

במבט אחר

**התאמות בבית הספר היסודי!?  
סטודנטיות להוראה מטמיעות נושאים  
הקשורים למושג "התאמה"  
בשיעורי מתמטיקה בבית הספר היסודי**

ד"ר סבינץ גילה אוזרוסו-הגג  
הפקולטה הרב תחומית, החוג למתמטיקה  
המרכז האקדמי לוינסקי-וינגייט

פרופ' עטרה שריקי  
הפקולטה למדעים, החוג למתמטיקה  
מכללת סמינר הקיבוצים



## התאמות בבית הספר היסודי!? סטודנטיות להוראה מטמיעות נושאים הקשורים למושג "התאמה" בשיעורי מתמטיקה בבית הספר היסודי

סבינץ גילה אוזרוסו-הגג ועטרה שריקי

### תקציר

בתוכנית הלימודים של גן הילדים כלול עיסוק מפורש בנושאים הקשורים למושג "התאמה", ובפרט "התאמה חד-חד ערכית". בבית הספר העל-יסודי המושג "התאמה" נלמד בהקשר הרחב של המושג "פונקציה". אף כי בתוכנית הלימודים במתמטיקה בחינוך היסודי קיים מגוון רחב של נושאים שניתן לקשרם להתאמות כבסיס להוראת המושג "פונקציה", אין לכך כל ביטוי מפורש בתוכנית עצמה. במסגרת הקורס "פונקציות וגרפים" הנלמד באחת מהמכללות להכשרת מורים, נחשפו סטודנטיות המתמחות בהוראת מתמטיקה לבית הספר היסודי לדרכים שבהן ניתן לבצע קישורים בין נושאים מתוך תוכנית הלימודים לבין נושאים הקשורים להתאמות בכלל, ולהתאמות שהן פונקציה בפרט. הסטודנטיות התנסו בעיצוב פעילויות מתאימות, שילבו אותן בשיעורי המתמטיקה שהן מלמדות לפי תוכנית הלימודים, ובחנו באופן רפלקטיבי את הייתכנות של שילוב שוטף של פעילויות כאלה כחלק בלתי נפרד משיעוריהן. במאמר מוצגות דוגמאות לפעילויות שפותחו על ידהן, הרציונל שליווה את פיתוח הפעילויות, וכן מתוארות תובנות שהתפתחו אצל הסטודנטיות בעקבות ההתנסות.

### מילות מפתח

בית הספר היסודי; התאמות; פונקציות; פרחי הוראה; תוכנית הלימודים במתמטיקה.

### מבוא

תופעות רבות בטבע, בחברה, בכלכלה ובחיי היומיום באופן כללי משקפות שינוי כלשהו. חלק מתהליכי

השינוי הללו ניתן לבטא באמצעות מודל של פונקציות מתמטיות מסוגים שונים, וחלק אחר מצריך ניתוח מעמיק של הנתונים במטרה לזהות את מאפייני הקשר הקיים ביניהם. כדי להצליח בתיאור הקשרים הללו יש צורך בחשיבה פונקציונלית, כלומר - חשיבה על קשרים בין משתנים. חשיבה מסוג זה היא אחת מאבני היסוד של המתמטיקה, ולכן פיתוח חשיבה פונקציונלית נתפס כאחת מהמטרות המרכזיות של הוראת המתמטיקה במדינות רבות ברחבי העולם, ובכלל זה בישראל. אכן, בשני העשורים האחרונים התרחב העניין המחקרי בחשיבה פונקציונלית של ילדים צעירים.

במאמר זה נסקור מקצת מספרות המחקר העוסקת בערך של פיתוח חשיבה פונקציונלית, ונתאר בקצרה את ההתייחסות למושג "התאמה" כבסיס ללימוד המושג "פונקציה" בתוכנית הלימודים בישראל החל מגיל גן הילדים. בהמשך נציג דוגמאות לשש פעילויות בנושאים שונים הקשורים להתאמות כלליות ולהתאמות שהן פונקציות אשר פותחו על ידי סטודנטיות להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי במסגרת קורס "פונקציות וגרפים", שהוא חלק מתוכנית ההכשרה שלהן. לסיכום נביא רישומים מתוך הרפלקציות שערכו הסטודנטיות על התרומה של תכנון פעילות בנושא התאמות ושילובה בפועל בשיעורים המיועדים לתלמידים הלומדים בבית הספר היסודי. בנספח א ניתן למצוא הרחבה בנוגע למשמעות של התאמה, סוגים של התאמות, מושג הפונקציה וייצוגים של פונקציה.



## אלגברה מוקדמת וטיפוח חשיבה פונקציונלית

העיסוק בהכללה של רעיונות מתמטיים שמובילים לפיתוח חשיבה אלגברית והשימוש בייצוגים סימבוליים ובקשרים פונקציונליים היה שמור במשך שנים רבות ללימודי המתמטיקה בבית הספר העל-יסודי. בעשורים האחרונים התפתחה התפיסה שלפיה המתמטיקה שאותה נדרשים כיום תלמידים צעירים להבין חורגת אל מעבר לידע אריתמטי וחשובי, ולפיכך יש ללמד אלגברה כבר בבית הספר היסודי באופן אשר יכשיר את הקרקע ללימודי האלגברה בבית הספר העל-יסודי (למשל, Blanton & Kaput, 2000; NCTM, 2011). מכאן נגזר הערך המיוחס לזימון התנסויות שתסייענה לתלמידי בתי הספר היסודיים לזהות מבנים וקשרים מתמטיים, כמו גם לטפח את היכולת של התלמידים לנסח את הקשרים ולהשתמש בהם באופן המעיד על תובנות מתמטיות. בתוך כך, אחת המטרות המרכזיות של החינוך המתמטי היא להעמיק את ההבנה של התלמידים על אודות מבנים מתמטיים והכללות מתמטיות, ולא להסתפק בביצוע חישובים. סוג כזה של התנסות מקובל לכות בשם "אלגברה מוקדמת" - אלגברה המשלבת בין נושאים וקשרים הנלמדים באופן מסורתי בבית הספר היסודי מלווה בהצגה הדרגתית של הסימון האלגברי (Carragher, Schliemann, & Schwartz, 2008). קיימת הסכמה רחבה בקרב אנשי חינוך מתמטי בנוגע לכך שלמידה של אלגברה מוקדמת מבטיחה הצלחה רבה יותר בלימודי המתמטיקה בבית הספר העל-יסודי (למשל, Blanton & Kaput, 2011).

