יחס ופרופורציה

סקירה והשוואה בין הישגי תלמידים שלמדו על פי תכנית לימודים חדשה לבין תלמידים שלמדו על פי תכנית לימודים מסורתית

דוד בן-חיים, הפקולטה למדעים והוראתם אוניברסיטת חיפה – אורנים

הדברים מבוססים בחלקם על מאמר שפורסם באנגלית על-ידי .Ben-Chaim et al
בכתב העת: Educational Studies in Mathematics 36 : pp 247-273 ,1998

תקציר

המאמר דן בחשיבה הפרופורציונלית (proportional reasoning), בחשיבותה ובדרכים להעריך אותה – תוך סקירה של הגורמים המשפיעים על רמת ההצלחה בביצוע מטלות הקשורות בה. אחת המטרות העיקריות של כותב המאמר היא להשוות בין החשיבה הפרופורציונלית של שתי קבוצות תלמידים מארה"ב, שלמדו שתי תכניות שונות – תכנית הרפורמה CMP ותכנית מסורתית.

בעיות הקשריות (contextual problems) העוסקות במספרים רציונליים ובחשיבה פרופורציונלית הוצגו בפני תלמידי כיתות ז' משתי התכניות. הממצאים הוכיחו, שתלמידים שלמדו לפי התכנית החדשה- CMP, תכנית המעודדת אותם להבנות בעצמם את הידע המושגי והידע הטכני של הפרופורציונליות תוך שיתוף פעולה ושיח בין התלמידים, הצליחו הרבה יותר מאשר תלמידים שלמדו לפי תכנית הלימודים המסורתית, שבה המורים מכוונים את הלמידה. התלמידים שלמדו לפי תכנית הרפורמה- CMP, היו מסוגלים לפתח בעצמם מגוון כלים משמעותיים, אשר סייעו להם למצוא פתרונות והסברים מדויקים. ממצא זה מוצג באמצעות ניתוח של אסטרטגיות פתרון של התלמידים למגוון בעיות קצב (rate problems). לבסוף, המאמר מציג את המסקנות וההשלכות החינוכיות הנובעות מממצאי המחקר.

1. מבוא

חשיבה פרופורציונלית (proportional reasoning) נמצאת במרכז לימודי המתמטיקה בגילאי ההתבגרות, ולפיכך יש לנושאים של יחס ופרופורציה מקום מרכזי בתכנית הלימודים במתמטיקה בכיתות ה' – ח'.

חשיבה פרופורציונלית היא אחת מצורות החשיבה המתמטית, והיא עוסקת ביחסים מתמטיים שהם כפליים (multiplicative) מטבעם.

באופן פורמלי, במיוחד עבור מתמטיקאים, פרופורציה היא שוויון של שני יחסים, כלומר: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

בעקבות התיאוריה של פיאז'ה, שהציג את החשיבה הפרופורציונלית כסימן המרכזי להתפתחות אופרציות בשלב ההתפתחות הפורמלי (Inhelder & Piaget, 1958), התמקד המחקר על החשיבה הפרופורציונלית בתלמידים בגיל ההתבגרות (Tourniaire, 1986) . לפי הסטנדרטים של ארגון המורים למתמטיקה בארה"ב (NCTM): "היכולת לחשיבה פרופורציונלית מתפתחת אצל תלמידים במהלך כיתות ה'-ח'. אי לכך, חשוב ביותר להקדיש כל מאמץ וזמן על מנת להבטיח את התפתחותה הנאותה."
(NCTM Curriculum and Evaluation Standards, 1989, p.82)

יחד עם זאת, מחקרים רבים מצביעים על קשיים וחוסר שליטה של תלמידים רבים בכל הגילים, כולל סטודנטים במכללות, בנושא החשיבה הפרופורציונלית (Lawton, 1993). כמו כן קיימת עדות לכך, כי חלק ניכר מהחברה שלנו לעולם אינו מגיע לשליטה בחשיבה פרופורציונלית
(Hoffer, 1988, p. 285).

בעקבות הרעיונות המובעים בספריו של פרוידנטל (Freudenthal, 1978, 1983), ניתן לתאר שלוש קטגוריות של בעיות של חשיבה פרופורציונלית:

1. השוואת גדלים של כמויות שונות, כגון: 'מספר ק"מ לליטר', או 'מספר אנשים לקמ"ר מרובע', או 'מספר ק"ג למ"ק', או 'מחיר ליחידה'. בדרך כלל השוואות אלו אינן נקראות יחסים, אלא הספקים/קצבים (rates) או צפיפויות (densities).

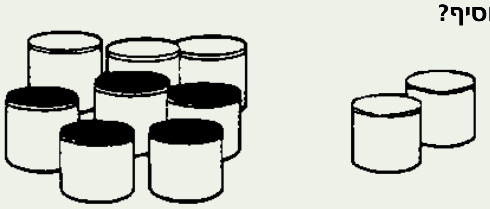
2. השוואת שני חלקים של שלם מסוים, כגון במקרה של 'יחס בין מספר הבנים בכיתה למספר הבנות הוא 15 ל-10' או 'קטע מחולק לפי יחס הזהב'.

