בנואה מנדלברוט

BENOIT MANDELBROT

מרגרט פרוים, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה, מכללת תלפיות

בגלריה של המתמטיקאים שכיכבו במדור זה עד עתה היו דמויות מכל תקופות ההיסטוריה, החל מהזמנים העתיקים ביותר, דמויות שפילסו את הדרך למתמטיקה של היום. המתמטיקה בהתפתחותה היא מדע חי, מדע שעל בסיס גילוים והוכחות קודמים הגיע לממדים שפיתחו דרך ליישומים רבי עוצמה של היום ואפילו של המחר. הפעם בחרתי לכתוב על מתמטיקאי בן זמננו, שתגליותיו הן עדות לכך שהמתמטיקה בהמשכיותה מקבלת ממדים וכיוונים חדשים אפילו לנגד עינינו.

שחמט, מפות... ואינטואיציה גיאומטרית

בנואה מנדלברוט נולד בשנת 1924, בוורשה למשפחה יהודית מליטא. אביו, צ'רלס, התפרנס מייצור ומכירה של בגדים ובנואה מתאר אותו כאדם מאוד משכיל, צאצא של שורה ארוכה של מלומדים.

צ'רלס, שהיה קשור מאוד למשפחתו עזר בחינוכו של אחיו, שלום, הצעיר ממנו ב-16 שנים. שלום במרוצת הזמן יהפוך למתמטיקאי ידוע. אמו של בנואה, בלה, הייתה רופאת שיניים, מקצוע יוצא דופן לאישה באותם הזמנים.

מחשש לחשוף את בנה הצעיר למגפות הרבות שפקדו אז את האזור, החליטה אמו לחנך את בנואה בבית ולא במסגרת בית הספר היסודי. לימים, בנואה המתמטיקאי, ייחס את הצלחתו במתמטיקה לחינוך הלא קונבנציונאלי הזה, חינוך שאיפשר לו לחשוב ולהתפתח באופן מקורי ובכיוונים לא סטנדרטיים, שאינם "מוטבעים על-ידי הלימוד בבית הספר". חינוכו הופקד בידי דוד מובטל, שלא דרש מתלמידו שליטה מושלמת בלוח הכפל וגם לא ידיעת האלף-בית על בוריה, אך עודד אותו לקרוא ספרים, להצטיין בשחמט ולעסוק בקריאת מפות מהאוסף של אביו; סך הכול הלימוד היה "כיף גדול", כפי שאמר המתמטיקאי לאחר שנים. מנדלברוט ניחן באינטואיציה גיאומטרית יוצאת דופן, אותה ייחס לשני התחביבים שהירבה לעסוק בהם בילדותו: שחמט ומפות.

לא לימדו אותי לחשוב באופן ממושמע ולכן...

בשנת 1936 עקב התגברות העוינות נגד היהודים, נאלצה משפחת מנדלברוט לעקור לפריס, שם התגורר דודו של בנואה, המתמטיקאי שלום מנדלברוט. במשך שלוש שנים למד בנואה בבית ספר תיכון בפריס, ואת הזמן הפנוי בילה בחברתו של דודו וחבריו המתמטיקאים.

בשנת 1940 הצבא הגרמני עמד לכבוש את פריס ומשפחתו של מנדלברוט נטשה את כל רכושה, מלבד כמה מזוודות ועברה לגור בעיר טול שבמרכז צרפת. בתקופה זו, דאגתה העיקרית של משפחתו הייתה לחמוק מהגרמנים ולכן החינוך שקיבל בנואה לא היה סדיר.

"אף פעם לא לימדו אותי לחשוב באופן ממושמע", הוא נהג לומר "ולכן הייתה לי אפשרות לעשות דברים בצורה שונה".

