במבט אחר

עידוד חשיבה אלגברית בבית הספר היסודי

ד"ר שולה וייסמן
החוג לחינוך מתמטי, אקדמית גורדון
החוג לחינוך מתמטי, אוניברסיטת חיפה

עידוד חשיבה אלגברית בבית הספר היסודי

ד"ר שולה וייסמן

חשיבה אלגברית היא תהליך שבו תלמידים מכלילים רעיונות מתמטיים מתוך מקרים פרטיים דרך דיון וטענות, ומביעים אותם בדרכים פורמליות או לא־פורמליות המתאימות לגילם (Kaput, 2017). החשיבה האלגברית מספקת בסיס להתפתחות מתמטית מופשטת ולהבנה, והיא מחברת בין הוראה ולימוד חשבון בכיתות היסוד לבין לימוד פונקציות בלימודי ההמשך בחטיבת הביניים ובכיתות התיכוניות. במאמר זה נדון במשימות למציאת חוקיות בסדרות של צורות. בסדרות יש שינוי במבנים/איברים, והמשימות מתאימות לחקירה של חוקיות ומזמנות התנסות מתמטית לתלמידים ברמות שונות. נשאל כיצד ניתן לפתח חשיבה אלגברית בעזרת זיהוי חוקיות, המללה והכללה, ונציע דרכים לניהול החקירה בכיתה כך שתעודד חשיבה אלגברית.

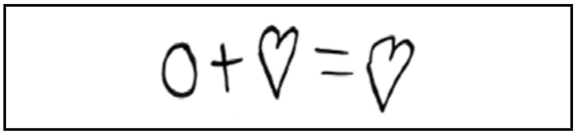
מהי חשיבה אלגברית?

חשיבה אלגברית היא יצירת הכללות מתוך התנסות עם מספרים וחישובים, המשגה של הרעיונות באמצעות מערכת סמלים וחקירת המושגים של תבנית ופונקציה (Kaput, 2017). חשיבה אלגברית מתבססת על היכולת להבחין בדפוסים ולהכליל מהם, וכן להקיש מתוך הכללה למקרים פרטיים. בעזרת האלגברה אנו יכולים להביע את ההכללות באופן מתמטי בדרכים שונות: תיאור מילולי, ציור, גרף וסמלים. תלמידים צעירים יכולים לחקור מקרים רבים של תכונה מספרית, ובעקבות כך להשתמש במילים או בסמלים משלהם באופן לא־פורמלי כדי לטעון על אודות התכונה. למשל, התכונה של הוספת אפס למספר ($a + 0 = a$) יכולה להיות מוצגת במילים: "מספר ועוד 0 שווה לאותו מספר", או בסמלים כמו באיור 1.

איור 1:

התכונה של הוספת 0 למספר כלשהו

(מתוך: Ontario Ministry of Education, 2013)



מדוע חשובה החשיבה האלגברית?

חשיבה אלגברית עומדת בבסיס כל חשיבה מתמטית כיוון שהיא מאפשרת לחקור את המבנים המתמטיים. מומלץ לכלול הסקה אלגברית מגיל צעיר מאוד, כך שהרעיונות המתמטיים יהיו נגישים לכלל התלמידים. פיתוח חשיבה מתמטית ושימוש בשפה מתמטית הן מטרות חשובות בחינוך לגיל הרך (Tsamir et al., 2015). לכל אחד יש יכולת לחשוב בצורה אלגברית, כי זו הדרך שבה בני אדם מקיימים אינטראקציה עם העולם, מחפשים תבניות, שמים לב מה חשוב בתבניות, ובעקבות כך מכלילים גם למצבים חדשים. חשיבה אלגברית מתפתחת כאשר תלמידים עוסקים במשימות שבהן נדרשים לזהות דגמים ברצף נתון, ולהשתמש בהם כדי להתמודד עם שאלות לגבי המשך הרצף שאינו נתון. כאשר תלמידים מתמודדים עם משימות כאלה בהנחיית המורה, החשיבה האלגברית מתפתחת מתפיסה ספונטנית של הרצף לחשיבה אלגברית, ובהמשך לשימוש בשפה המאפשרת לתלמידים לנבא איברים "רחוקים" ברצף (Radford, 2012); כאשר תלמידים מתמודדים עם משימות שבהן נדרשים למצוא חוקיות ולהשתמש בה, הם מעלים רעיונות מתמטיים שבאמצעותם ניתן לזהות מבנים ודפוסים, להסיק מסקנות ולנסח חוקיות. פעילות כזו מאפשרת גם קישור בין נושאים שונים, ובתוך כך ראיית הקשר וההכללה, ויצירת שיתוף ושיח מתמטי בכיתה, שהן מהותיות לפיתוח ההבנה, ובאמצעותן התלמידים נחשפים לדרכי פתרון שונות.

מחקרים מעודדים עיסוק בחיפוש דפוסים ברצפים של סמלים ויזואליים ובמציאת הכללה בכיתות היסוד ואפילו בגן הילדים. למשל, במחקר שעניינו ספירת עצמים והשלמת דפוסים חוזרים בעלי צבע ומבנה השתתפו ילדים בגיל 5-7. הם ידעו למצוא את החזרה בתבנית, והשתמשו בהנמקה לגבי המשך התבנית (Tirosh et al., 2018). גם רדפורד (Radford, 2010) התמקד במחקרו בדרך שבה מורים מזמנים לתלמידיהם

משימות המצריכות ליצור הכללה. הוא חקר את האופן שבו תפיסת התלמידים את המבנה הופכת ל"תרבות תיאורטית" שנדרשת להתמודדות עם בעיות כאלו. רדפורד מצא, כי ההכללה שהגיעו אליה תלמידי כיתה ב' הצריכה שילוב של תפיסת הצורה באופנים שונים שמקילים על התלמיד את החישוב הנדרש כדי לענות על שאלות, כמו חישוב מספר הריבועים באיבר ה־12, 25 או 100. עוד מצא כי למרות שההכללה שמצאו תלמידי כיתה ב' איננה סימבולית כמו 2X+1 היא אלגברית בצורת החשיבה שלה, היא מורכבת מתיאור מילולי. וכך, במקום להתבטא באמצעות אותיות היא מתבטאת בספירת החפצים שאינם מופיעים ברצף כמו: "במקום ה־12 יש 12 ועוד 12 ועוד 1", "במקום ה־25 יש 25 ועוד 25 ועוד 1".