3. השוואת גדלים של שתי כמויות הקשורות קונספטואלית, אבל אינן נחשבות באופן טבעי לחלקים של אותו שלם, כגון במקרה של 'היחס בין צלעות של שני משולשים הוא 2 ל–1'. השוואות כאלו מיוחסות לעתים לקנה מידה/כיול (scaling) וכוללות שאלות של הגדלה או הקטנה בטרנספורמציות של דמיון.

בספרות המתמטית–מקצועית מדווח על שלושה סוגים של מטלות להערכת היכולת הפרופורציונלית (ראה אצל Cramer, Post & Currier, 1993):

(1) בעיות עם ערך חסר – missing value problems שבהן נתונים שלושה גדלים של מידע מספרי, וצריך למצוא את הגודל הרביעי החסר.
לדוגמה:

הצבע בגוון הקרוי "עשן אפור" מתקבל על–ידי ערבוב של 3 פחיות של צבע לבן ו–5 פחיות של צבע שחור. שרון השתמשה ב–2 פחיות של צבע לבן כדי לקבל צבע בגוון "עשן אפור". כמה פחיות של צבע שחור היא צריכה להוסיף?



(2) בעיות השוואה מספריות numerical comparison problems שבהן נתונים שני הספקים/קצבים (rates), וצריך להשוות בין הקצבים לבין היחסים.
לדוגמה:

גיל וגילה מערבבים צבע. גיל מערבב 3 קופסאות של צבע לבן עם 9 קופסאות של צבע שחור, וגילה מערבבת 2 קופסאות של צבע לבן עם 7 קופסאות של צבע שחור. האם התערובת של גיל כהה יותר, בהירה יותר, או באותו צבע כמו זו של גילה?

(3) בעיות של ניבוי איכותי ובעיות השוואה qualitative predictions and comparison problems שבהן נדרשות השוואות שאינן תלויות בערכים מספריים ספציפיים. לדוגמה:

אם דליה מוהלת היום פחות מיץ לימון טבעי ביותר מים מאשר מהלה אתמול, טעם הלימונדה שלה יהיה:

א) חמוץ יותר

ב) חמוץ פחות

ג) בדיוק אותו דבר

ד) אין מספיק מידע על מנת לקבוע.

2. גישות ותכניות לימודים

לאחרונה החלו לפתח אסטרטגיות הוראה חדשות במתמטיקה, המכוונות בעיקר לתלמידי בית הספר היסודי. הן מתייחסות: למספרים רציונליים, לשברים, למידות, לאחוזים, ליחס ולחשיבה פרופורציונלית.
בתכנית לימודים מסורתית בבית הספר היסודי, מתרכזים בפיתוח מיומנויות של חישוב במספרים הרציונליים, תוך דגש על דיוק ומהירות הביצוע. רק לאחר שהיעילות החישובית מושגת, מביאים בפני התלמידים בעיות מילוליות לתרגול המיומנויות החישוביות שלהם.

אחד הפרויקטים החדשים של תכנון לימודים במתמטיקה בארה"ב, המושפע מהמסמכים של הסטנדרטים להוראת מתמטיקה שפורסמו שם בעשור האחרון של המאה ה–20, (NCTM 1989, 1991, 1995), הוא CMP - Connected Mathematics Project.
במסגרת פרוייקט זה פותחו חומרי למידה במתמטיקה לכיתות ו', ז', ח' מלווים בחומרי תמיכה למורים. תכנית לימודים זו נבנתה כדי לפתח את הידע וההבנה של התלמידים במתמטיקה, והיא עשירה בקישורים – קישורים בין הרעיונות המרכזיים במתמטיקה והשימושים שלה. הפרוייקט דן במצבים מציאותיים, בהדמיות של מצבים משונים ומוזרים או במצבים מתמטיים מעניינים. התלמידים פותרים בעיות ותוך כדי פתרון הם מגלים תבניות והקשרים: הם משערים, בודקים, מתמללים, ומכלילים את התבניות והקשרים.

תכנית הלימודים של ה– CMP מטפלת בנושאים העיקריים של המתמטיקה: מספר, גיאומטריה, מדידות, אלגברה, סטטיסטיקה והסתברות. הגישה ביחידות הלימוד השונות של התכנית מעודדת תלמידים לבנות את תהליכי הפתרון שלהם בעצמם. התלמידים משתפים פעולה במציאת תהליכי פתרון מיוחדים, מביאים אותם בפני הכיתה לדיון, ואחר כך רושמים את דרכי הפתרון שלהם במחברותיהם.

בשיטת למידה זו אין מראים לתלמידים אלגוריתם סטנדרטי לחיבור, לחיסור, לכפל או לחילוק של שברים פשוטים ועשרוניים, ואף לא דרכים סטנדרטיות לפתרון בעיות אחוזים ולפתרון בעיות פרופורציונליות.

לעומת זאת, בתכנית הלימודים המסורתית, חומרי הלמידה מספקים מגוון בעיות, והמורים מדגימים פתרונות לבעיות אלו. התלמיד מתאמן ומתרגל באופן אישי, בהתאם לתבנית שניתנת לו על ידי המורה.