אחת מהדרכים המרכזיות לשילוב אלגברה מוקדמת בבית הספר היסודי היא באמצעות טיפוח "**חשיבה פונקציונלית**". נכון להיום אין הסכמה בנוגע להגדרה של חשיבה פונקציונלית, ובאופן כללי מקובל להתייחס לכך כאל תהליך של תיאור ובנייה של פונקציות והסקת מסקנות בנוגע אליהן (Pittalis, Pitta-Pantazi & Christou, 2020). בחטיבת הביניים

ההתייחסות למושג הפונקציה היא בעיקר בהקשר של פעולות, ובתוך כך פיתוח חשיבה המאפשרת לתלמידים לבטא ולנמק את האופן שבו שתי כמויות משתנות אחת ביחס לשנייה (Smith, 2008). לצורך זה תלמידים נדרשים להבין את המשמעות של תבניות, יחסים ופונקציות; לדעת להשתמש בייצוגים מוחשיים, חזותיים ומילוליים כדי לנתח סיטואציות; להיות מסוגלים ליצור קשרים בין אובייקטים באמצעות זיהוי התכונות שלהם, לנתח השתנות בהקשרים שונים, לייצג ולנתח מצבים ומבנים מתמטיים מתוך שימוש בסמלים אלגבריים, ולהשתמש במודלים מתמטיים לצורך ייצוג של יחסים כמותיים (NCTM, 2000; Pincheira & Alsina, 2021). נציין כי מספרות המחקר עולה שלתלמידי בית הספר היסודי יש יכולת להבין קשרים פונקציונליים בין משתנים, לזהות חוקים ותבניות ולהשתמש בהם כדי לנבא ערכים חדשים, ולנסח באופן מילולי חוקים מוכללים (Carragher, Martinez, & Schliemann, 2008). לפיכך, קיימת חשיבות לטיפוח חשיבה פונקציונלית כבר בכיתות הנמוכות של בית הספר היסודי, כמו גם לפיתוח המודעות של מורים למשמעות שיש לכך ולמאפייני התנסויות שעליהם לזמן לתלמידיהם לצורך זה (Blanton & Kaput, 2011).

### נושאים הקשורים לחשיבה פונקציונלית (התאמות ופונקציות) בתוכנית הלימודים במתמטיקה, מהחינוך הטרם-יסודי ועד לחטיבה העליונה

סקירה של תוכניות הלימודים במתמטיקה מצביעה על כך שלחשיבה הפונקציונלית יש מקום מפורש בחינוך הקדם-יסודי ולאחר מכן בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה. בתוכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי אין אזכור מפורש לנושאים הקשורים לפונקציות בכלל, ולהתאמות בפרט.

בחינוך הקדם-יסודי המושג "התאמות" מוזכר באופן מפורש בהקשר של התאמה חד-חד-ערכית, מושג מתמטי הנחשב למורכב. בהתאם לתוכנית (משרד



הוראת המושג **פונקציה** נעשית באמצעות תיאור תהליכים בעזרת ייצוגים שונים: ייצוג מילולי (סיפור), ייצוג מספרי (טבלה), ייצוג אלגברי (ביטויים) וייצוג חזותי (גרפים). בחטיבת הביניים העיסוק בפונקציות הוא מרכזי ובולט, ולמעשה בכל אחת מכיתות חטיבת הביניים כשליש מהשעות המוקצבות ללימודי אלגברה מוקדשות להוראת הפונקציות. הנושאים המרכזיים שנלמדים הם: הבנה אינטואיטיבית של פונקציה כמתארת תהליכים של שינוי וככלי המאפשר פתרון בעיות שונות; הייצוגים של פונקציות (מילולי, מספרי, אלגברי, גרפי); תכונות של פונקציות (עלייה וירידה, חייביות ושלימות, נקודות אפס). **בחטיבה העליונה** מושג הפונקציה בא לידי ביטוי באופן נרחב כחלק מלימודי ההנדסה האנליטית והאנליזה.

### הצורך ביצירת רצף למידה

באפריל 2012 פרסמה מפמ"ת המתמטיקה דאז מסמך שכותרתו "רצף במתמטיקה מכיתה ו' לכיתה ז'" (משרד החינוך, 2012). המסמך מדגיש את חשיבות השמירה על הרצף במעבר בין גן הילדים לבית הספר היסודי, וממנו לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה. המסמך מתייחס לכך שתלמידים נדרשים להסתגל למעבר בין מסגרות שונות במשך שנות לימודיהם, הן מבחינת תכנים ומידת ההעמקה בהם, והן מבחינת דרכי הוראת המתמטיקה המותאמות ליכולות הקוגניטיביות בגילים השונים. המסמך מציין כי "מתפקידם של המורים בכל המסגרות ליצור עבור התלמיד 'גשרים' יציבים ובטוחים בשלבי המעבר ממסגרת למסגרת, כך שיבטיחו רציפות בלמידה, ביטחון ושימוש בידע הקודם שנרכש." (שם, עמוד 2). במעבר מכיתה ו' לכיתה ז' מושם דגש על הצורך בהוראה מעגלית אשר תתרום לחיזוק הקישוריות בין הנושאים המתמטיים השונים, ובתוך כך העמקה והרחבה של הנושאים שנלמדו. עם זאת, מורים מחויבים להיצמד לתוכנית הלימודים של כיתה ו', ואינם רשאים להוסיף תכנים מתוך תוכנית הלימודים של חטיבת הביניים.

**החינוך, 2010**), ילדי גן הילדים בגיל 3-6 מתנסים באופן חווייתי בהתאמות בין איברי קבוצות במטרה להשוות או להתאים בין האיברים (לדוגמה, עריכת שולחן או חלוקת כלי נגינה). אף כי המושג **התאמות** מופיע בתוכנית הלימודים לחינוך הקדם-יסודי, הילדים אינם אמורים להשתמש במושג עצמו אלא רק לבצע את הפעילויות המתאימות.

בתוכנית הלימודים במתמטיקה **לבית הספר היסודי (משרד החינוך, 2006)**, המושג "התאמה" או מושגים אחרים שקשורים למושג "פונקציה" אינם מוזכרים באופן מפורש. עם זאת, באופן עקיף ניתן לזהות בתוכנית מושגים שיש להם שימוש בהקשר של פונקציות בחטיבת הביניים, ובפרט ייצוג וניתוח מידע בתחום חקר נתונים. בתחום המספרי ניתן לראות מאפיינים של התאמות. לדוגמה, התאמה בין מספרים לבין מקומם על ישר (ציר) המספרים; המחשבות של פעולת הכפל והחילוק; התאמה בין מספרים ושברים לבין הייצוגים החזותיים שלהם וכן התאמה בין שמות שונים של שברים שהתקבלו בעקבות פעולה של הרחבה או צמצום של שברים או שמות שונים של שברים המופיעים בייצוגים שונים. בתחום הגיאומטרי פעילויות כגון שיום גופים וצורות גיאומטריות או התאמתם לתמונות ולצילומים שלהם יכולים להתפרש כהתאמה, כמו גם התאמה בין גוף לבין פריסתו, יחסי ההכלה בגיאומטריה, ועוד. מובן שלא בכל מקרה מדובר בהתאמות שהן פונקציות. לדוגמה, לשבר "חצי" ניתן להתאים אינספור שמות שונים, ובאופן דומה לכל נקודה על ישר המספרים ניתן להתאים אינספור שמות שונים למספרים המשויכים לאותה הנקודה. לעומת זאת, לכל מספר מותאם "מקום" אחד ויחיד על ציר המספרים, ובמקרה זה אכן מדובר בפונקציה.