מדוע כדאי לעסוק במציאת חוקיות וחשיבה אלגברית בכיתות היסוד?

רוב המורים למתמטיקה מסכימים שיש להדגיש את פיתוח ההבנה האלגברית אצל תלמידים עוד לפני שהם מתוודעים לייצוג סימבולי פורמלי. לדוגמה, כשתלמידים צעירים מבחינים שסדר המספרים בחיבור אינו משנה את הסכום (למשל, 3+4=4+3), הם מבינים שזה מתקיים עבור כל שני מספרים (חוק החילוף - תכונת הקומוטטיביות), ולמעשה מתמקדים במבנה היחסים ולא במספרים הספציפיים 3 ו־4 (Ontario Ministry of Education, 2013).

תוכנית הלימודים לבית הספר היסודי גורסת כי למידת המתמטיקה אמורה להיות מתוך הבנה ומציאת הקשרים בין המספרים והחוקים החלים עליהם. היא גם ממליצה לעודד את התלמידים לראייה אינטואיטיבית של מבנים מתמטיים וקישורם לפעולות החשבון (משרד החינוך, 2006). למרות שהתלמידים בבית הספר היסודי אינם מכירים עדיין את השפה האלגברית, הציפייה היא כי יפתרו בעיות בכלים אריתמטיים בלבד והחשיבה תהיה אלגברית. למשל, במצבים שבהם יש חוקיות, יבטאו אותה במילים או בביטוי מספרי לפני המעבר לשימוש בביטוי אלגברי. בדרך זו יתמודדו התלמידים מוקדם ככל האפשר עם בעיות שבהן יידרשו לייצג חוקיות כהכנה לייצוג האלגברי של חוקיות. תוכנית הלימודים לכיתה ז' נכתבה מתוך ראיית הרצף בין בית הספר היסודי לבין חטיבת הביניים. בתוכנית מדגישים כי האלגברה היא מכלול ואמצעי ליצירת קשרים בין נושאים שונים, ובמרכזה מושג "המשתנה" ו"הביטוי האלגברי" (משרד החינוך, 2008). כחלק מרעיון הלמידה הספירלית מומלץ להכיר מושג בהקשר של הנושא הנלמד מבלי ללמוד אותו לפרטיו. לדוגמה: להדגמת חוקיות בין מספרים ניתן להזכיר בכיתה ז' את מושג הסדרה החשבונית מבלי לפתח את נוסחת האיבר הכללי. כך ניתן לעשות גם בכיתות היסוד - להדגים את החוקיות מבלי להשתמש במושג "המשתנה" ובכתיבה אלגברית.

אחד הקשיים במעבר מבית הספר היסודי לחטיבת הביניים הוא השינוי מעיסוק באריתמטיקה לעיסוק באלגברה. לכן, חשוב להתחיל ביצירת רקע לחשיבה אלגברית עוד בכיתות היסוד כאשר התלמידים נחשפים למשימות המעוררות את הצורך להשתמש במשתנה. חוקרים ממליצים שלימוד האלגברה יתחיל בבית הספר היסודי, ומציינים כי ילדים צעירים יכולים ביעילות להתחיל לחשוב בצורה אלגברית (Kaput, 2017; Radford, 2015) ומסוגלים לעשות יותר ממה שמצפים מהם (סיניצקי ואילני, Falkner et al., 2014 ;1999; Kieran, 2007). רדפורד (Radford, 2015) הציג ממצאים ממחקר מתמשך של חמש שנים בכיתות ב'-ד' בנושא חשיבה אלגברית, ומצא כי תלמידים צעירים מקשרים בין המבנים המרחביים לבין המספרים. הם ידעו לומר מה יהיה במקום ה־12 ובמקום ה־25 של סדרת צורות שהוצגה בפניהם, וידעו לבטא במילים את הקשר האלגברי גם אם הוא לא בא לידי ביטוי בסימונים אלגבריים. במחקר נוסף של קירן (Kieran, 2007) נמצא כי תלמידי כיתה ג' שהתנסו בלימודי אלגברה מוקדמת באופן ממושך הצליחו לחשוב בצורה מבנית.

לאור האמור לעיל כדאי לשלב בנושאי הלימוד בכיתות היסוד דוגמאות ותרגילים שבהם משתמשים במשתנה, מבלי לקרוא לו בשם, או לסמנו באותיות לועזיות כנהוג בלימודי האלגברה. עוד מומלץ לזמן לתלמידים משימות שבהן יש להשתמש בחשיבה אלגברית כדי לתרום להתפתחות החשיבה האלגברית שלהם, ולהכינם טוב

יותר ללימודים בחטיבת הביניים ובכיתות התיכוניות.
להלן יוצגו דוגמאות למשימות המביאות לידי ביטוי הדגשים אלו מתוכניות הלימודים. בכל אחת מהדוגמאות יוצגו שאלות שניתן לשאול, והדגשים שכדאי לדון בעזרתם עם תלמידים. כמו כן, תוצג אותה משימה העוסקת בחוקיות בשלושה ניסוחים שונים: ניסוח מילולי לתלמידי הכיתות הגבוהות בבית הספר היסודי, ניסוח הדורש שימוש בביטוי אלגברי לתלמידי כיתות ז' וניסוח באמצעות סדרה חשבונית לתלמידי הכיתות התיכוניות.

