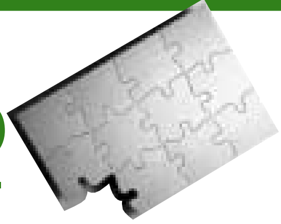
משחקי חשבון



המירוץ עד ל–37
עוד משחק מתמטי לשילוב בכיתה

גרייסי ויניצקי לנדמן, אורנים–בית הספר לחינוך של התנועה הקיבוצית

להלן תיאור של משחק מתמטי לשני שחקנים, שניתן לשלבו בשיעור מתמטיקה. משחק זה נבחר מפני שהוא מייצג משפחה שלמה של משחקים המוכרים בשם "נים" (NIM), ומכיוון שעל–ידי שינויים קלים ניתן להתאימו לכיתות שונות. מידע נוסף על משחקי נים ניתן למצוא באתר [1]. דוגמאות אחרות למשחקים מתמטיים ניתן למצוא בויניצקי–לנדמן (1999, 2001). בשורות הבאות מוצגים: א. כללי המשחק, ב. דוגמאות של משחקים, ג. ניתוח המשחק ותיאור אסטרטגיה לניצחון. ד. תרגילים לקראת הכללה של אסטרטגיית הניצחון. ה. גרסה שונה של המשחק והאופן בו משתנה האסטרטגיה לניצחון במשחק החדש.

א. כללי המשחק

1. שחקן א׳ בוחר מספר טבעי קטן מ–6.
2. שחקן ב׳ בוחר מספר טבעי קטן מ–6 ומוסיף אותו למספר שבחר שחקן א׳.
3. השחקנים ממשיכים לשחק לסירוגין.
4. המשחק מסתיים כאשר אחד השחקנים מגיע למספר 37 שחקן זה הוא המנצח.

ב. דוגמאות

להלן מוצגות שתי דוגמאות של משחק לפי החוקים שתוארו לעיל.

דוגמה 1	**דוגמה 2**
שחקן א׳: 5	שחקן א׳: 5
שחקן ב׳: 9 (5+4=9)	שחקן ב׳: 10 (5+5=10)
שחקן א׳: 12 (9+3=12)	שחקן א׳: 14 (10+4=14)
שחקן ב׳: 17 (12+5=17)	שחקן ב׳: 19 (14+5=19)
שחקן א׳: 21 (17+4=21)	שחקן א׳: 21 (19+2=21)
שחקן ב׳: 25 (21+4=25)	שחקן ב׳: 21 (21+4=25)
שחקן א׳: 30 (25+5=30)	שחקן א׳: 30 (25+5=30)
שחקן ב׳: 34 (30+4=34)	שחקן ב׳: 31 (30+1=31)
שחקן א׳: 37 (34+3=37)	שחקן א׳: 35 (31+4=35)
	שחקן ב׳: 37 (35+2=37)
מסקנה: שחקן א׳ מנצח.	**מסקנה: שחקן ב׳ מנצח.**

שתי הדוגמאות מראות שבמשחק זה יכול לנצח השחקן הראשון (שחקן א׳) או השחקן השני (שחקן ב׳). נשאלת השאלה: האם קיימת סדרה של מהלכים שעשויה להוביל אחד מהשחקנים לניצחון? אם כן, מהי סדרה זו? לאיזה שחקן יש אפשרות להשתמש בסדרת מהלכים זו? מתן תשובה לשאלות אלו מחייב ניתוח המשחק ותיאור אסטרטגיית הניצחון.