בתוכנית הלימודים תש"ן **לחטיבת הביניים** נלמד המושג התאמות כהכנה להוראת פונקציות, אולם בתוכנית הלימודים החדשה **(משרד החינוך, 2008)** הושמט נושא ההתאמות לחלוטין. בתוכנית זאת



היכולת של הסטודנטיות לעצב חומרי למידה תואמי גיל בנושאים הקשורים להתאמות, כבסיס לקידום החשיבה הפונקציונלית של תלמידים. הסטודנטיות התנסו בשילוב הפעילויות במתכונת של שיעור בודד, או שיעור כפול באחת מהכיתות שהן מלמדות בהן, תיעדו את ההפעלה בכיתה וסיכמו את התהליך באופן רפלקטיבי. נעיר שמכיוון שמדובר בהתנסות חד-פעמית, הסטודנטיות לא עסקו במעקב אחר התפתחות החשיבה הפונקציונלית, אלא התמקדו בפיתוח פעילויות הקשורות למושג "התאמה" ובשילובן בשיעור מתמטיקה.

### דוגמאות לפעילויות בנושא התאמות בכלל, ופונקציות בפרט

הסטודנטיות פיתחו פעילויות ביחידים, בזוגות או בשלשות. באירורים 1-6 ניתן לראות תמונות המתעדות שש פעילויות שבהן התנסו תלמידים בשכבות הגיל השונות, וכן מקצת מהשיקולים של הסטודנטיות בבחירת נושא הפעילות. המונחים שבהם השתמשו הסטודנטיות בהקשר להתאמות וייצוגים מפורטים בנספח א.

#### איור 1.

כיתה א. התאמה בין מספר איברים בקבוצה לבין סמל המספר



לנוכח החשיבות המיוחסת ליצירת רצף למידה בין בית הספר היסודי לחטיבת הביניים, ולאור הערך של טיפוח חשיבה פונקציונלית אצל תלמידי בית הספר היסודי כחלק מההכנה שלהם ללימודי המתמטיקה בבית הספר העל-יסודי, חיוני לדעתנו לחשוף את המורים לעתיד לסוגיות הנוגעות לכך עוד בשלב ההכשרה שלהם. לאור זאת, בקורס "פונקציות וגרפים" המתקיים באחת מהמכללות להכשרת מורים במרכז הארץ, אחד מהמוקדים הוא האופן שבו ניתן לשלב בשיעורי המתמטיקה בבית הספר היסודי נושאים שונים הנוגעים לפונקציות ולגרפים. יצוין שנושאים אלה אינם חלק מתוכנית הלימודים בבית הספר היסודי, ושילובם בתוך רצף ההוראה של המתמטיקה נעשה לאחר התאמת לתוכנית.

הקורס "פונקציות וגרפים" נועד לבסס את ההבנה בנוגע למשמעות של התאמה בכלל, והתאמה שהיא פונקציה בפרט, ולהעמיק את ההיכרות של סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי עם הפונקציה הקווית והפונקציה הריבועית, ובתוך כך עיסוק בייצוגים שונים ובשימושים של הפונקציות במתמטיקה ובחיי היום-יום. בקשר למושג הפונקציה מודגשים נושאים כגון: קבוצה (אוסף של איברים), סוגים של קבוצות (סופיות, אינסופיות, הקבוצה הריקה), תחום, טווח, התאמה (בין איברים מקבוצת התחום לבין איברים מקבוצת הטווח), מקור, קבוצת מקורות, תמונה, קבוצת תמונות, התאמה חד-ערכית (פונקציה), פונקציה חד-חד-ערכית, פונקציית-על, ופונקציה שהיא חד-חד-ערכית ועל. נוסף לכך, מוצגות דרכים שונות לתיאור ולייצוג התאמה שהיא פונקציה והתאמה שאיננה פונקציה, כגון: ייצוג מילולי, דיאגרמת חיצים, טבלת ערכים, ביטוי אלגברי וגרף.

במאמר הנוכחי נציג מבחר פעילויות העוסקות בהתאמות אשר פותחו על ידי סטודנטיות שהשתתפו בקורס "פונקציות וגרפים". 41 סטודנטיות הלומדות בשנים א'-ד' של הכשרתן השתתפו בקורס בשתי קבוצות מקבילות. פיתוח הפעילויות נועד לטפח את

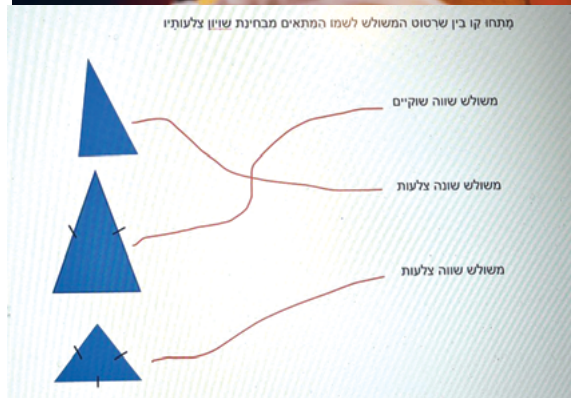
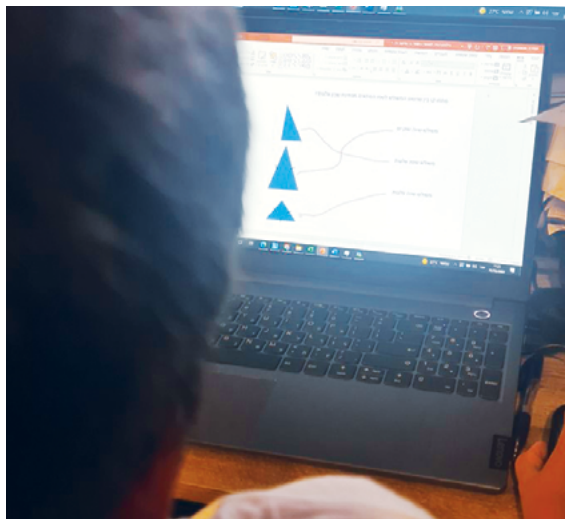




נצייר על הלוח שתי קבוצות - אחת עם חפצים (למשל, מטריה, מטקות) או אירועים (למשל, ערפל, החופש הגדול) וקבוצה שנייה שבה נרשום קיץ, חורף. נתחיל בשתי עונות כדי שיבינו את הרעיון ולא יסתבכו עם סתיו ואביב. נסביר להם את ההבדל בין תחום לטווח, ונבקש מהם להתאים בין איברים בקבוצת התחום (החפצים והאירועים) לבין איברים בקבוצת טווח (קיץ, חורף). אחר כך נסביר להם מה זאת התאמה חד-ערכית ומה זאת התאמה חד-חד-ערכית, ונבקש מהם להפוך את ההתאמה הזאת לחד-חד-ערכית. אחרי שנדון איתם ניתן להם להמציא סוגים שונים של התאמות, וגם כאלה שקשורות לחשבון והנדסה". (א', ר')