ההבדל המהותי בין הגישה של ה- CMP לבין התכנית המסורתית לגבי מספרים רציונלים, חישובים פרופורציונליים ופתרון בעיות, מעלה שאלות חשובות, הנשאלות על-ידי מורים, הורים ואחרים, המודאגים ממידת מיומנויותיהם של התלמידים בגיל זה:

מהם הישגים של תלמידים שלמדו על-פי הגישה המסורתית לעומת הישגיהם של התלמידים שלמדו על פי הגישה החדשה של CMP בכל הנוגע להבנה מושגית, למיומנויות חישוביות ולאסטרטגיות של פתרון בעיות? האם הגישה החדשה מובילה את התלמידים להבניה אפקטיבית (מדויקת ו/או יעילה) של אסטרטגיות פעולה בשברים פשוטים, במספרים עשרוניים, ביחס ובחישובים פרופורציונליים? והאם תלמידי ה-CMP מפתחים אסטרטגיות מגוונות ו/או יעילות לפתרון בעיות במספרים רציונלים ופרופורציות?

מאמר זה מתמקד בעיקר בהשוואה בין תוצאות למידתן של שתי הגישות על-ידי תלמידי כיתה ז', בכל הנוגע לפתרון בעיות של חשיבה פרופורציונלית.

3. מטרת המחקר

מחקר זה בא לתאר את האופי והיעילות של הפעלת חשיבה פרופורציונלית בתהליך פתרון בעיות קצב (rate problems) על-ידי תלמידים שלמדו לפי תכנית הלימודים החדשה CMP.

4. שיטת המחקר

בעת ביצוע המחקר, כ-2000 תלמידים ב-10 מדינות שונות בארה"ב למדו בשיטת ה-CMP. המדגם של ה-CMP כלל כיתות ז', ובסך הכול 187 תלמידים משלוש מדינות שונות. קבוצת הביקורת שלמדה לפי התכנית המסורתית כללה 6 כיתות ז', ובסך הכול 128 תלמידים מארבע מדינות שונות. קבוצות הניסוי (המדגם של ה-CMP) וקבוצת הביקורת (המדגם של התכנית המסורתית) הורכבו מבין אלה שהגיעו לתוצאות דומות במבחנים הסטנדרטיים הארציים, שהועברו באותה עת בארה"ב.

שתי הקבוצות נבחנו על בעיות העוסקות ביחס ובפרופורציה, בעיות העוסקות בקצב, בתנועה, בצפיפות, ביחס, בקנה מידה ובדמיון.

בכל כיתה ראיינו כ-25% מהתלמידים על מנת לעמוד ביתר יסודיות על דרכי החשיבה והפתרון שלהם.

במאמר זה נציג ניתוח של רמת הביצוע של התלמידים משני המדגמים, בעזרת תשובותיהם ל-5 שאלות העוסקות בקצב- rate וצפיפות-density. כל חמש השאלות מופיעות בהקשר לסיפור על טיול לגן החיות. בתרגום השאלות לעברית נעשו שינויים לא משמעותיים כגון התאמת שמות, סוגי מוצרים ויחידות: ₪ לעומת $, ק"מ לעומת מייל. ובשל כך המחירים אינם ריאליים.
השאלות מופיעות באיור 1.

טיול לגן חיות

מקס, עליזה, אלכס וסימה תכננו טיול כיתתי שנתי באופניים לגן חיות. התלמידים התאספו במגרש החניה של בית הספר ורכבו על אופניים לאורך שביל האופניים המוביל לגן חיות. לאחר שביקרו בביתנים השונים וצפו בחיות במשך מספר שעות, הם נפגשו ליד האגם לארוחה קלה ולשתייה קרה לפני שרכבו חזרה לבית הספר.

1. מקס ועליזה קנו את השתייה ודיווחו על הבחירה הבאה: מיץ פטל עלה 2.00 ש"ח עבור 16 שקיות. מיץ אשכוליות עלה 1.60 ש"ח עבור 12 שקיות. הם בחרו במיץ אשכוליות. האם הבחירה שלהם הייתה המוצלחת ביותר מבחינה כלכלית?
מה הם החישובים/שיקולים שהובילו לתשובה שלך?
2. סימה ואלכס ערכו קניות של חטיפי שוקולד ותפוחים, אולם הם איבדו את הקבלות. הם זכרו שחטיפי השוקולד עלו 2.60 ש"ח עבור 8 יחידות, ואילו 6 התפוחים עלו 1.95 ש"ח.
א. כמה שילמו עבור 20 יחידות של חטיפי שוקולד? מהם שיקוליך?
ב. כמה שילמו עבור 20 תפוחים?
איך ניתן לדעת?
3. סימה ואלכס החליטו להתחרות ביניהם בדרך חזרה הביתה. סימה רכבה 5 ק"מ לביתה ב-20 דקות. אלכס רכב 7 ק"מ לביתו ב-25 דקות. מי רכב מהר יותר? איך ניתן לדעת?
4. בשבת לאחר מכן, מקס ועליזה רכבו על אופניים לפארק, בדרך הארוכה מסביב לאגם. אורך הדרך 30 ק"מ, והם עברו אותה ב-1.5 שעות רכיבה. לאחר שאכלו צהריים, הם רכבו חזרה בדרך הקצרה יותר. אורך הדרך היה 20 ק"מ, והם עשו אותה ב-3/4 שעה של רכיבה. באיזה חלק של הטיול שלהם - הלוך או חזור - הם רכבו מהר יותר?
איך ניתן לדעת?
5. בשדה ליד בית הספר מקס ואלכס ראו מספר חתולים מסוג feral. כאשר חזרו הביתה, ערכו מספר שיחות טלפון ומצאו, שיש כ-1000 חתולים כאלו בעירם, וכ-1500 חתולים כאלו בעיר השכנה. השטח של עירם הוא 60 ק"מ מרובע; השטח של העיר השכנה הוא 100 ק"מ מרובע. היכן יש סיכוי גדול יותר לראות חתול feral?
הסבר את שיקוליך.