ג. ניתוח המשחק ותיאור אסטרטגיית הניצחון

מהדוגמה השנייה שהוצגה לעיל עולה כי במשחק זה המספר **31** ממלא תפקיד מכריע: שחקן שמגיע למספר זה יכול להבטיח לעצמו את הניצחון. מסקנה זו נובעת מהעובדה שאם שחקן מסויים מגיע ל–31, השחקן האחר בתורו יכול להוסיף 1, 2, 3, 4 או 5 בלבד, ולהגיד 32, 33, 34, 35 או 36 בהתאמה, אך אין לו אפשרות להגיע בתורו זה למספר 37. לכל צעד של השחקן האחד, לשחקן שאמר 31 יש אפשרות להשלים ולהגיע ל–37 ועל-ידי כך לנצח. במילים אחרות: השחקן האחד לא יכול לגרום ל"קפיצה" של 6 יחידות, אבל השחקן השני יכול לבחור את צעדו כך שסכום צעד זה עם הצעד האחרון של השחקן האחר הוא 6.

אם כך, המטרה כעת היא "לתפוס" את המספר 31. בדומה לתהליך הקודם, אפשר להראות שהמספר 6–31 הוא מספר המבטיח ניצחון לשחקן המגיע אליו. לכן, 25 הוא מספר מנצח.

באותו אופן, 19 הוא מספר מנצח וגם המספרים 13, 7 ו–1.

מכל האמור לעיל עולה כי: השחקן הראשון יכול להבטיח לעצמו ניצחון אם הוא בוחר בצעדו הראשון את המספר 1, ובאופן בלתי תלוי בצעדיו של השחקן האחר, הוא מגיע למספרים 7, 13, 19, 25, 31 ובסופו של דבר, 37. אם שחקן לא רוצה "לחשוף" את האסטרטגיה שלו, הוא יכול לנצח אם הוא מצליח לבחור מספר כלשהו מהסדרה המנצחת, אבל במקרה זה יתכן שהשחקן האחר לא יאפשר לו לעשות זאת, אם הוא בעצמו בוחר מספרים אלה.

דוגמה:

שחקן א׳: 5

שחקן ב׳: 9 (9=4+5)

שחקן א׳: 14 (14=5+9)

שחקן ב׳: 18 (18=4+14)

שחקן א׳: ?

בשלב זה שחקן א׳ יכול להבטיח לעצמו את הניצחון אם הוא מגיע למספר 19. אם הוא בוחר במספר אחר, שחקן ב׳ יכול לנצח.

ד. תרגילים לקראת הכללה של אסטרטגיית הניצחון

1. אם המטרה היא המספר 38 ולא 37 כמו במשחק הקודם, סדרת המספרים המנצחים היא: 32, 26, 20, 14, 8, ו–2. בדקו זאת.

2. אם המטרה היא המספר 36, מהי סדרת המספרים המנצחים? במקרה זה כדאי להיות שחקן שני, בדקו מדוע.

3. אם המטרה היא המספר הטבעי N, השארית המתקבלת מהחלוקה של המספר N ב–6 קובעת את הצעד הראשון. אם שארית זו שונה מ–0, כדאי להיות שחקן ראשון ולבחור כצעד ראשון שארית זו. אחרת, כדאי להיות שחקן שני ולהגיע בכל צעד לכפולות של 6.

4. אם מותר לבחור מספרים טבעיים קטנים מ–4 והמטרה היא המספר 37:
המספר 32 מבטיח ניצחון. מצאו את סדרת המספרים המנצחים במקרה זה.

המסקנה הכללית מכל האמור לעיל היא: אם המטרה היא המספר הטבעי N ומותר לבחור מספרים טבעיים קטנים מ–n, סדרת המספרים המנצחת היא סדרה חשבונית שהפרשה n ואיברה הראשון הוא השארית המתקבלת מחלוקה של N ב–n.

בנוסף לערך הלימודי של משחק זה כמשחק אסטרטגי באופן כללי, יש בו ערך לימודי משום שבעקבותיו נוצרות הזדמנויות אמיתיות להדגים ולדון במושגים כמו: סדרה, סדרה חשבונית, תבנית מספר וגם בסוג החשיבה הנקרא חשיבה רקורסיבית.