### איור 3.

כיתה ג. התאמה בין משולשים לבין תכונותיהם

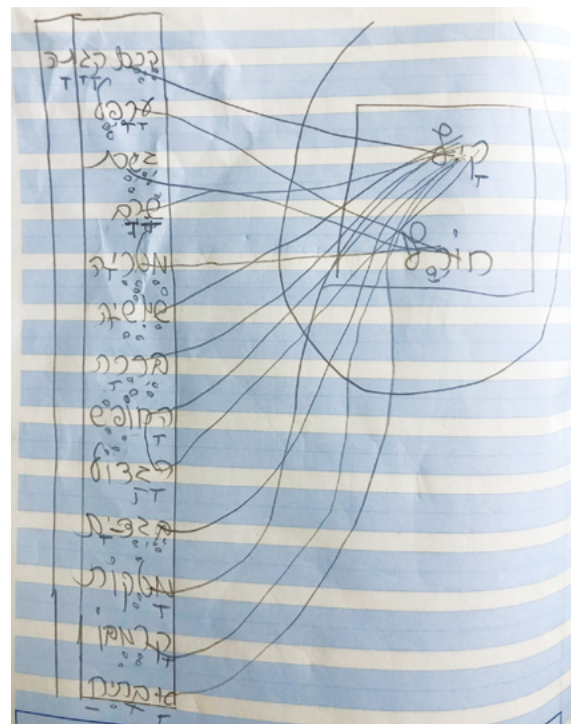


### שיקולים בבחירת נושא הפעילות:

"תחילה עברנו על תוכנית הלימודים של כיתה א', וראינו שניתן לקשר חלק מהנושאים בתוכנית לנושאים שנלמדו בקורס. לאור שלב הלמידה שבו היו התלמידים, בחרנו לפתח פעילות שעוסקת בהתאמה חד-חד-ערכית בין מספר איברים בקבוצה כלשהי (קופים, פרפרים, דגים, דובים) לבין סמל המספר שמייצג את מספר האיברים. זה דורש מהתלמידים קודם-כול למיין את התמונות לקבוצות, ולאחר מכן למנות את מספר האיברים בכל קבוצה. אפשר להרחיב את הפעילות הזאת גם להתאמה שהיא לא חד-חד-ערכית, אם נציג בפני התלמידים גם קבוצות שונות שיש בהן אותו מספר של איברים". (ע', נ', א')

### איור 2.

כיתה ב. התאמה בין עצמים ואירועים לבין עונות השנה



### שיקולים בבחירת נושא הפעילות:

"מאוד אהבנו את הרעיון של דיאגרמת חיצים. זה נראה לנו מוחשי יחסית לייצוגים האחרים, וחשבנו שיתאים לתלמידי כיתה ב'. הם בדיוק למדו על עונות השנה, אז

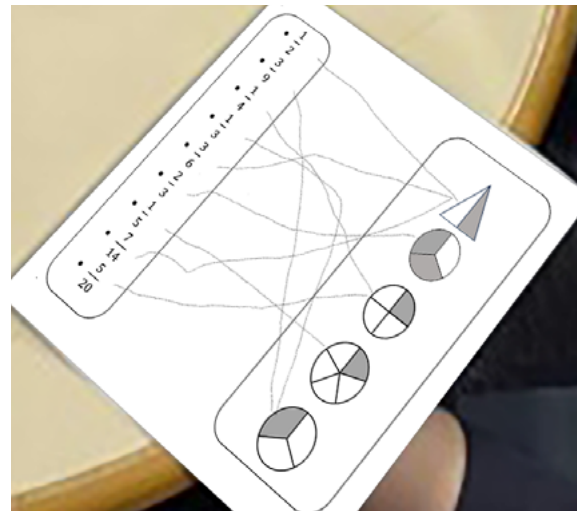


**שיקולים בבחירת נושא הפעילות:**

"את הנושא של תכונות של משולשים נלמד דרך התאמות. בשיעור הזה נלמד רק את הנושא של מיון משולשים לפי צלעות. נתחיל מהתאמה שהיא חד-חד-ערכית. כלומר, לכל סוג של משולש נצייר רק משולש אחד. אחר כך נציג מכל סוג כמה משולשים, ושוב נבקש מהם להתאים. נדבר איתם על ההבדל בין שני הסוגים של ההתאמות. במקרה השני, יש הבדל בין להתאים לכל משולש את הסוג שלו (שזאת פונקציה), לבין להתאים לכל סוג את הציור של המשולש (שזאת לא פונקציה), אבל לא נראה לנו שכדאי לדבר על זה כי זה מסובך מדי. מספיק לדבר באופן כללי על ההבדל בין שתי ההתאמות." (ה', ק', י')

**איור 4.**

כיתה ד. התאמה בין ייצוגים של שברים

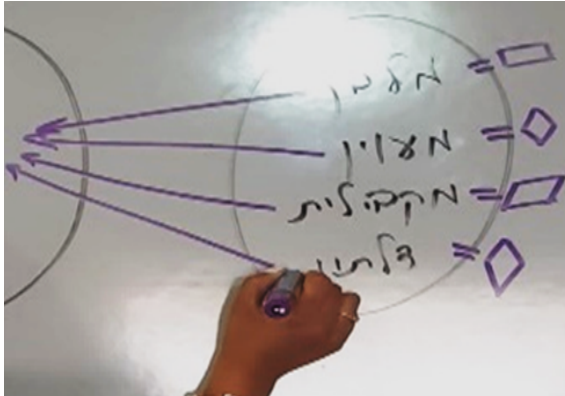


**שיקולים בבחירת נושא הפעילות:**

"הנושא שבו תתמקד הפעילות שאותה תכננו הוא התאמות בין מקורות לבין תמונות. הכיתה כעת מסכמת את למידת נושא השברים ואת משמעות השבר ושמותיו השונים. לכן בחרנו את נושא השברים, ונסכם אותו בעזרת דיאגרמת חיצים. ככה התלמידים יוכלו להפיק את המרב משני העולמות, וזה הראה לנו שניתן לשלב ולמזג בין תחומים ונושאים שונים מאותו תחום דעת שלא נלמדים ביחד." (י', מ', ע')

**איור 5.**

כיתה ה. קשרי הכלה במשפחת המרובעים

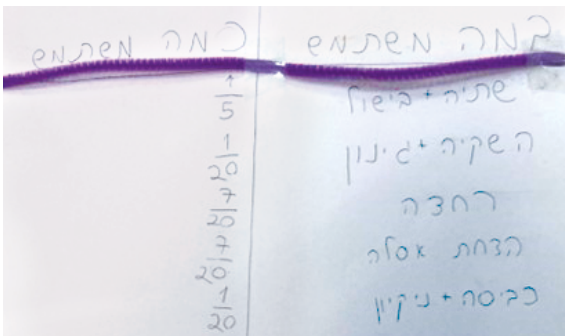


**שיקולים בבחירת נושא הפעילות:**

"בתוכנית הלימודים של משרד החינוך החל מכיתה ג' התלמידים מתחילים להכיר את משפחת המרובעים, ובכיתה ה' מתייחסים יותר לתכונות המרובעים וליחסי ההכלה. התלמידים סיימו עכשיו את הנושא, ולכן ראינו לנכון לבצע את פעילות הסיכום בנושא משפחת המרובעים עם קישור לנושא ההתאמה שלמדנו בקורס "פונקציות וגרפים". נתחיל מהתאמה פשוטה בין שם המרובע לבין הצורה שלו. נסביר לתלמידים מה זאת דיאגרמת חיצים, וניתן להם לעשות את ההתאמה מהשם לצורה. אחר כך נרחיב את זה מהצורה לשם. ככה, למשל, מריבוע הם יוכלו לעשות חץ למלבן, למעוין, ולמקבילית. נדבר על ההבדל בין שתי הדיאגרמות." (ט', ש', ח')