איור 1 - נוסח השאלות שניתנו במחקר

*הערה: הסקר המתואר בבעיה זו, לגבי מספר החתולים בשתי הערים, התבצע במציאות בצורה סטטיסטית אמינה, עם מדגם מייצג, לא כפי שמתואר בשאלה. התיאור הקצר בשאלה נועד לפשט את הסיפור עבור התלמידים, ולא לייגע אותם בפרטים המדויקים של ביצוע הסקר.

מתוך 5 השאלות, שתי השאלות הראשונות עוסקות במחיר יחידה – unit price, האחת מסוג השוואה מספרית והשנייה מסוג ערך חסר. השאלות השלישית והרביעית עוסקות ביחסים פרופורציונליים בין מרחק, זמן ומהירות – שתי השאלות מסוג השוואה מספרית. ההבדל העיקרי ביניהן הוא במבנה המספרי, כאשר שאלה 3 כוללת רק מספרים שלמים, ואילו שאלה 4 כוללת שברים פשוטים ועשרוניים לייצוג הזמן. השאלה החמישית, העוסקת במידע על צפיפות אוכלוסייה, גם היא מסוג ההשוואה המספרית, אבל במספרים גדולים יחסית. בכל שאלות ההשוואה המספרית היחסים אינם שווים, ובמקרה כזה השאלות נחשבות לקשות יותר (Karplus et al. , 1983 a,b).

5. תוצאות ודיון

טופס מיוחד פותח על מנת לנתח ולהעריך את עבודת התלמידים, ובאמצעותו רוכזו התוצאות.

נקבעו 3 קטגוריות ראשיות לניתוח התוצאות: תשובה נכונה (ובה שלוש תת-קטגוריות: ללא הסבר; עם הסבר נכון; עם הסבר לא נכון), תשובה לא נכונה (ובה שלוש תת-קטגוריות: ללא הסבר; עם תשובה נכונה; עם תשובה לא נכונה), אין תשובה כלל (מקום ריק).

תת-הקטגוריה הבעייתית ביותר הייתה 'תשובה לא נכונה עם חשיבה נכונה או הבנה חלקית'. תשובות של תלמידים סווגו לתת קטגוריה זו, אם נראה היה שדרך חשיבתם נכונה, אבל הם עשו שגיאות חישוביות, או אם הם השתמשו ביחסים הנכונים אבל טעו ביחידות, או אם רוב השלבים נכונים, והיו טעויות מינוריות לקראת הסוף.

בטבלאות הבאות מוצגות תוצאות התלמידים לפי מדגם ולפי בעיה. **כל המספרים בכל הטבלאות נתונים באחוזים.** במאמר המקורי נתונות דוגמאות אותנטיות של תשובות של תלמידים ומומלץ לעיין בו. (Ben-Chaim et al.,1998).

בטבלה 1 מופיעים הממצאים הכלליים של כל חמש בעיות הקצב בשאלון החשיבה הפרופורציונלית, לפי קבוצת ניסוי וקבוצת ביקורת, ולפי קטגוריות של תשובה נכונה, תשובה שגויה וללא תשובה כלל.

טבלה 1 מראה שתלמידי CMP עלו על תלמידי קבוצת הביקורת ביחס של 53% ל-28% בקטגוריה של "תשובה נכונה עם הסבר נכון". רוב התלמידים משני המדגמים ענו על השאלות בצירוף הסברים מפורטים. אם נתעלם מהתת-קטגוריות של "רק תשובה נכונה" ו"אין תשובה כלל" אפשר לראות שבין 80% ל-90% משני המדגמים סיפקו הסברים תומכים לתשובותיהם. ניתן להסיק מכך, שכאשר תלמידים נשאלים שאלות כגון "הראה את עבודתך", או "איך אתה יודע", או "הסבר" הם מוסיפים הסברים כתובים לתשובותיהם. עם זאת, איכות ההסבר חשובה אף היא. ניתוח ההסברים הכתובים הראה בבירור שתלמידי CMP היו הרבה יותר מיומנים בהסברים כאלה מאשר קבוצת הביקורת. ברור שניתן לייחס תוצאה זו לעובדה שתלמידי CMP התבקשו לעתים קרובות יותר לכתוב ולדבר על הרעיונות שבהם עסקו.

תת-הקטגוריה של "תשובה נכונה עם הסבר לא נכון" מופיעה בתוצאות הכלליות בתדירות של יותר מפי שניים אצל תלמידי הביקורת (21%) מאשר אצל תלמידי ה-CMP (9%). לולא הדרישה להסבר מלווה, ניתן היה לחשוב שתלמידים אלה הצליחו יפה, אבל במציאות נראה שאין להם הבנה בחומר.