ה. גירסה שונה של המשחק ואסטרטגיה לניצחון במשחק החדש

לכללי המשחק הקודם, נוסיף כלל חדש: אם שחקן אחד הוסיף מספר טבעי קטן מ–6, השחקן האחר חייב להוסיף מספר **שונה** ממנו. (Cornelius, 1992).

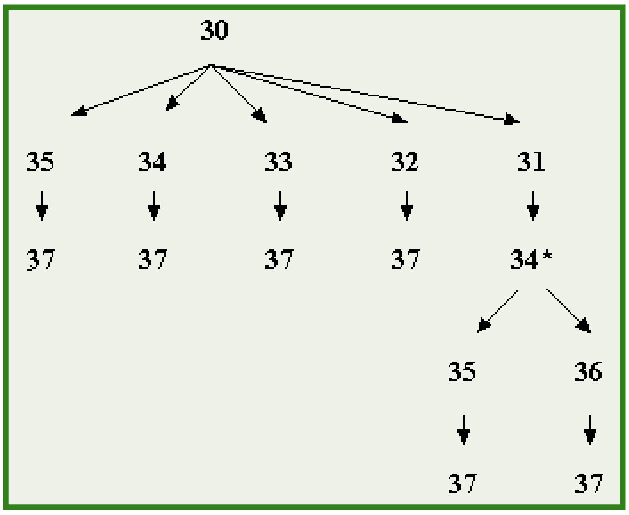
דוגמה: אם שחקן מוסיף 5 כדי לעבור מ–27 ל–32, לשחקן ב׳–בגירסה החדשה של המשחק–לא יתאפשר להגיע למספר 37 כי אסור לו להוסיף 5.

השאלה המתבקשת היא: איך משתנה אסטרטגיית הניצחון לאחר שינוי זה בכללי המשחק?

בגרסה הקודמת של המשחק, המספר 31 היה מספר מנצח אבל בגרסה הזאת לא.

להלן ההסבר:

נניח ששחקן א׳ מגיע למספר 31. אם שחקן ב׳ מוסיף 3 ומגיע ל–34, הוא מונע משחקן א׳ מלהגיע ל–37. שחקן א׳ יכול להוסיף 1 או 2 בלבד, שחקן ב׳, בתורו, מגיע ל–37 ומנצח. לכן, בניגוד למשחק הקודם, שחקן שמגיע ל–31 לא יכול להיות בטוח שהוא המנצח. כיוון שהאנלוגיה למשחק המקורי לא עובדת, נשאלת השאלה: האם בגרסה חדשה זו של המשחק קיימים מספרים אחרים שכן מבטיחים נצחון? התשובה לשאלה זו מוצגת בפסקה הבאה.



* אם שחקן א׳ לא אומר 34, אז שחקן ב׳ בתורו יגיע ל–37 והוא ינצח. לכן, שחקן א׳ חייב להגיד 34 ועל–ידי כך הוא מונע משחקן ב׳ את האפשרות להוסיף 3 ולהגיע ל–37.

משפט 1: 30 הוא מספר מנצח

כדי להוכיח טענה זו ניתן לבנות עץ של כל האפשרויות, ולהראות שכל צעד ששחקן ב׳ יבחר, לאחר ששחקן א׳ הגיע ל–30 יוביל את שחקן א׳ לניצחון.