**איור 6.**

כיתה ו. חקר נתונים





במסגרת הקורס הבנתי סוף סוף את המשמעות של פונקציה ואת ההבדל בין סוגים שונים של פונקציות ובין פונקציה לבין התאמה. אבל רק כאשר תכננתי את הפעילות וחיפשתי את ההקשר של הדברים לידע של התלמידים הבנתי לגמרי את המשמעות של תחום וטווח, ואת ההבדל בין זה לבין קבוצת מקורות וקבוצת תמונות”;

”אם בעבר, מבחינתי, פונקציות היו משהו שקשור לתרגול חסר משמעות ולמבחן, בזכות הפעילות שתכננתי הצלחתי לראות קצת מעבר, ואיך זה יכול להתקשר לכל נושא בחיים. הקישור לחיי היום-יום עזר לי להפנים את המשמעות של התאמה בין שתי קבוצות ואת הרעיון של כלל התאמה שמאפיין פונקציה ולא פונקציה, וגם להבין שלא כל פונקציה זה בהכרח משהו שקשור לנוסחה”.

### תרומת ההתנסות להתפתחות ידע פדגוגי-תוכני

כל הסטודנטיות ציינו בדרך זאת או אחרת את התרומה של תכנון הפעילות, התאמתה לידע התלמידים, ושילוב הפעילות בכיתה להתפתחותו של ידע פדגוגי-תוכני (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Shulman, 1987): “אני כבר שנה במערכת החינוך, אבל מההתנסות הזאת הבנתי שאפשר לשלב כל נושא שאנחנו רק רוצים בכל גיל, וכל מה שאנחנו צריכים לעשות זה להתאים את חלקי הנושא לידע של התלמידים”;

”בניגוד למה שחשבתי, הבנתי שבכל גיל אפשר ללמד תלמידים נושאים כמו מושג הפונקציה, שלכאורה נתפסים כמורכבים ושאין מתאימים לבית הספר היסודי. יחד עם זאת, צריכים להתקיים שני תנאים: צריך לפרק את הנושא לאבני יסוד, וצריך להתאים אותו לעולמם של התלמידים”;

”כשמבינים לעומק את המשמעות של פונקציה, פתאום רואים שבעצם אפשר לקשר את זה לכל כך הרבה נושאים בתוכנית הלימודים. אנחנו קישרנו את זה לנושא השברים, ומצאנו שהקישור שעשינו גרם לתלמידים להבין את שמות השברים בדרך טובה יותר”.

### שיקולים בבחירת נושא הפעילות:

”התלבטנו רבות באיזה נושא לעשות את הפעילות בשיעור, ובאילו תכנים להשתמש. היה לנו חשוב להשתמש בנושא מחיי היום-יום של התלמידים, ולאחר התייעצות עם המורה בחרנו בנושא של חיסכון במים. נבקש מהתלמידים לאסוף נתונים על הסוגים השונים של שימוש במים, ועל כמות המים בליטרים שמשמשת לכל סוג. לאחר מכן נחשב את ממוצע כמות המים בליטרים שהם מצאו עבור כל אחד מסוגי השימוש. ככה נדבר גם על ממוצע. לבסוף, נחשב את הכמות היחסית הממוצעת של המים עבור כל אחד מסוגי השימוש. סוג השימוש יהיה התחום, והכמות היחסית של המים תהיה הטווח. נראה את ההתאמה גם בדיאגרמת חיצים וגם בדיאגרמת מקלות, ונדבר על ההבדל בין שני הייצוגים”.

### תובנות שהתפתחו אצל הסטודנטיות בעקבות ההתנסות

כאמור, הסטודנטיות התבקשו לתעד את ההפעלה בכיתה, ולסכם את התהליך באופן רפלקטיבי. להלן יוצגו רישומים מתוך הרפלקציות שערכו הסטודנטיות על התרומה של תכנון פעילויות בנושאים הקשורים להתאמות ולהוראתן בפועל. מתוך הרפלקציות עולה שהתובנות העיקריות אשר התפתחו בעקבות תכנון הפעילות והתאמתה לתלמידים, נגעו לתרומת התהליך להתפתחות הידע המתמטי של הסטודנטיות בנושא ההתאמות או הפונקציות, להתפתחות הידע פדגוגי-תוכני שלהן ולהתפתחות הידע שלהן על תלמידים. שילוב הפעילות בפועל בכיתה העמיק גם את התובנות שלהן על אודות תהליכי למידה.

### תרומת ההתנסות להתפתחות הידע בנושא התאמות ופונקציות

מבין 41 הסטודנטיות תשע ציינו שעצם תכנון הפעילות לתלמידים חיזק את הידע המתמטי שלהן בנושא התאמות ופונקציות:

”כאשר היינו בחטיבת הביניים למדנו על פונקציה ברמה שטחית, ולא הבנו בכלל את הרציונל ללימוד הנושא.





דל, והם עדיין לא רכשו את יכולות הכתיבה והקריאה במלואן".

## סיכום

חשיבה פונקציונלית מסייעת בהבנה ובתיאור של קשרים בתופעות רבות בטבע, בחברה, בכלכלה ובחיי היום-יום. הפיתוח של חשיבה פונקציונלית נתפס כיום כאחת מהמטרות המרכזיות של הוראת המתמטיקה במדינות רבות ברחבי העולם, ובכלל זה בישראל. לאור זאת, אנשי חינוך מתמטי מייחסים חשיבות לטיפוח חשיבה זו כבר בבית הספר היסודי, באופן אשר ישיר את הקרקע ללימודי האלגברה בבית הספר העל-יסודי (למשל, Blanton & Kaput, 2011). המסמך שפרסמה המפמר"ית למתמטיקה בשנת 2012 הדגיש את הערך של שמירה על רצף הלמידה מבחינת התכנים המתמטיים במעבר מגן הילדים לבית הספר היסודי, וממנו לחטיבת הביניים ולחטיבה העליונה. סקירה של תוכניות הלימודים במתמטיקה בישראל העלתה כי לחשיבה הפונקציונלית לא הוקדש מקום מפורש בחינוך היסודי. לאור האמור לעיל, ולנוכח העובדה שבתוכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי ישנו מגוון רחב של נושאים שיש להם קשר ישיר להתאמות ולפונקציות, נראה לנו אך טבעי לנצל את ההזדמנות ליצור קשרים בין הנושאים הללו לבין מושגים הנוגעים להתאמות ולפונקציות אשר נלמדו בקורס בנושא "פונקציות וגרפים" במסלול להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי במכללה להכשרת מורים.

