, שמתקיים, למשל, כאשר הם מספרים נגדיים. באמצעות מחשבה זאת אפשר להרכיב את השוויון לשלושה מספרים:

$$(-a) \cdot 0 \cdot a = (-a) + 0 + a$$

עבור מספר a שרירותי. מכאן קל גם להגיע לפתרונות "ארוכים" יותר, אם נפצל אחד (או יותר) מהמחוברים. למשל, הקבוצה {3,0,-3}, שמקיימת את השוויון:

$$(-3) \cdot 0 \cdot 3 = (-3) + 0 + 3$$

מולידה גם את הקבוצה {2,1,0,-3} שמקיימת את השוויון

$$(-3) \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 = (-3) + 0 + 1 + 2$$

וגם {1,1,1,0,-3}, {3,0,-1,-2}, {2,1,0,-1,-1,-1} ועוד פתרונות רבים, יתרה מכך, כל קבוצת המספרים שסכומם אפס, מקיימת את השוויון בין הסכום למכפלה, או נותנת דוגמה של השוויון הנ"ל, כאשר נצרף לה את המספר אפס החסר.

לקראת סוף שלב זה, אין לנו מחסור בשוויונות, שרק חלמנו עליהם בתחילת הדרך, מפני שהמשכנו לחקור את השוויון (*) הטריויאלי כל כך. למרות ההנחה התחלתית על זהות המספרים המרכיבים את השוויון הרצוי, התקדמנו דרך הכללות אל פתרונות רבים נוספים. השאלה העיקרית, שנשארת פתוחה כעת היא: האם יש פתרונות נוספים בלי 0 כאחד ממרכיבי השוויון? כאן אנו מגיעים לשלב, שיכולנו להתחיל ממנו – האם הפסדנו או הרווחנו מהשלבים הקודמים?

כולם שווים? לא תמיד...

"האם קיימים עוד זוגות של מספרים ממשיים a, b, שמכפלתם שווה לסכומם?" ניסוח כזה מזמין מיד גישה אלגברית, שמביאה לקשר הבא בין a ל–b :

$$a + b = a \cdot b$$

$$b = \frac{a}{a-1} = \frac{(a-1)+1}{a-1} = 1+\frac{1}{a-1}$$

האם יש עוד מקרים (מלבד $2 + 2 = 2 \cdot 2$) שמכפלת המספרים שווה לסכומם?

מקרה כללי: מספרים a, b לא בהכרח זהים

הבנות שונות

שני מספרים → $(a-1) \cdot (b-1) = 1$

שני מספרים שלמים

שני מספרים טבעיים → בדרך כלל, $a \cdot b > a + b$

הגבלה: שני מספרים זהים

קבוצות שונות

שני מספרים → גישה אלגברית → $a = 0$, $a = 2$

שני מספרים שלמים → ניסוי ושינוי הכיוון → $0 \cdot 0 = 0 + 0$

שני מספרים טבעיים → ניסוי וטעיה → אין פתרונות טבעיים אחרים

הכללה: יותר משני מספרים

$$a \cdot b \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{a \cdot b - a - b} = a + b + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{a \cdot b - a - b}$$

$$a = \sqrt[n-1]{n}$$

$$\left(\sqrt[n-1]{n}\right)^n = n\sqrt[n-1]{n}$$

$$0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0 + 0 + \ldots + 0$$

$$0 \cdot a_1 \times \ldots \times a_n = 0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\left(\sum a_i = 0\right)$$

איור 1: תרשים זרימה של התמודדות עם הבעיה

פתרונות רבים נחקרו במאמר של **נ.חורין** (חורין, 1998): אם אחד המספרים הוא **טבעי**, אז השני הוא מספר מעורב בין 1 ל– 2. אם נציב לאותה הנוסחה מספר **שלם שלילי**, המספר השני יהיה שבר חיובי אמיתי .

את הקשר בין a ל–b ניתן לבטא גם בצורה סימטרית:

$$(a-1) \cdot (b-1) = 1$$

ברור שאין דרך אחרת לפרק מספר 1 לגורמים שלמים פרט ל– 1x1 או (1-) x (1-). מכאן נובע שבין זוגות של **מספרים שלמים רק** הזוגות {0,0} ו–{2,2} מקיימים שוויון בין סכום ומכפלה. כדי למצוא קבוצות של שלושה, ארבעה, חמישה וכו' מספרים שלמים, שמקיימים את השוויון בין מכפלתם וסכומם, ניתן לרשום תנאי אלגברי פשוט, למשל,

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = a + b + c + d$$

ולחפש פתרונות שלמים בין כל האופציות.