דוגמאות

בדוגמאות שלהלן התלמידים נדרשים לבצע הכללה מדגמים נתונים. כדי לעשות זאת הם נדרשים לחשוב על המבנה המתמטי הבסיסי על ידי זיהוי הדפוס, ביטויו באמצעות אריתמטיקה וביצוע הכללה.

חרוזים בשרשרת

נתונה קופסה ובה חרוזים בשני צבעים: ירוק וכחול. אתם מתבקשים להשחיל על חוט את החרוזים באופן הבא: חרוז ירוק ואחריו שני חרוזים כחולים, ולהמשיך את השרשרת על פי סדר זה (ראו איור 2). חשוב להדגיש כי השחלת החרוזים נעשית באותה חוקיות לאורך כל השרשרת.

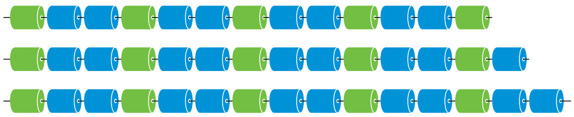
איור 2:
חרוזים בשרשרת

שאלות שניתן לשאול והדגשים לדיון עם התלמידים

1. השלימו, על פי דגם זה, כך שיהיו בשרשרת 20 חרוזים כחולים. כמה חרוזים ירוקים יהיו?
2. כמה חרוזים כחולים יהיו בשרשרת אם הושחלו חמישה חרוזים ירוקים?

לשאלה זו ייתכנו שלוש תשובות אפשריות: 8, 9 או 10 חרוזים כחולים מאחר שבנתוני השאלה לא נכתב מהו צבע החרוז שבו המחרוזת מסתיימת (ראו איור 3).

איור 3:
חרוזים בשרשרת - 5 חרוזים ירוקים



3. יוני השלים את השרשרת ל־33 חרוזים בסך הכול. כמה חרוזים ירוקים בשרשרת של יוני?

בסעיף זה נתון שמספר החרוזים הכללי הוא 33. מאחר שהשחלת החרוזים נעשית באותה חוקיות לאורך כל השרשרת, כדי לענות על סעיף זה על התלמיד לחשוב באופן אלגברי על אודות המבנה (חרוז ירוק ואחריו שני חרוזים כחולים). לאחר מכן להסיק כי המבנה מופיע 11 פעמים, ומכאן לענות שמספר החרוזים הירוקים הוא 11. מומלץ לשאול על מספרים שונים מ־33 ביניהם מספרים שאינם כפולות של 3, למשל, אם בשרשרת יש 11 חרוזים בסך הכול, כמה חרוזים ירוקים יש בה?

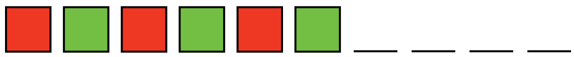
4. ידוע שהשרשרת מסתיימת בשני חרוזים כחולים:
   א. מה היחס בין מספר החרוזים הכחולים לבין מספר החרוזים הירוקים? (יחס בין ירוקים לכחולים).
   ב. איזה חלק מהווה מספר החרוזים הירוקים ממספר החרוזים הכחולים? (ממספר החרוזים הכללי?)
   ג. מה מאפיין את מספר החרוזים הכחולים בשרשרת?

בשאלה זו כדאי לדון עם התלמידים על הקשר שבין יחס לבין שבר. למשל, היחס בין מספר החרוזים הירוקים לבין מספר החרוזים הכחולים הוא 1:2 כלומר, על כל חרוז ירוק יש שני חרוזים כחולים, ומכאן שמספר החרוזים הכללי גדול פי שלושה ממספר החרוזים הירוקים, ולכן מספר החרוזים הירוקים מהווה $\frac{1}{3}$ ממספר החרוזים הכללי. באופן דומה: מספר החרוזים הכחולים מהווה $\frac{2}{3}$ ממספר החרוזים הכללי.

חוקיות בסדרות של צורות לכיתות א-ב

במשימות להלן מומלץ להשתמש באמצעי המחשה למשל, ריבועי משחק, מדבקות, ציורים.
נתונה סדרת הריבועים הבאה (ראו איור 4). הסדרה ממשיכה באותה חוקיות.

איור 4:
סדרת ריבועים: אדום, ירוק



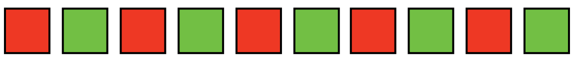
ניתן להתבונן על סדרת הריבועים ולהתייחס לכל ריבוע בנפרד: אדום, ירוק, אדום, ירוק.... או להתייחס לדגם כמורכב מזוגות של ריבועים: אדום-ירוק, אדום-ירוק....