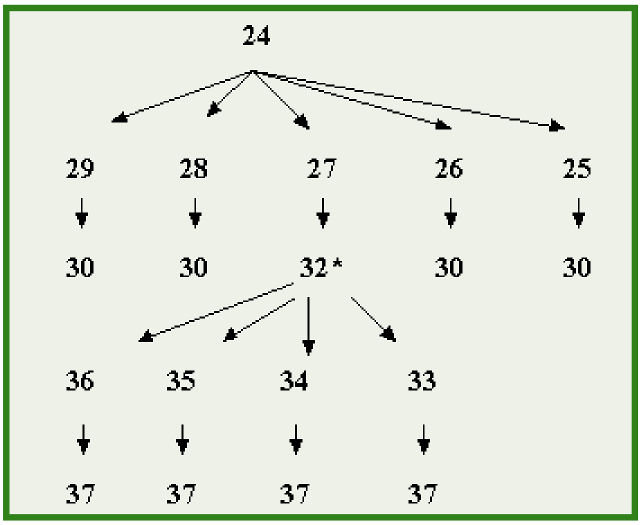
אם חושבים בצורה אנלוגית למשחק הקודם, ניתן לשער שסדרת המספרים המנצחים מתגלה לאחר חישוב של הפרשים קבועים: במשחק המקורי סדרת המספרים המנצחים היא: 31, 25, 19, 13, 7, 1 (הפרש של 6 יחידות בין כל שני מספרים מנצחים עוקבים). בגירסה החדשה התגלה ש–30 הוא מספר מנצח. טבעי לשאול האם 23 שהוא 7–30 הוא מספר מנצח בגרסה החדשה של המשחק?

כדי לענות על שאלה זו אפשר לבנות עץ ולבדוק מה הן האפשרויות המתקבלות, אך במקרה זה מספיק להראות שקיים מהלך לשחקן המשחק אחרי זה שהגיע למספר 23, אשר מבטיח לו נצחון, וכך נוכיח שהמספר 23 אינו מספר מנצח. לדוגמה: אם שחקן א׳ הגיע ל–23 שחקן ב׳ יכול להגיע ל–24 (1+23). במקרה זה, אם שחקן א׳ לא אומר 27, שחקן ב׳ יכול להגיע למספר 30 ולנצח לפי משפט 1. לכן, במקרה זה, שחקן א׳ חייב להגיד 27. אולם במקרה זה שחקן ב׳ יכול לחשב (5+27) ולהגיע ל–32 ולמנוע משחקן א׳ להגיע ל–37 (5+32), כי כזכור, אסור לו להוסיף אותו מספר כמו השחקן הקודם. לכן, המספר 23 איננו מספר מנצח, ומכאן עולה המסקנה שבסדרת המספרים המנצחים במשחק החדש, ההפרש בין שני מספרים מנצחים אינו קבוע.

אבל, האם קיימים עוד מספרים מנצחים?

משפט 2: 24 הוא מספר מנצח.

נציג הוכחה למשפט זה באמצעות עץ:



* אם שחקן א׳ לא אומר 32, אלא 25, 26, 28 או 29 שהן האפשרויות היחידות שיש לו, אז שחקן ב׳ בתורו יגיד 30 וכך הוא ינצח לפי משפט 1. לכן, שחקן א 'חייב להגיד 32 ועל–ידי כך הוא מונע משחקן ב׳: א) להגיד 30 (כי עליו לחבר מספר חיובי), ב) להגיד, 37 כי אסור לו להוסיף 5. מהעץ המוצג לעיל עולה שאם שחקן א׳ מגיע ל–24, הוא יכול להבטיח לעצמו להגיע למספר 30 (ולנצח לפי משפט 1) או למספר 37 (ולנצח לפי כללי המשחק).

משפט 3: 17 הוא מספר מנצח.

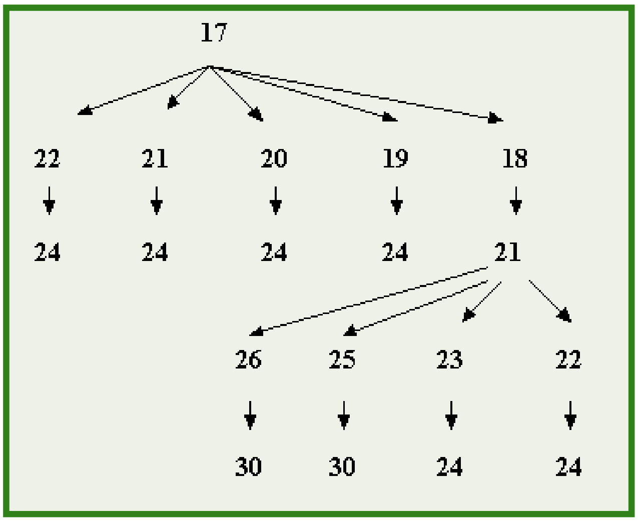
שחקן א׳ חייב לומר 21, ועל-ידי כך הוא מונע משחקן ב׳ להגיד 24, כי אסור לו להוסיף 3.