כ-13% לערך משני המדגמים נמצאים בתת-קטגוריה "תשובה לא נכונה עם הבנה חלקית" תת-קטגוריה זו מופיעה לעתים כאשר הבעיה מצריכה חישובים ולאחריהם שיקולים לוגיים, כמו בעיות קצב/תנועה.

טבלה 1. ממצאים כלליים של חמש בעיות הקצב בשאלון החשיבה הפרופורציונלית

	תשובה נכונה			תשובה לא נכונה			אין תשובה כלל
קבוצה	רק תשובה נכונה	עם הסבר נכון	עם הסבר לא נכון	רק תשובה לא נכונה	עם חשיבה נכונה	עם חשיבה לא נכונה	מקום ריק
CMP N=124	3	53	9	2	15	10	8
ביקורת N=91	6	28	21	4	10	23	8

התלמידים יכולים לחשוב נכון, אבל לבצע את החישובים לא נכון, או שהם יכולים לקבל את התוצאות המספריות הנכונות, אבל להסיק מסקנות לא נכונות על יחידות המידה. במקרים אחרים, התלמידים מבצעים את רוב העבודה נכון אבל עושים שגיאות קטנות. ניתן להניח שהתלמידים בתת–קטגוריה זו מתחילים להבין את התוכן, אבל ההבנה שלהם אינה די מושרשת, ובמקרה זה נדרשת הוראה משלימה.

בטבלאות הבאות (טבלאות 2–4) יופיעו הממצאים של כל אחת מהבעיות הספציפיות שניתנו במחקר. כפי שניתן לראות, תלמידי CMP הצליחו באופן משמעותי יותר מתלמידי הביקורת בתשובותיהם הנכונות על כל אחת מהבעיות.

השוואת הצלחה של תלמידים בבעיות מס׳ 1 ו–2:

בשתי השאלות הראשונות נדרש אותו ידע על קצב– Rate, בהתייחס לכמות ולעלות. אולם השאלה הראשונה היא בעיית השוואה מספרית, ואילו השנייה דורשת מציאת ערך חסר. בטבלה 2 מופיעים הנתונים לגבי שאלה 1, ובטבלה 3 מופיעים הנתונים לגבי שאלה 2.

הממצאים מצביעים על כך שבשני המדגמים ההצלחה בפתרון בעיית הערך החסר הייתה גדולה יותר מאשר ההצלחה בפתרון בעיית ההשוואה המספרית. לפי הנתונים בטבלאות 2–3 תלמידי CMP ענו נכון בצירוף הסבר תומך נכון ב–72% מהתשובות על בעיית הערך החסר (בעיה מס׳ 2), לעומת 57% תשובות נכונות על בעיית ההשוואה המספרית (בעיה מס׳ 1).

תלמידי הביקורת ענו באופן מלא על בעיית הערך החסר ב–44% מהתשובות לעומת 32% מהתשובות על בעיית ההשוואה המספרית. ייתכן ובעיה מס׳ 2 הייתה קלה יותר, מכיוון שהיא מורכבת משני חלקים זהים, שכל אחד מהם פחות מורכב מבעיית ההשוואה המספרית–בעיה מס׳ 1. בכל אופן, תוצאה זו מאשרת מסקנות של סקר ספרות על ידי טורניר ופאולוס שמצאו, כי השוואת יחסים היא שיטה מתקדמת, והיכולת לבחור את ההשוואה האריתמטית הקלה יותר נרכשת הרבה אחרי השליטה בטכניקה הפרופורציונלית (Tourniaire & Pulos, 1985, p.188).

באופן ברור תלמידי CMP הצליחו טוב יותר מאשר תלמידי הביקורת בשתי הבעיות הראשונות. אחוז התלמידים שהסתפק רק בתשובה נכונה או לא נכונה ללא הסברים, היה קטן באופן יחסי. מפתיע ש–13% מתלמידי הביקורת לא ניסו לענות על אף חלק של בעיית הערך החסר – בעיה מס׳ 2.

רמת הביצוע של התלמידים בשתי הבעיות הראשונות אינה יכולה להישפט רק כתוצאה של הוראת יחס ופרופורציה בכיתה. התלמידים נתקלים במצבי השוואה גם בחיי היום–יום. חוקרים רבים טוענים, שאסטרטגיות ותהליכים הננקטים על–ידי תלמידים, מתפתחים באופן בלתי תלוי בהוראה, כלומר תלמידים מפעילים אינטואיציה מתמטית או מערכת ידע בלתי פורמלית (Post et al., 1988; Streefland, 1985; Treffers & Goffree, 1985).

טבלה 2. ממצאים על בעיית קצב מס׳ 1 (הנתונים באחוזים)

	תשובה נכונה			תשובה לא נכונה			אין תשובה כלל
קבוצה	רק תשובה נכונה	עם הסבר נכון	עם הסבר לא נכון	רק תשובה לא נכונה	עם חשיבה נכונה	עם חשיבה לא נכונה	מקום ריק
CMP	1	57	5	3	20	10	4
ביקורת	4	32	14	4	10	32	4

טבלה 3. ממצאים על בעיית קצב מס׳ 2 (הנתונים באחוזים)

	תשובה נכונה			תשובה לא נכונה			אין תשובה כלל
קבוצה	רק תשובה נכונה	עם הסבר נכון	עם הסבר לא נכון	רק תשובה לא נכונה	עם חשיבה נכונה	עם חשיבה לא נכונה	מקום ריק
CMP	4	72	0	1	12	7	4
ביקורת	2	44	0	8	22	11	13

נושא זה נלמד הן בתכנית הלימודים המסורתית והן בתכנית הלימודים החדשה – CMP, אבל בגישות שונות. לכן, ניתן להסיק כי ההצלחה הרבה של תלמידי ה–CMP, לפחות בחלקה, היא בשל הסביבה הלימודית המיוחדת והגישה של פתרון בעיות בצירוף השיח המתמטי (Discourse) הקיימים בתכנית הלימודים של ה–CMP.