שאלות שניתן לשאול והדגשים לדיון עם התלמידים

1. השלימו את ארבע הצורות הבאות בסדרה. הסבירו את תשובתכם.
   בשאלה זו התלמידים יכולים לצייר את האיברים הבאים, להשתמש במדבקות או לבטא במילים מה יהיו האיברים הבאים. מטרת השאלה היא לאפשר לתלמידים לחוש את הסדרה ולגלות את החוקיות. כשהם מתבקשים להסביר את התשובה הם נדרשים לתאר במילים את המשך הסדרה למשל: "אחרי כל ריבוע אדום יופיע ריבוע ירוק" או "בסדרה מופיעים שני ריבועים: אדום וירוק, ודגם זה חוזר על עצמו".
2. אם הסדרה מסתיימת בריבוע ירוק, ויש בה חמישה ריבועים אדומים, כמה ריבועים ירוקים יהיו בה?
   בשאלה זו מומלץ להרחיב למספרים נוספים, ולבקש לנסח טענות כלליות למשל, כאשר הסדרה מסתיימת בריבוע ירוק מספר הריבועים הירוקים שווה למספר הריבועים האדומים, או מספר הריבועים הכללי הוא זוגי.
3. אם בסדרה יש בסך הכול עשרה ריבועים, והיא מסתיימת בריבוע ירוק. כמה ריבועים אדומים יש בה?
4. אם בסדרה יש בסך הכול תשעה ריבועים, והיא מסתיימת בריבוע אדום. כמה ריבועים אדומים יש בה?
   בשאלות 3 ו־4 יש למעשה נתון מיותר (צבע הריבוע שבו מסתיימת הסדרה). מומלץ לדון עם התלמידים על אודות הקשר בין זוגיות מספר איברי הסדרה לבין צבע הריבוע שבו הסדרה מסתיימת: אם הסדרה מסתיימת בריבוע ירוק ניתן להסיק כי מספר הריבועים הכללי בסדרה הוא זוגי, ואם הסדרה מסתיימת בריבוע אדום אזי מספר הריבועים הכללי בסדרה הוא אי־זוגי.
   בפתרון שאלות אלו רצוי לבקש מהתלמידים להסביר את תשובתם וגם להכליל, וההכללה יכולה להיות מובעת במילים או על ידי הסבר בלתי פורמלי. להלן רישום פורמלי של הכללות:

- אם מספר הריבועים זוגי (ראו איור 5) הסדרה מסתיימת בריבוע ירוק, ואז מספר הריבועים האדומים (n) שווה למספר הריבועים הירוקים (n), והוא מחצית ממספר הריבועים הכללי ($2n$). (ולהפך: אם הסדרה מסתיימת בריבוע ירוק אז מספר האיברים בה הוא זוגי).

איור 5:
מספר זוגי של ריבועים

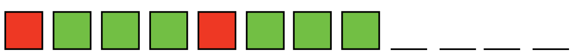


- אם מספר הריבועים אי־זוגי (ראו איור 6) הסדרה מסתיימת בריבוע אדום, אזי מספר הריבועים האדומים ($n+1$) גדול ב־1 ממספר הריבועים הירוקים (n). אפשר לנמק זאת בכך שיש ריבוע נוסף אדום בסוף הסדרה, ולכן מספר הריבועים האדומים שווה למחצית המספר הגדול ב־1 ממספר הריבועים הכללי ($2n+1$). (ולהפך: אם הסדרה מסתיימת בריבוע אדום אזי מספר האיברים שבה הוא אי־זוגי).

איור 6:
מספר אי-זוגי של ריבועים

ניתן ליצור סדרות מורכבות יותר (ראו איור 7) ולשאול שאלות דומות כמו:

איור 7:
סדרת ריבועים: אדום, שלושה ירוקים



1. השלימו את ארבעת האיברים הבאים בסדרה. הסבירו את תשובתכם.
   גם בשאלה זו אפשר להתייחס לכל ריבוע בנפרד ולומר "אדום, ירוק, ירוק, ירוק וחוזר חלילה" או להתייחס לדגם כמורכב מרביעיית ריבועים: אחד

אדום ושלושה ירוקים שחוזרים על עצמם.

2. ידוע כי בסדרה יש ארבעה ריבועים אדומים בסך הכול, והיא מסתיימת בריבוע אדום. כמה ריבועים ירוקים יהיו בה?
לפי הנתון אחרי הריבוע האדום הרביעי לא מופיעים ריבועים ירוקים, ואילו אחרי כל אחד משלושת הריבועים האדומים מופיעים שלושה ריבועים ירוקים, לכן יופיעו שלוש פעמים שלושה ריבועים ירוקים - בסך הכול תשעה ריבועים ירוקים.
3. ידוע כי בסדרה יש שלושה ריבועים אדומים בסך הכול, והיא מסתיימת בריבוע ירוק. כמה ריבועים ירוקים **יכולים** להיות בה?
שימו לב שכאן יש יותר מתשובה אחת נכונה: 7 ריבועים ירוקים, 8 ירוקים או 9 ירוקים.
4. האם ייתכן כי הסדרה מסתיימת בריבוע אדום ויש בה בסך הכל 10 ריבועים ירוקים? הסבירו את תשובתכם.
ההסבר המצופה מתלמיד הוא כי כאשר הסדרה מסתיימת בריבוע אדום מספר הריבועים הירוקים חייב להיות כפולה של 3 ולכן לא ייתכן שיהיו בה 10 ריבועים ירוקים.
5. ידוע כי הסדרה מסתיימת בריבוע אדום. תנו שלוש דוגמאות למספר הריבועים הירוקים בסדרה.
מומלץ לבקש מתלמידים ליצור סדרה משלהם, לנסח את החוקיות שלה ולחבר שאלות שניתן לשאול עליה.

חוקיות בסדרות של צורות לכיתות ג'-ו'

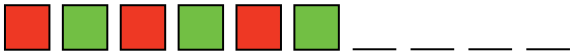
על פי רדפורד (Radford, 2010), תלמידים חווים תהליך במשך זמן הלימודים שבו הם מגלים את המבנה המתמטי בעיניהם, ויכולים לתפוס את המבנה שעומד בבסיס הרצף הנתון. משימות כמו אלה שהודגמו לעיל לכיתות א'-ב' מאפשרות לתלמידים לעבור מתפיסה ראשונית של האובייקטים ברצף לתפיסה מתוחכמת יותר המובילה לחשיבה אלגברית.