מהעץ המוצג לעיל עולה שאם שחקן א 'מגיע ל–17, לא משנה איזה מהלך שחקן ב׳ יבחר, שחקן א 'יכול להבטיח לעצמו להגיע למספר24 (ולנצח לפי משפט 2) או למספר 30 (ולנצח לפי משפט 1).

באותו אופן אפשר לגלות שהמספרים 11 ו–4 הם מספרים מנצחים.

לכן, במשחק זה כדאי להיות שחקן ראשון ולבחור את המספר 4, ולאחר מכן את המספרים מהסדרה המנצחת: 11, 17, 24, 30.

מסקנה: ניתן להבחין ששינוי "קל" בכללי המשחק מוביל לשינוי בסדרת המספרים המנצחים: אם המטרה היא 37 ומותר להוסיף מספרים טבעיים קטנים מ–6, במשחק המקורי סדרת המספרים המנצחים היא סדרה חשבונית שהפרשה 6 והיא: 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37 ובמשחק החדש סדרת המספרים המנצחים מורכבת משתי סדרות חשבוניות בעלות הפרש קבוע- 13, ואיברם הראשון הוא 4 או 11 בהתאמה.



ו. תרגילים לקראת הכללה של אסטרטגיית הניצחון

1. אם המטרה היא לא המספר 37 אלא המספר 36, סדרת המספרים המנצחים היא: 3, 10, 16, 23, 29 בדקו זאת.

2. אם המטרה היא המספר 39, מהי סדרת המספרים המנצחים? במקרה זה כדאי להיות שחקן שני, בדקו זאת.

3. אם המטרה היא המספר הטבעי N אז: א) N-7 הוא מספר מנצח; ב) 6-(N-7) מספר מנצח; ג) 7-(N-13) מנצח וכו׳.

4. אם מותר לבחור מספרים טבעיים קטנים מ-8, והמטרה היא המספר 37 בדקו: שהמספר 28 מבטיח ניצחון. מצאו את סדרת המספרים המנצחים במקרה זה.

5. אם המטרה היא 37, ומותר לבחור מספרים טבעיים קטנים מ-5, לא קשה לזהות שסדרת המספרים המנצחים במשחק החדש היא אותה סדרה שנמצאה בסעיף ד׳ של המשחק המקורי, בדקו זאת. הסיבה לכך היא ש-5 הוא מספר אי-זוגי, ולכל צעד ששחקן אחד עושה, השחקן האחר יכול להשלימו ל-5 על-ידי צעד שונה מזה שהשחקן האחר עשה. שיקול דומה אפשר להפעיל למציאת המספרים המנצחים במקרה של משחק בו ניתן לבחור מספרים טבעיים קטנים מ-$2n+1$.

ביבליוגרפיה

ויניצקי-לנדמן, ג׳ (1999). לחלק ולחסר – משחק מתמטי. **מספר חזק 17**, 31-34.

ויניצקי-לנדמן, ג׳ (2001). מטבעות לא שקטים – משחק מתמטי לשילוב בכיתה **מספר חזק 2000**, 2, 12-15.

[1] http://spdcc.com:8431/nim.html

Cornelius, M., & Parr,A. (1992). *What's your game? A Resource Book for Mathematical Activities* (p. 16). Cambridge University Press.