במאמר הנוכחי תיארו את ההתנסות של סטודנטיות להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי בתכנון פעילות העוסקת בהתאמות ו/או בפונקציות, תכנים מתמטיים שאינם כלולים בתוכנית הלימודים של בית הספר היסודי, ושילובה בשיעורי מתמטיקה על ידי שילוב לא שגרתי שנועד לטפח את התובנות המתמטיות של התלמידים. במאמר הוצגו שש פעילויות בנושאים שונים הנוגעים להתאמות, בליווי השיקולים שתוארו על ידי הסטודנטיות

ובהתייחסות נוספת נכתב:

"אנחנו הרי כל הזמן אומרים בכיתה: 'התאמה', 'התאמתנו' 'התאימו'. אז למה לא לקשר את זה להתאמות ולפונקציות? פתאום זה נראה לי הכי טבעי".

## תרומת ההתנסות להתפתחות ידע על תלמידים

שלוש-עשרה סטודנטיות התייחסו לכך שההתנסות בפעילות תרמה להתפתחות החשיבה הפונקציונלית של התלמידים. בדומה לפינצ'ירה ואלסינה (Pincheira & Alsina, 2021), חלק מהסטודנטיות ציינו את תחושותיהן:

"למרות שזאת הייתה פעילות אחת, כבר ראיתי שהם מתחילים לפתח חשיבה פונקציונלית, ובמיוחד בהקשר ליכולת שלהם לזהות את התכונות של האיברים בכל קבוצה ואת הקשרים ביניהם"; "הרגשתי ששיעור מהסוג הזה מפתח את היכולת של תלמידים לחשוב באופן מתמטי אמיתי, וזה מכין אותם לחטיבה ולהתמודדות עם נושאים שיכולים להיראות קשים ואפילו מפחידים. לכן חשוב להמשיך עם שיעורים מהסוג הזה, ולעזור לתלמידים להגיע מוכנים יותר לחטיבת הביניים".

שמונה סטודנטיות ציינו את החשיבות של האמונה שלהן בתלמידים:

"בחיים לא הייתי חושבת ללמד ילדים בכיתה ג' את הנושא של התאמות. אבל הפעילות הזאת הראתה לי עד כמה חשוב להאמין ביכולת של תלמידים, ולא לפסול מראש כלום. למדתי להאמין בתלמידים שלי, ולמדתי שצריך רק להקשיב להם ולתת להם מקום להתבטא".

לסיום, נעיר שזוג סטודנטיות שפיתחו פעילות עבור תלמידי כיתה ב הביעו הסתייגות מהאפשרות ללמד בגיל זה נושאים הקשורים למושג הפונקציה: "כשקיבלנו את המטלה היו לנו התלבטויות רבות אך נוכל להתאים את הנושא לתלמידי כיתה ב. במבט לאחור אנו חושבות שנושא זה אינו מתאים עבור הלומדים הצעירים, משום שאוצר המילים שלהם



בחינוך מתמטי תמונות שצולמו בשיעורים שלימדו, ולשתף בתובנות שהתפתחו אצלן בעקבות ההוראה של שיעורים אלה.

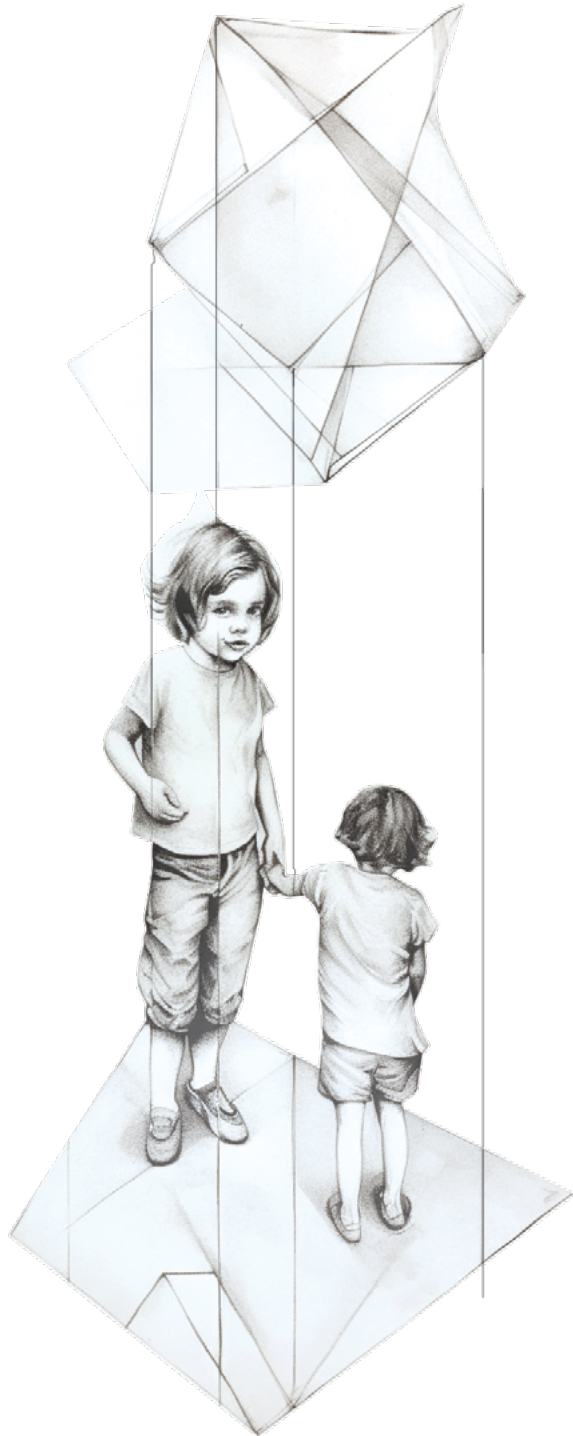
## רשימת מקורות

- משרד החינוך (2008). [תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ז-ט](#).
- משרד החינוך (2010). [תוכנית לימודים לגן הילדים בחינוך הממלכתי והממלכתי דתי](#).
- משרד החינוך (2006). [תוכנית הלימודים במתמטיקה א-ו בכל המגזרים](#).
- משרד החינוך (2012). המזכירות הפדגוגית - אגף מדעים. הפיקוח על המתמטיקה. רצף במתמטיקה מכיתה ו' לכיתה ז'.
- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, E. Knuth (eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education*, pp. 5-23. Springer.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40(3), 3-22.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput., D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, pp. 235-272. Lawrence Erlbaum.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

ברציונל לתכנון הפעילות. זאת ועוד, הוצגו רישומים מתוך הרפלקציות שערכו הסטודנטיות בעקבות ההתנסות בפיתוח הפעילויות ובשילובן בהוראה בכיתות. נראה שעצם תכנון הפעילות לתלמידים חיזק את הידע המתמטי של הסטודנטיות בנושא התאמות ופונקציות, וזימן להן את האפשרות לזהות את הקשרים בין פונקציות והתאמות לבין תוכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי ולחיי היום-יום של התלמידים. התהליך של התאמת נושאים להוראה בכיתה, כמו גם שילוב הפעילויות בכיתה, נתפסו על ידי הסטודנטיות כבעלי תרומה להתפתחותו של ידע פדגוגי-תוכני וידע על תלמידים. סטודנטיות ציינו גם את התפתחות התובנות שלהן עצמן בנוגע לחשיבות של האמונה ביכולתם של תלמידים צעירים ללמוד נושאים הקשורים להתאמות ולפונקציות. כשליש מהסטודנטיות הדגישו שלתחושתן התנסות התלמידים תרמה להתפתחות החשיבה הפונקציונלית שלהם, וכי לדעתן חיוני להתמיד בשילוב פעילויות מסוג זה כדי לסייע לתלמידים להגיע מוכנים טוב יותר לחטיבת הביניים. נציין שמדובר בתחושה בלבד, שכן לא ננקטו מהלכים של מדידות אובייקטיביות כלשהן. עם זאת, היו גם קולות מתנגדים: שתי סטודנטיות הביעו ספק בנוגע לאפשרות להתאים את הנושא לתלמידי כיתות ב בשל היעדר כישורים שפתיים מספקים.