בדומה לבעיות שהוצגו לתלמידי כיתות א'-ב' ניתן להציג גם לכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי שאלות בנושא חוקיות. אפשר להתחיל באותה סדרה ולשאול שאלות דומות.

נתונה סדרת הריבועים הבאה (ראו איור 8). המשך הסדרה נשאר באותה חוקיות.

איור 8:

סדרת ריבועים: אדום, ירוק



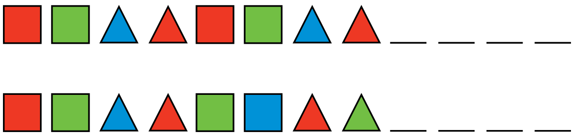
שאלות שניתן לשאול

1. השלימו את ארבעת האיברים הבאים בסדרה. הסבירו את תשובתכם.
2. הסדרה מסתיימת בריבוע ירוק, ויש בה 10 ריבועים אדומים. כמה ריבועים ירוקים יהיו בה?
3. בסדרה יש בסך הכול 16 ריבועים. מה צבע הריבוע האחרון בסדרה? כמה ריבועים אדומים יש בה?
4. בסדרה יש בסך הכול 31 ריבועים. מה צבע הריבוע האחרון בסדרה? כמה ריבועים אדומים יש בה?

מומלץ ליצור סדרות נוספות מורכבות יותר (ראו איור 9).

איור 9:

סדרות של צורות וצבעים



בסדרות באיור 9 מוצגות צורות שבהן משתנים הצורה והצבע. התלמידים יכולים לתפוס את המבנה באופנים שונים.

למשל בסדרה העליונה:

1. להפריד בין הצורה לבין הצבע. מבחינת הצורה: שני ריבועים, שני משולשים ומבחינת הצבע: אדום, ירוק, כחול, אדום וחוזר חלילה.
2. להפריד בין כל זוג צורות: שני ריבועים אדום וירוק, ואחריהם שני משולשים כחול ואדום וחוזר חלילה.

בסדרה התחתונה: להפריד בין הצורה לבין הצבע. מבחינת הצורה: שני ריבועים, שני משולשים ומבחינת הצבע: אדום, ירוק, כחול וחוזר חלילה.

שאלות שניתן לשאול

1. השלימו את ארבעת האיברים הבאים בסדרה. הסבירו את תשובתכם.
2. התבוננו ברצף ותארו את החוקיות בצורות.
3. התבוננו ברצף ותארו את החוקיות בצבעים.
4. צרו סדרה משלכם, רשמו מה החוקיות שלה וחברו שאלות שאפשר לשאול.

משימה למציאת חוקיות מתפתחת לתלמידי בית הספר היסודי, חטיבת הביניים והכיתות התיכוניות

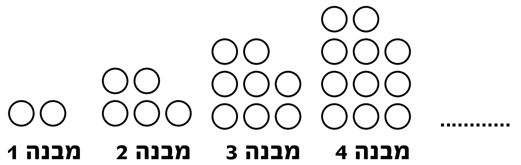
בחלק זה תוצג משימה העוסקת בחוקיות בשלושה ניסוחים שונים: (א) ניסוח מילולי המתאים לתלמידי בית הספר היסודי (ב) ניסוח באמצעות חוקיות וביטוי אלגברי המיועד לתלמידי כיתות ז' (ג) ניסוח באמצעות סדרה חשבונית המיועד לתלמידי התיכון.

בהתאם לעקרון הספירליות של תוכנית הלימודים, המשימה מסייעת לזריעת הזרעים הראשונים ללימודי האלגברה כבר בכיתות היסוד. במהלך הפעילות תלמידי בית הספר היסודי נדרשים למנות את מספר המעגלים במבנים הנתונים, לגלות כיצד נוצרו המבנים ולנמק את החוקיות שמצאו. כמו כן הם נדרשים להכליל ולהשתמש בחוקיות כדי למצוא את מספר המעגלים במבנה מסוים, או לזהות ולציין את מספר המבנה כשנתונים מספר המעגלים שבו. תלמידי בית הספר היסודי עוסקים למעשה באותה בעיה שתוצג לתלמידי כיתה ז' ולתלמידי התיכון. יצוין שההבדל ביניהם שבכיתה ז' הם מתבקשים לנסח את החוקיות בעזרת ביטוי אלגברי מתאים, ואילו בכיתות התיכוניות המשימה קשורה לנושא של סדרות חשבוניות והבנת המשמעות של הנוסחאות לאיבר כללי. ההתמודדות עם המשימה בכל אחד מהניסוחים תורמת לפיתוח חשיבה אלגברית, להבנת המשמעות של משתנה ומשמעות של מספר חופשי, ומאפשרת לבטא מגוון פתרונות.

1. בעיה בחשיבה אלגברית (טרום אלגברה) - לתלמידי כיתות ה'-ו'

להלן משימה לתלמידי בית הספר היסודי. בסעיפים הראשונים התלמידים מתבקשים להשלים את האיברים הבאים ולתאר כיצד הם בנויים. בסעיף ה' נדרשת הכללה למרות שתלמידי בית הספר היסודי עדיין לא מכירים ביטוי אלגברי, הם בהחלט מסוגלים לחשוב חשיבה אלגברית ולנסח את ההכללה במילים. הם מתבקשים לרכז את הנתונים בטבלה שממנה יכלילו ויוכלו למצוא את מספר המעגלים במבנה ה־20. בסעיפים ז' וח' הם נדרשים לאפיין את ההכללה שמצאו, ולראות את ה"דפוס" האלגברי, למשל: עבור המבנה במקום ה־□ מספר המעגלים הוא $(3\cdot\square-1)$. בעזרת הדפוס הם יוכלו למצוא תשובות לסעיפים ז' וח'.