השוואת ההצלחה של תלמידים בבעיות מס׳ 3 ו–4:
בשתי שאלות אלו, מסוג השוואה מספרית, נדרש ידע זהה לגבי קצבים הקשורים למרחק וזמן–השוואת מהירויות על פי זמן ודרך נתונים. בטבלה 4 מופיעים הממצאים לגבי שאלה 3, ובטבלה 5 מופיעים הממצאים לגבי שאלה 4.

מטבלאות אלה ניתן לראות שלמרות ששתי השאלות דומות בתוכן, ההצלחה בשני המדגמים בפתרון שאלה 3 הייתה רבה מזו של פתרון שאלה 4. תלמידי CMP ענו נכון ב–65% מהמקרים על שאלה מס׳ 3 ורק ב–32% מהמקרים על שאלה מס׳ 4. תלמידי הביקורת ענו נכון רק ב–34% ו–7% בהתאמה. כנראה ששאלה מס׳ 4 הייתה יותר קשה, משום שהיא כוללת גם שברים עשרוניים וגם שברים פשוטים לייצוג זמן. שוב, כפי שדווח בספרות המחקרית, מובלטת ההשפעה של מבנה המספר על ביצוע מטלות העוסקות בפרופורציה. אולם, כפי שנראה בהמשך, את הגורם לשגיאות התלמידים אי–אפשר לתלות רק בקושי בחישובים האריתמטיים.

בדיקה זהירה של תשובות התלמידים מראה, שרוב התשובות השגויות משני המדגמים נובעות מבלבול בין מרחק ליחידת זמן ובין זמן ליחידת מרחק. בשאלה מס׳ 3, תלמידים רבים חילקו את המספר הגדול יותר(20 דקות) במספר הקטן יותר(7 ק"מ), הם קיבלו דקות לק״מ, אבל סברו שהם חישבו ק״מ לשעה. מקרים אלו סומנו כתשובה לא נכונה בתת–קטגוריה של ״חשיבה נכונה״. ניתן לשער שבשיטת ההוראה המסורתית, נותנים מספר גדול של ק״מ ומספר קטן של שעות, מה שמאפשר לתלמידים להגיע לתשובה נכונה, גם מבלי להבין בדיוק את מהות השאלה. ראוי שמורים ישתמשו ביחידות מגוונות של מרחק וזמן בעת ההוראה של פתרון בעיות, כך שהתלמידים יוכלו, אכן, להבין את המבנה היסודי של היחסים, ולא יפתרו בעיות על–פי תבנית שגורה של ״חילוק מספר גדול במספר קטן״.

מטבלאות 4 ו–5 ניתן לראות גם שתלמידי CMP הצליחו באופן משמעותי טוב יותר מאשר תלמידי הביקורת בשתי הבעיות מס׳ 3 ו–4. שוב, ניתן להסיק, כי רמת הביצוע הגבוהה של תלמידי CMP נובעת מגישת התכנית לפתרון בעיות, שלפיה התלמידים בונים את ההבנה שלהם לגבי מבנים מתמטיים מרכזיים, יותר מאשר מתרגלים מתכונים אלגוריתמיים פורמליים.

טבלה 4. ממצאים על בעיית קצב מס׳ 3 (הנתונים באחוזים)

	תשובה נכונה			תשובה לא נכונה			אין תשובה כלל
קבוצה	רק תשובה נכונה	עם הסבר נכון	עם הסבר לא נכון	רק תשובה לא נכונה	עם חשיבה נכונה	עם חשיבה לא נכונה	מקום ריק
CMP	2	65	5	0	16	10	2
ביקורת	10	34	17	0	10	25	4

טבלה 5. ממצאים על בעיית קצב מס׳ 4 (הנתונים באחוזים)

	תשובה נכונה			תשובה לא נכונה			אין תשובה כלל
קבוצה	רק תשובה נכונה	עם הסבר נכון	עם הסבר לא נכון	רק תשובה לא נכונה	עם חשיבה נכונה	עם חשיבה לא נכונה	מקום ריק
CMP	5	32	16	3	14	14	16
ביקורת	5	7	40	2	7	25	14

חשיבות ההסבר שהתלמידים מתבקשים לתת בולטת במיוחד בתת-קטגוריה של "תשובה נכונה עם הסבר לא נכון".
לדוגמה, בקבוצת הביקורת, בבעיה מס' 4, 40% של המדגם ענו נכון בקובעם, שמקס ועליזה רכבו מהר יותר בדרך חזרה, אבל הנימוקים שלהם היו לא נכונים. כך שבבחינה רגילה במתמטיקה, שבה אין מתבקשים לנמק את התשובה, תלמידים אלו יצליחו יפה, אך התפיסות השגויות שלהם לא יאותרו ולא יתוקנו.