לסיכום, הפעילויות שפותחו על ידי הסטודנטיות בקורס "פונקציות וגרפים" מעידות על היכולת של מתכשרים להוראה לעצב פעילויות תואמות גיל בנושא שאיננו חלק מתוכנית הלימודים. אנו סבורות שיש לעודד מורים המלמדים מתמטיקה בבית הספר היסודי להתייחס באופן מפורש לנושאים הקשורים להתאמות ולפונקציות, וכן לבחון באופן מחקרי את התפתחות החשיבה הפונקציונלית של תלמידים בעקבות התנסותם בפעילויות מסוג זה.

ולסיום, ברצוננו להביע תודה לסטודנטיות שלמדו בקורס "פונקציות וגרפים" על הפעילויות היצירתיות שתכננו, על נכונותן לחלוק עם קהיליית העוסקים



- Pincheira, N., & Alsina, Á. (2021). Teachers' mathematics knowledge for teaching early algebra: A systematic review from the MKT perspective. *Mathematics*, 9, 2590, 1-16.
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631–674.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carragher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. 133–163. Lawrence Erlbaum.



## נספח א

# התאמות ופונקציות - הגדרות ודוגמאות

### מקורות ותמונות

איבר השייך לקבוצת התחום שיש לו איבר (אחד או יותר) מותאם בקבוצת הטווח, נקרא "מקור". איבר בקבוצת הטווח המותאם לאיבר כלשהו (אחד או יותר) מקבוצת התחום, נקרא "תמונה". מכאן נובע שקבוצת המקורות מוכלת בקבוצת התחום, וקבוצת התמונות מוכלת בקבוצת הטווח, אולם ייתכן גם שכל איברי התחום יהיו מקורות, וכל איברי הטווח יהיו תמונות.

#### דוגמאות:

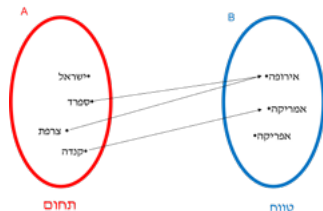
5. בדוגמה 3, האיבר "ישראל" לא היה שייך לקבוצת המקורות, אלא רק לקבוצת התחום.
6. בדוגמה 4, האיבר "אירופה" לא היה שייך לקבוצת התמונות, אלא רק לקבוצת הטווח.
7. בדוגמה 2, כל איברי קבוצת התחום הם גם מקורות, וכל איברי קבוצת הטווח הם גם תמונות.

### ייצוגים של התאמות

התאמה בין איברים בקבוצת התחום לבין איברים בקבוצת הטווח ניתנת לתיאור במגוון ייצוגים. ביניהם: דיאגרמת חיצים, טבלה, תבנית אלגברית וגרף. הבחירה בדרך ההולמת לייצוג ההתאמה תלויה במאפייניה.

#### דוגמאות:

8. ייצוג התאמה באמצעות דיאגרמת חיצים:  
בדוגמה זאת קבוצת התחום כוללת את ישראל, ספרד, צרפת וקנדה, וקבוצת הטווח כוללת את אירופה, אמריקה ואפריקה. כלל ההתאמה הוא: לכל מדינה מותאמת היבשת שבה היא נמצאת. קבוצת המקורות כוללת את ספרד, צרפת וקנדה. וקבוצת התמונות כוללת את אירופה ואמריקה.



### התאמה

במתמטיקה המשמעות של "התאמה" היא התאמה בין איברים משתי קבוצות באמצעות כלל התאמה (או חוק) כלשהו. כאשר מתאימים לאיבריה של קבוצה A איברים מקבוצה B, הקבוצה A נקראת "קבוצת התחום" והקבוצה B נקראת "קבוצת הטווח".

#### דוגמאות:

1. נתונות שתי קבוצות A ו-B. איבריה של הקבוצה A הם תושבי מדינת ישראל, ואיברי הקבוצה B הם מספרי תעודות הזהות של תושבי מדינת ישראל. כלל ההתאמה: לכל תושב המדינה נתאים את מספר תעודת הזהות שלו. במקרה זה A היא קבוצת התחום ו-B היא קבוצת הטווח.
2. נתונות שתי קבוצות C ו-D. איבריה של הקבוצה C הם כל מדינות העולם, ואיבריה של הקבוצה D הם כל יבשות העולם. כלל ההתאמה: לכל מדינה נתאים את היבשת שבה היא נמצאת. במקרה זה C היא קבוצת התחום ו-D היא קבוצת הטווח.

לפעמים אי אפשר להתאים לאיבר השייך לקבוצת התחום את האיבר המתאים לו בקבוצת הטווח ולהפך, לפעמים אי אפשר למצוא לאיבר השייך לקבוצת הטווח איבר המותאם לו מקבוצת התחום.

#### דוגמאות:

3. אם בדוגמה 2 האיבר "אסיה" לא היה כלול בקבוצת הטווח D (כלומר, איברי קבוצה D הם כל יבשות העולם למעט אסיה), לכל איבר שבקבוצת התחום C שהוא מדינה באסיה (למשל, ישראל), לא היינו מוצאים איבר מתאים בקבוצת הטווח D. באופן דומה, אם קבוצת התחום C הייתה כוללת את כל מדינות העולם למעט המדינות ששייכות ליבשת אירופה, הרי שבמקרה כזה לאיבר "אירופה" שבקבוצת הטווח D לא היו איברים מותאמים מקבוצת התחום C.



9. ייצוג מילולי:  
 קבוצת התחום היא קבוצת המספרים השלמים, קבוצת הטווח היא המספרים השלמים, וכלל ההתאמה: לכל מספר בקבוצת התחום מתאימים מספר הגדול ממנו ב-2 בקבוצת הטווח. שימו לב לכך שגם בדוגמאות 1, 2, הייצוג הוא מילולי.

10. ייצוג מספרי באמצעות טבלה:  
 התאמה שבדוגמה 8, למשל, איננה פונקציה, משום שקיים בתחום איבר ("ישראל") שאיננו מקור. באופן דומה, גם ההתאמה שבדוגמה 3 איננה פונקציה. ההתאמות המופיעות בדוגמאות 1, 2, 4 הן פונקציות. בכל אחת מהדוגמאות האלה כל איבר בתחום הוא גם מקור, ולכל מקור מותאם איבר אחד ויחיד מהטווח. גם התאמות 9-12 הן פונקציות.