לפניכם סדרה של מבנים הבנויים ממעגלים.
שימו לב: הנקודות בסוף הסדרה מציינות שהסדרה נמשכת לפי אותה חוקיות.
התבוננו במבנים המתארים תחילתה של סדרה הבנויה משורה ארוכה של מבנים וענו על השאלות:



א. כמה מעגלים במבנה 1, 2, 3, ו־4 בסדרה?
ב. תארו במילים כיצד בונים את המבנים.
ג. ציירו את מבנה 5.
ד. כמה מעגלים יהיו במבנה 6?
ה. השלימו את הטבלה הבאה:

מספר המבנה	מספר המעגלים במבנה	הסבר/ תרגיל חישוב
1		
2		
3		
4		
5		
□		

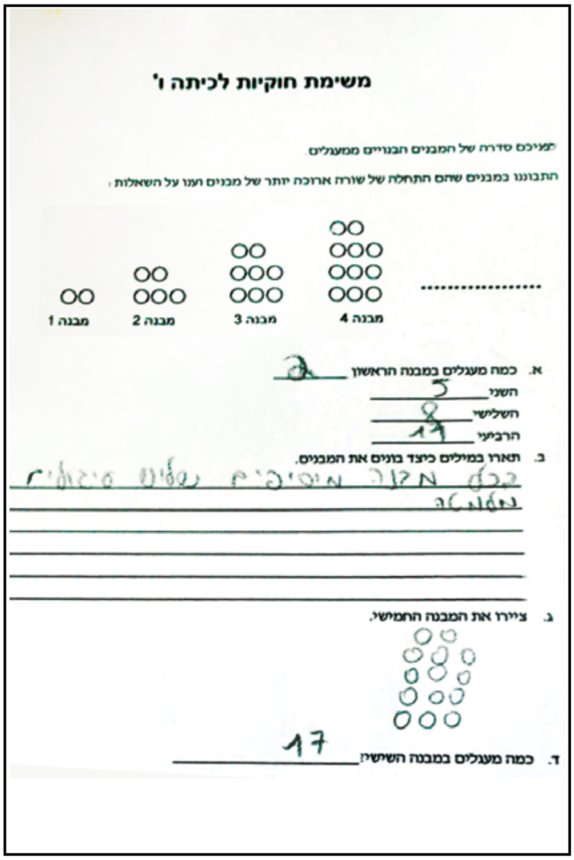
מה הקשר בין מקום המבנה בסדרה לבין מספר המעגלים במבנה?

ו. כמה מעגלים במבנה ה־20?
ז. נתון כי במבנה מסוים יש 47 מעגלים. מה מספר המבנה? הראו דרך חישוב.
ח. האם קיים בסדרה זו מבנה ובו 100 מעגלים? אם כן, מהו מקומו בסדרה? אם לא, הסבירו מדוע.

דוגמה לפתרון של הילה - תלמידת כיתה ו' (ראו איורים 10-11).

איור 10:

הפתרון של הילה - סעיפים א'-ד'

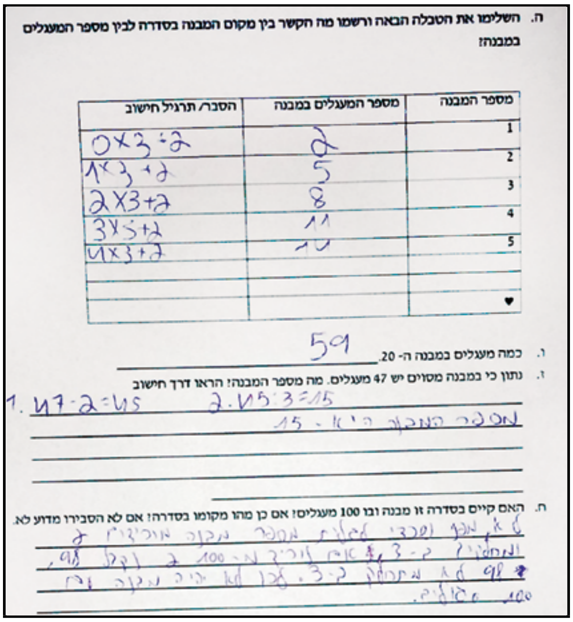


בסעיף א' הילה מונה את מספר המעגלים במבנים המוצגים. בסעיף ב' הילה מתארת את המבנה במילים ומבחינה כי בכל מבנה נוספים שלושה מעגלים למבנה הקודם. כלומר, למעשה היא מבחינה בחוקיות של סדרה חשבונית שבה כל איבר (פרט לראשון) גדול במספר קבוע מהאיבר הקודם לו.

בסעיפים ג' ו-ד' הילה מציירת את האיבר הבא, ורושמת את מספר המעגלים שבו לפי הכלל שניסחה בסעיף ב'.

איור 11:

הפתרון של הילה - סעיפים ה'-ח'



בסעיף ה' הילה מגלה את הדפוס ורושמת אותו באמצעות תרגילים. היא מגלה כי מספר המעגלים במבנה ניתן לחישוב על ידי מכפלת מספר הקטן ב-1 ממקום המבנה ב-3 ובתוספת של שני מעגלים, ומבטאת זאת בעזרת אריתמטיקה. בכתיב אלגברי היא למעשה מוצאת את הדפוס:

מספר המעגלים במבנה הנמצא במקום ה-n הוא $(n-1)\cdot 3+2$

בעזרת הדפוס היא עונה על סעיפים ו'-ח' ולמעשה משתמשת בהכללה שביצעה.