הערות על בעיה מס' 5

בטבלה 6 מופיעות תוצאות התלמידים בבעיה מס' 5.
בעיה מס' 5 עוסקת בצפיפות של חתולים מסוג Feral בשתי ערים. פרט להקשר, בעיה זו נראית דומה מאוד לבעיה מס' 3. בשתי הבעיות נדרשות השוואות מספריות ומשתמשים במספרים שלמים, אך המספרים בשאלת הצפיפות גדולים יותר.
רמת ההצלחה של תלמידי CMP בשאלה זו הייתה 37% לעומת 23% של תלמידי הביקורת. בנוסף, 25% מתלמידי CMP ו-33% מתלמידי הביקורת ענו את התשובה הנכונה, אך ההסברים שלהם היו שגויים לחלוטין.
בהשוואה לבעיה מס' 3, הדומה לבעיה מס' 5, רמת ההצלחה בשאלת הצפיפות ירדה באופן משמעותי. סיבה אפשרית לפער זה יכולה להיות חוסר ההיכרות עם הקונטקסט. תלמידי כיתות ז' משני המדגמים מכירים מכוניות, מרחקים ומהירויות, יותר מאשר אוכלוסיות, שטח וצפיפות. סיבה משנית יכולה להיות השימוש במספרים גדולים יותר בבעיית הצפיפות. שני הגורמים הללו אכן מדווחים בספרות המקצועית כמשפיעים על רמת הביצוע של תלמידים בגיל ההתבגרות. (Tourniaire & Pulos, 1985; Cramer et al., 1993).

ניתוח אסטרטגיות הפתרון של התלמידים:

על מנת להבין יותר לעומק את הידע בחשיבה פרופורציונלית, שנרכש על-ידי התלמידים בכל אחת מהתכניות, ננתח את תוכנן של תשובות התלמידים, וכך נגלה את מגוון הגישות שהשתמשו בהן לפתרון הבעיות.
בהתבסס על ניתוח התוכן של תשובות התלמידים ועל הראיונות שנערכו לאחר מכן, זוהו תשע אסטרטגיות שונות (נכונות ושגויות) בהתמודדות התלמידים עם בעיית ההשוואה המספרית. להלן נציין רק את רשימת האסטרטגיות, בצירוף דוגמה אחת מתוך תשובות התלמידים בפתרון בעיה 1.
כל המעוניין בדוגמאות ובהסברים נוספים ימצאם במאמר המקורי באנגלית בעמודים 258-263.

האסטרטגיות הן:

1. השוואת היחסים של שני משתנים שונים

לדוגמה: פטל $2.00 : 16 = 12.5$ 12.5 ש"ח ליחידה
אשכוליות $1.60 : 12 = 13.3$ 13.3 ש"ח ליחידה
לא, הבחירה שלהם לא הייתה המוצלחת ביותר מבחינה כלכלית.

תלמיד זה השתמש באסטרטגיה של 'מחיר ליחידה'.

2. השוואת יחסים של אותו משתנה

לדוגמה: $16 : 12 = 1(4)$
$2.00 : 1.60 = 1(40)$
כן, הם עשו את הבחירה הנכונה.

3. השוואת המחיר של אותה כמות - על-ידי מציאת כמויות עם מחלק משותף או כפולה משותפת, כמו 'מחיר ליחידה'

לדוגמה: מציאת המחיר עבור 16 שקיות

$$\frac{1.60₪}{3} = 0.533...$$

$1.6 + 0.53 = 2.13$
פטל- 2.00₪ עבור 16 שקיות.
אשכוליות- 2.13₪ עבור 16 שקיות.

4. השוואת הכמויות עבור אותו המחיר - על-ידי מציאת מחירים עם גורם משותף או כפולה משותפת, כמו 'יחידה למחיר'

לדוגמה, מציאת הכמות עבור 1 שקל:
$\frac{16}{2} = 8$ 8 שקיות מיץ פטל עבור שקל.
$\frac{12}{1.60} = 7.5$ 7.5 שקיות מיץ אשכוליות עבור שקל.

טבלה 6. ממצאים על בעיית קצב מס' 5

	תשובה נכונה			תשובה לא נכונה			אין תשובה כלל
קבוצה	רק תשובה נכונה	עם הסבר נכון	עם הסבר לא נכון	רק תשובה לא נכונה	עם חשיבה נכונה	עם חשיבה לא נכונה	מקום ריק
CMP	2	37	25	2	11	8	15
ביקורת	7	23	33	7	0	26	4

5. אסטרטגיית "בנייה כלפי מעלה" – "Building Up" Strategy

לדוגמה:

פטל		אשכוליות	
₪	שקיות	₪	שקיות
2	16	1.6	12
	32	3.2	24
6	48		36
		6.4	48

לא, הם לא, כי 48 שקיות מיץ פטל עולות 6 ₪, ומיץ אשכוליות עולה 6.40 ₪.