11. ייצוג אלגברי:  
 נציין כי התאמה יכולה להיות פונקציה גם אם לא כל איברי קבוצת הטווח הם תמונות (כלומר יש איברים בקבוצת הטווח שאין להם איבר מתאים בקבוצת התחום). בדוגמה 4, האיבר "אירופה" אינו תמונה. התאמה יכולה להיות פונקציה גם במקרה שבו לתמונה כלשהי יותר מאשר מקור אחד. בדוגמה 2, ליבשת אסיה, למשל, יש מקורות רבים. דוגמה 1 היא דוגמה לפונקציה מיוחדת, ונדון בה בסעיף הבא. אך כאמור, ההפך (איבר בתחום ללא איבר מתאים בטווח) אינו אפשרי בהתאמה שהיא פונקציה.

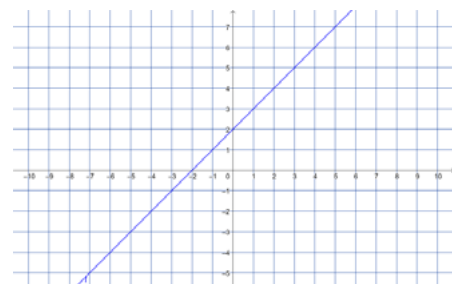
### סוגים של פונקציות

- א. במקרה של פונקציה שבה כל איברי הטווח הם תמונות, הפונקציה נקראת "פונקציית-על". ההתאמות בדוגמאות 1 ו-2 הן פונקציות-על.
- ב. פונקציה שבה לכל תמונה יש רק מקור אחד נקראת "פונקציה חד-חד-ערכית". דוגמה 1 היא פונקציה חד-חד-ערכית, שכן לכל תושב במדינת ישראל יש מספר תעודת זהות, והמספר הזה הוא יחיד (מה שהופך את ההתאמה לפונקציה), ולכל מספר תעודת זהות משויך רק תושב אחד. דוגמאות 9-11 גם הן מתארות פונקציה חד-חד-ערכית. ראוי לשים לב לכך שהפונקציה שבדוגמה 1 היא גם פונקציית-על.

11. ייצוג אלגברי:  
 נייצג את דוגמה 9 באמצעות ביטוי אלגברי באופן הבא:  
 $y = x + 2$  (או,  $f(x) = x + 2$ ). במקרה זה  $x$  מייצג את איברי קבוצת התחום, ו- $y$  מייצג את איברי קבוצת הטווח.

12. ייצוג גרפי:  
 הייצוג הגרפי להלן תואם את הייצוג של ההתאמה באמצעות הביטוי האלגברי המופיע בדוגמה 11.

גיל התינוק בחודשים	1	2	3	4	5	6
משקל ממוצע בק"ג	4.2	5.1	5.8	6.4	6.9	7.3



### פונקציה

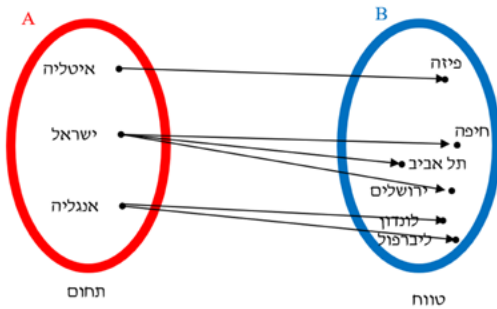
- יש התאמות שהן פונקציות ויש התאמות שאינן פונקציות. כדי שהתאמה תהיה פונקציה צריכים להתקיים התנאים הבאים:
  - א. כל איבר השייך לקבוצת התחום הוא מקור (כלומר, לכל איבר בקבוצת התחום יש תמונה).
  - ב. לכל מקור יש תמונה יחידה בטווח.
- במילים אחרות: לכל איבר בתחום יש תמונה אחת



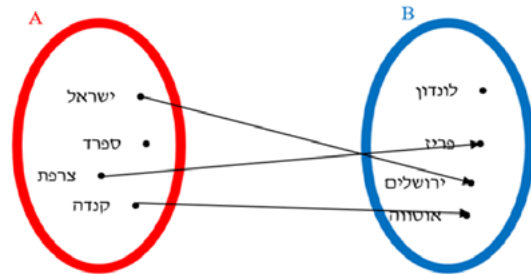


## סיכום

### התאמות שאינן פונקציה

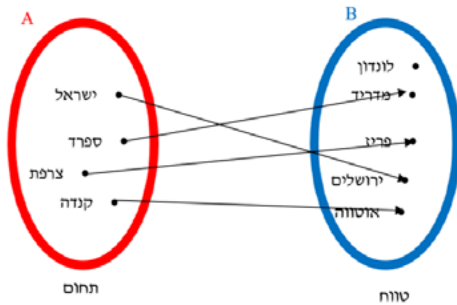


ישראל ואנגליה הן מקורות שיש להם יותר מתמונה אחת

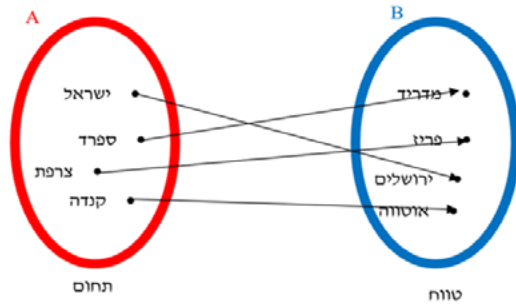


"ספרד" איננה מקור

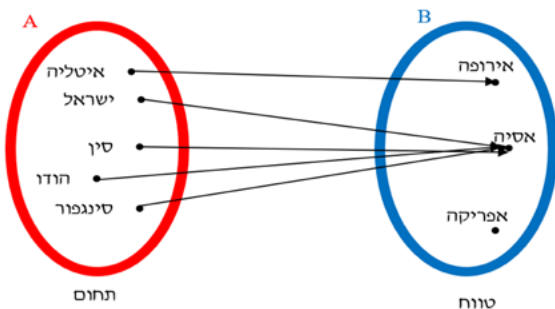
### התאמות שהן פונקציה



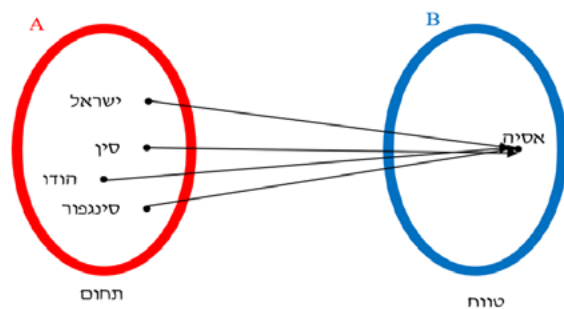
פונקציה חד-חד-ערכית שאיננה פונקציית-על



פונקציה חד-חד-ערכית ועל



פונקציה שאיננה חד-חד-ערכית ואיננה פונקציית-על



פונקציית-על שאיננה חד-חד-ערכית