הנימוק שלה בסעיף ח' מעיד על הבנת הדפוס שמצאה: "כדי לגלות את מספר המבנה, מורידים 2 ומחלקים ב-3. אם נוריד 2 מ-100, נקבל 98. 98 לא מתחלק ב-3. לכן לא יהיה מבנה עם 100 מעגלים".

חשיבה אלגברית כחשיבה פונקציונלית

פונקציה היא יחס בין שתי קבוצות של נתונים כך שלכל איבר בקבוצה אחת משויך איבר יחיד בקבוצה השנייה. המשימה עם תבניות ויזואליות מזמנת לתלמידים צעירים הזדמנויות לחשוב על אודות יחסים בין כמויות

מעבר לחישובים אריתמטיים. בדוגמה שהוצגה לעיל (שבה התבקשו למצוא את האיבר העוקב בסדרת המעגלים במבנים, או למצוא את החלק שחוזר) עסקו התלמידים למעשה בחשיבה פונקציונלית שהיא צורה נוספת של הכללה. סוג חשיבה זה הוא אבן יסוד לפיתוח הבנה של מבנים מתמטיים. התלמידים עשויים להתמקד בשלב הראשון בכך שמספר המעגלים גדל ב־3 בכל פעם, ויכולים לבטא זאת כפי שביטאה הילה בסעיף ב' של השאלה "בכל מבנה מוסיפים שלושה עיגולים". זוהי חשיבה רקורסיבית (כל איבר מוגדר באמצעות האיברים הקודמים לו) שמדגישה את השינויים בקבוצת מספרים, המעגלים, אבל לא ביחסים בין שתי קבוצות המספרים: מיקום המבנה ומספר המעגלים במיקום זה.

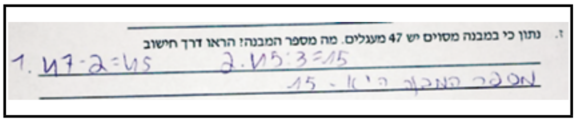
המגבלה של חשיבה זו היא כשמבקשים לדעת את מספר המעגלים במקום ה־100, כי קשה לחשב את התשובה ולמצוא כלל שמאפשר לחזות את מספר המעגלים במקום כלשהו. לעומת זאת, כאשר נתבקשה הילה בסעיף ו' של השאלה למצוא את מספר המעגלים במבנה ה־20, היא התמקדה בחשיבה פונקציונלית שמדגישה את הקשר בין מיקום האיבר לבין מספר המעגלים במבנה זה. כאשר תלמידים בונים בעצמם תבניות הם יזהו את היחסים הפונקציונליים. עבודה עם תבניות חזותיות מאפשרת לזהות את היחס הפונקציונלי. התלמידים יכולים לתאר זאת בדרך הבאה: "הכפל את המספר הקטן ב־1 מהמיקום ב־3, והוסף 2" או

"2 + (המיקום פחות אחד) X 3 = מספר המעגלים."

בסעיפים ז' ו־ח' הילה השתמשה, למעשה, בפעולה ההפוכה: בשלב הראשון היא חיסרה 2 ובשלב השני היא חילקה ב־3 כדי להגיע למספר המבנה שבו יש 47 מעגלים (ראו איור 12).

איור 12:

מעגלים - דוגמה לפתרון סעיף ז'

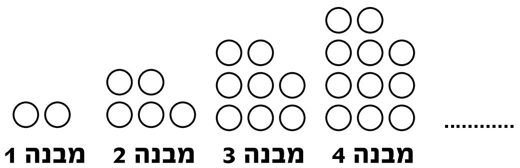

ז. נתון כי במבנה מסוים יש 47 מעגלים. מה מספר המבנה? הראו דרך חישוב

1. 47-2=45 2. 45:3=15

מספר המבנה הוא 15

2. משימה בנושא מציאת חוקיות וביטוי אלגברי - לתלמידי כיתה ז'

התחלת המשימה זהה בדיוק למשימה לתלמידי כיתה ו'. משימות כאלה נדונות בתחילת לימוד המתמטיקה בכיתה ז' בנושא חוקיות. המשימה מדורגת, מובילה את התלמידים ליצירת ביטוי אלגברי ולהצבה של מיקום האיבר בביטוי כדי למצוא את ערכו.

> לפניכם סדרה של מבנים הבנויים ממעגלים.
> שימו לב: הנקודות בסוף הסדרה מציינות שהסדרה נמשכת לפי אותה חוקיות.
> התבוננו במבנים וענו על השאלות, הסבירו את תשובותיכם:
>
> 
>
>
> א. כמה מעגלים במבנה 1, 2, 3 ו־4 בסדרה?
> ב. מצאו חוקיות בארבעת המבנים הראשונים בסדרה ותארו אותה.
> ג. לפי החוקיות שמצאתם בסעיף ב', ציירו את מבנה 5.
> ד. אם ממשיכים את הסדרה לפי אותה חוקיות, כמה מעגלים יהיו במבנה 6?
> ה. n מציין את מקום המבנה בסדרה. כתבו באמצעות n ביטוי אלגברי המתאר את מספר המעגלים במבנה שבמקום ה־n.
> ו. היעזרו בביטוי שרשמתם ומצאו את מספר המעגלים במבנה ה־20.
> ז. נתון כי במבנה מסוים יש 47 מעגלים. מה מספר המבנה?
> ח. האם קיים בסדרה זו מבנה שבו 100 מעגלים? אם כן מהו מקומו בסדרה? אם, לא הסבירו מדוע.