6. בדיקת היחס של ההפרשים בין אותו המשתנה

תלמיד א׳:

$$\begin{array}{r} 16 \\ -\,12 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2.00 \\ -\,1.60 \\ \hline 0.40 \end{array}$$

לא

תלמיד ב׳:

$$\begin{array}{r} 2.00 \\ -\,1.60 \\ \hline 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ -\,12 \\ \hline 4 \end{array}$$

40 אג׳ ... כן

7. התייחסות למספרים, ולא להקשר של בעיה נתונה

לדוגמה:
כן.
1.60 x 12 = 19.2
2.00 x 16 = 32

8. התייחסות רק למשתנה אחד על ידי התעלמות מחלק של האינפורמציה בבעיה

לדוגמה: לא, כי פטל הוא זול יותר, כי יש לו יותר שקיות.

9. תשובות רגשיות – Affective Responses

לדוגמה: הבחירה שלהם לא הייתה טובה, כי מה אם יש ילדים שלא אוהבים מיץ אשכוליות.

נוסף לכך היו מקרים שבהם השיטה לא הייתה ברורה, ניתנה תשובה אבל לא הוצגה שיטה או לא ניתנה תשובה כלל. מגוון התשובות והאסטרטגיות בהן נקטו התלמידים, מצביע על המורכבות של תפיסות התלמידים, ועל מצב שיכול להתקבל בכל כיתה בה שאלות החשיבה הפרופורציונלית תהיינה מוצגות.

יש לציין כי קרוב לוודאי שהגישה היעילה ביותר להשוואת המחירים בבעיה מספר 1 היא האסטרטגיה של "קצב ליחידה" (Unit Rate). תלמידי ה–CMP השתמשו באסטרטגיה זו הרבה יותר מאשר תלמידי הביקורת.

לפיכך, ייתכן והוראה המעודדת תלמידים לבנות את החשיבה הפרופורציונלית שלהם, יכולה גם לעזור להם למצוא לעצמם את האסטרטגיה האופטימלית לפתרון בעיות.

6. סיכום, מסקנות והשלכות

- תלמידי תכנית הלימודים החדשה היו טובים בהרבה מתלמידי התכנית המסורתית במתן הסברים טובים בכתב ובעל פה (בעת הריאיונות) לתשובותיהם.
- נראה שהגישה לפתרון בעיות, השיח בכיתה, והקישוריות בין נושאים שונים, תורמים ליכולת טובה יותר של תלמידי הרפורמה.
- כאשר תלמידים מתבקשים להוסיף נימוקים והסברים, רובם נענים לכך.
- אחוז ניכר מהתלמידים יכול לקבל ניקוד על ידע המבוסס על חשיבה שגויה, בעוד אחרים חושבים נכון, אבל אינם מסוגלים להגיע לתשובה הסופית. לפיכך נחוץ לבדוק גם את ההסברים ודרך העבודה, מעבר לתשובות הסופיות.
- האסטרטגיה / הגישה של קצב ליחידה Unit Rate בולטת בחשיבותה ובשימוש הנפוץ בה.
- רמת ההיכרות עם הקונטקסט של הבעיות וסוג/מבנה המספרים משפיעים על הקשיים שבהם נתקלים התלמידים. מורים צריכים להיות מודעים לכך ולפעול בהתאם.
- מרבית המחקרים והחוקרים מגיעים למסקנה, שלא קיים מסלול קווי של הוראה ולמידה לגבי המושג הבלתי אחיד יחס והמבון המורכב של חשיבה פרופורציונלית. הממצאים מורים, שנחוץ לעבוד על התפתחות החשיבה הפרופורציונלית באמצעות הוראה נרחבת במהלך מספר שנים בכיתות ה׳–ח׳.

לסיכום:

מעודדת העבודה, שתלמידים מוצאים דרכים רבות ואסטרטגיות שונות לפתרון בעיות. כאשר ניתן להם זמן לחקור ולדון בבעיות פרופורציה אותנטיות, הם מסוגלים לפתח מגוון כלים שיעזור להם למצוא פתרונות יצירתיים והסברים מתאימים. אנשי החינוך המתמטי והמורים צריכים להמשיך לפתח ולהרחיב את תחום הידע של החשיבה הפרופורציונלית.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportions: Research implications. In D. T. Owens *(Ed.), Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics,* (pp. 159-178). New York: MacMillan Publishing Company.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing: A Preface to a Science of Mathematical Education.* Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Strategies, (pp. 133-209). Dordrecht: D. Reidel.

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. In T. Post (Ed.), *Teaching Mathematics in Grades K - 8: Research Based Methods,* (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958) *The Growth of Logical Thinking From Childhood to Adolescence,* New York: Basic Books, Inc.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983a). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics 14,* 219-233.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983b). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* (pp. 45-90). New York: Academic Press, Inc.

Lawton, C.A. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education 24,* 460-466.

National Council of Teachers of Mathematics, (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics, (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics, (1995). *Assessment Standards for Mathematics.* Reston, VA: The Council.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics,* Cambridge University Press.

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understanding. In A. Coxford, & A. Schute (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics,* (pp. 78-90). Reston, VA: The Council.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards . . . a theory). Part II--The outline of the long term learning process, *Educational Studies in Mathematics 16,* 75-94.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics 17*, 401-412.

Tourniaire F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics 16,* 181-204.

Treffers, A., & Goffree, F. (1985) Rational analysis of realistic mathematics education-The Wiskobas Program. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference For the Psychology of Mathematics Education,* Noordwijkerhout, The Netherlands.