אבל נחזור למקרה הפשוט ביותר של שני מספרים טבעיים. למה, בעצם, לא כל זוג מתאים לנו? קל לראות מניסוי אקראי שככלל, **מכפלתם של שני מספרים טבעיים גדולה יותר מסכומם** (למשל, $2 \cdot 4 > 2 + 4$).

סכום של שני מספרים טבעיים יהיה גדול יותר מהמכפלה, רק כאשר אחד מהמספרים שווה ל–1, מכיוון **שכפל ב–1 אינו משנה את המספר, ואילו הוספת 1 מגדילה את המספר.**

ננסה לחשוב על אותו זוג {2,4} שאינו מקיים את השוויון: כיצד אפשר "לתקן" אותו באמצעות הוספת מספרים נוספים, במטרה להגדיל את הסכום ולא לשנות את המכפלה כדי לקרב אותם? ראינו, כי צירוף המספר 1 לקבוצה אינו משנה את המכפלה, אבל מגדיל את הסכום. לפיכך, כאשר מוסיפים פעמיים 1 לקבוצה, ההפרש של 2 בין המכפלה (8) והסכום (6) "מנוטרל":

$$2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 2 + 4 + 1 + 1$$

כך התקבלה **השיטה** לקבלת פתרונות חדשים:

כל זוג מספרים טבעיים, שמכפלתם גדולה מסכומם ב– k אפשר להשלים בהוספה של k מספרי 1, ומכפלת האיברים של הקבוצה החדשה תשתווה לסכומם.

הזוג בעל ההפרש הקטן ביותר (אחד), הוא {2,3}, ולפי השיטה מגלים כי:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$$

ואולי אפשר להתחיל בבניית קבוצה לא רק מזוג, ולא רק ממספרים טבעיים? כיצד תעבוד השיטה?

מבט אחורה, מבט קדימה

נסכם את התוצאות שקבלנו (או התקרבנו אליהן):

- **פרט לזוגות {0,0} ו–{2,2} אין זוגות מספרים שלמים, שמכפלתם שווה לסכומם.**
- **יש אינסוף קבוצות מספרים זהים, שמכפלתם שווה לסכומם, אך הם אי–רציונלים, פרט ל–0 ו– 2.**
- **יש אינסוף זוגות של מספרים שונים a ו– b שמכפלתם שווה לסכומם (כאשר a-1 ו– b-1 הם מספרים הפכיים).**
- **יש אינסוף קבוצות מספרים שלמים ואין–סוף קבוצות מספרים טבעיים, שמכפלתם שווה לסכומם: כל קבוצת מספרים שלמים אפשר להשלים עד שמתקיים השוויון בין מכפלת איבריה וסכומם בשתי הדרכים:**
  הוספת מספרי 1 בכמות הנדרשת;
  נטרול הסכום במספר שנגדי לו והוספת המספר 0.

פרט לתוצאות שקבלנו במהלך החקר, נסכם בתרשים זרימה את הדרכים והכלים שהשתמשנו (או היינו יכולים להשתמש) בהם תוך כדי ההתמודדות עם המשימה. תרשים הזרימה המופיע באיור 1 מדגיש רב–כיווניות של תהליך החקר – וקל לראות שכל תוצאה מתקבלת יכולה לשמש כמקור לשאלות נוספות ולהתפתחות נוספת של המשימה.

ביבליוגרפיה

חורין, נ. (1998). חוקרים צעירים, **מספר חזק**, 17 , 35–37.

סיניצקי, א. (2000). בעיות פתוחות ואלגוריתמים לחשיבה, **כנס ארצי שני למנהיגות בהוראת מתמטיקה, תקצירים, 24.**

Silver, E. A. (1993). The nature and use of open-ended problems in mathematical education: mathematical and pedagogical perspectives, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 1823-1831.

Borasi, R.(1992). *Learning mathematics through inquiry.* Portsmouth, NH: Heinemann.