3. משימה בסדרה חשבונית - לתלמידי התיכון

משימה זו נפוצה בנושא סדרה חשבונית. תלמידים פותרים אותה בדרך כלל על ידי שימוש בנוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית $a_n=a_1+(n-1)d$. הם

משתמשים בנוסחה שמאפשרת להביע את ההכללה בשפה אלגברית.

> נתונה הסדרה החשבונית הבאה: 2,5,8,11,14
> א. מצאו את האיבר העשירי בסדרה.
> ב. מצאו את מקומו של האיבר שערכו 47.
> ג. האם יש בסדרה איבר שערכו 100? אם כן, מהו מקומו בסדרה? אם לא, הסבירו מדוע לא.

סיכום והמלצות: כיצד נוכל לקדם חשיבה אלגברית?

אנו יכולים לקדם חשיבה אלגברית על ידי יצירת נורמות כיתתיות המעודדות את התלמידים לשער, להצדיק, לנבא ולהוכיח טענות. בפעילויות המתבססות על חשיבה אלגברית שתוארו לעיל יש פוטנציאל לפיתוח יכולות מתמטיות רבות כמו העלאת השערות, גילוי הכללה והנמקה של חוקיות. המשימה האחרונה שהוצגה בגרסאות השונות מתאימה לתלמידים החל מכיתות ה'-ו' ועד לתלמידי חטיבת הביניים והכיתות התיכוניות.

בשיעורי המתמטיקה בכיתות היסוד אני ממליצה למורים להוביל את התלמידים להבנה של מושגים מתמטיים, לעודד אותם לעבור לייצוגים מופשטים, ולהאמין שהם מסוגלים להשתמש בחשיבה אלגברית לפתרון בעיות, נוסף לשימוש בדוגמאות מספריות. הם יכולים להביע את החוקיות במילים או בסמלים, וכך הם נחשפים לייצוגים שונים ולקשר ביניהם. מומלץ לערוך דיון מתמטי עם התלמידים על אודות הפתרונות שלהם, ולעודד מעבר מדרכי חשיבה קונקרטיות לדרכי חשיבה מופשטות. בדרך זו נבנים המושגים בצורה משמעותית, ומהווים בסיס איתן להבנת המבנים המורכבים יותר בלימודי ההמשך. תלמידי בית הספר היסודי המתנסים בלימוד של אלגברה מוקדמת יכולים לעסוק בהצלחה במגוון של תכנים אלגבריים, שלרוב נדחים לחטיבת הביניים או לאחר מכן. היכולת לחשוב בצורה מבנית היא היבט חשוב של חשיבה אלגברית (Kieran, 2007), ותלמידים בבית ספר יסודי מסוגלים לנמק בדרך זו. לכן חשוב לזמן לתלמידים כבר בבית הספר היסודי משימות הדורשות חשיבה אלגברית כדוגמת המשימות שהוצגו כאן, הכוללות - הכללה של קשרים ומבנים מתמטיים, כתיבת ההכללות, הצדקה שלהן והנמקתן. כבר בגיל צעיר, ילדים יכולים למצוא רעיונות של הכללה, להצדיק ולנמק את ההכללה בעזרת תיאור מילולי, או בעזרת ביטוי אריתמטי. על כן מומלץ לעבוד עם תלמידי בית הספר היסודי על משימות המובילות למציאת הרעיונות כדי לפתח חשיבה אלגברית וגם כדי להכינם לחטיבת הביניים ולציידם בתובנות ויכולת הכללה (וייסמן, 2015). הדוגמאות שהוצגו כאן יכולות להוות "גשר" לתלמידי כיתה ו', להכינם לכיתה ז' שם יעסקו בפעילויות דומות ויחושו את הצורך בשימוש במושג המשתנה.

רשימת מקורות

- וייסמן, ש' (2015). יצירתיות במציאת חוקיות כגשר בין אריתמטיקה לאלגברה. בתוך א' גזית וד' פטקין (עורכים), **יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות**. (עמ' 148-174). תל-אביב: מכון מופ"ת.
- משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). **תכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים**. ירושלים: משרד החינוך, האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים.
- משרד החינוך (2008). תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ז'-ט'. נדלה מהאתר "תיק תוכניות הלימודים לעובדי הוראה" ב-4/2023: https://meyda.education.gov.il/files/Curriculum/math_7_9.pdf
- סיניצקי, א' ואילני, ב' (2014). **שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות**. תל-אביב: מכון מופ"ת.
- Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (1999). Early Childhood Corner: Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching children mathematics*, 6(4), 232-236.

- Kaput, J. J. (2017). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? *In Algebra in the early grades* (pp. 5-18). *Routledge*.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation (pp 707–762). In: F. K. Jr. Lester (ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Greenwich: Information Age Publishing.
- Ontario Ministry of Education (2013). *Paying Attention to Algebraic Reasoning. K*-12 :*Support Document for Paying Attention to Mathematics Education*. http://www.edugains.ca/resourcesLNS/MathematicsFoundationalPrinciples/PayingAttentiontoAlgebraicReasoning.pdf
- Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, 30(2), 2-7.
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 6(4), 117-133.
- Radford, L. (2015). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. In: *The proceedings of the* 12*th International Congress on Mathematical Education*: *Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 209-227). Springer International Publishing.
- Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R., & Levenson, E. (2018). Engaging young children with mathematical activities involving different representations: Triangles, patterns, and counting objects. *CEPS Journal*, 8(2), 9-30.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. ZDM, 47, 497-509.