ביחד עם אחיו הצעיר הוא שוטט ברחבי צרפת, עבד כשוליית חרש כלים וטיפל בסוסים באחוזה ליד ליון אולם אף פעם לא שכח לקחת עימו את הספרים שאהב לקרוא. לימים הוא סיפר על ידידות עם מורים מצוינים, אנשים משכילים, שנקלעו גם הם לאותו מקום במנוסתם מפני הגרמנים והשפיעו על חינוכו.

כאשר פריס שוחררה, ניגש מנדלברוט לבחינות כניסה לשני בתי הספר הגבוהים, המובילים בתחום המדעים בצרפת: לאקול פוליטכניק (L'ecole Polytechnique) ולאקול נורמל (L'ecole Normale). הבחינות היו לא רק לאתגר אינטלקטואלי עבורו אך גם אתגר פיזי, כיוון שהיו מורכבות מסדרה ארוכה של מבחנים בכתב ובעל פה, שנערכו במשך חודש שלם. על אף היעדר ההכשרה הפורמאלית הדרושה עבר בנואה את המבחנים בהצלחה: את הבעיות באלגברה ובאנליזה הוא פתר בעזרת האינטואיציה הגיאומטרית הפנומנאלית שלו, ובבחינה בציור הצליח להדהים את בוחניו בהעתקו המושלם של הפסל "ונוס ממילו".

למצוא סדר...

מנדלברוט בחר ללמוד בבית הספר לאקול פוליטכניק כיוון שבית הספר השני, לאקול נורמל נשלט על ידי קבוצת מתמטיקאים שקראה לעצמה בורבקי (Bourbaki). בנואה לא אהב את השיטה האקסיומטית הדקדקנית של הקבוצה הזו, שצידדה במתמטיקה פורמאלית טהורה, השוללת שימוש באינטואיציה ובחוש הראייה.

בתקופה הזו חלומותיו היו רומנטיים ביסודם: "להיות הראשון שמסוגל למצוא סדר במקום שכל האחרים רואים רק כאוס", כפי שאמר מאוחר יותר.

בשנת 1947 קיבל מנדלברוט תואר בהנדסה ולאחר שנה השלים תואר שני באווירונאוטיקה. תיזת הדוקטורט שלו חוברה בהשפעתם של המתמטיקאים נורברט וינר (ממציא הקיברנטיקה) וג'ון פון נוימן (אבי תורת המשחקים) והעניקה לו את התואר בשנת 1952. שלוש שנים מאוחר יותר התחתן עם אלייט, ביולוגית במקצועה. במשך השנים נולדו להם שני ילדים: דידיה ולורן.

לאחר תקופה קצרה שבה שימש כפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת ג'נבה ונמנה בין משתתפי הסמינר של הפסיכולוג הנודע פיאז'ה, עבר להתגורר בארה"ב. הוא החליט לעזוב את החיים האוניברסיטאיים ולעבוד בצוות המחקר של החברה הבינלאומית למכונות עסקים– חברת י.ב.מ. "באתי רק לקיץ אחד ונשארתי 40 שנה", אמר המתמטיקאי בשנת 1998. התאגיד סיפק למנדלברוט סביבה פתוחה, בה יכול היה לעסוק בפיתוח רעיונות מקוריים, תוך כדי גיבוש תחומי התעניינותו השונים.

על מחירי הכותנה וגאויות הנילוס

עוד בתחילת עבודתו ב–י.ב.מ. התחיל מנדלברוט לחקור את השינויים שהתחוללו במחירי הכותנה במשך עשרות השנים האחרונות.

המודל הסטטיסטי המקובל המתאר את ההתפלגות של תופעות הוא "עקומת הפעמון", הנושאת את שמו של גאוס, עקומה שבה רוב הנתונים מצטברים באמצע, בקרבת נקודת הממוצע (ההתפלגות הנורמאלית).

הכלכלנים נוכחו לדעת שמודל זה לא התאים להתנהגות השינויים במחירי הכותנה ולכאורה השינויים נראו כאוטים, ללא שום סדר ובלתי ניתנים לחיזוי. בעזרת מחשבי י.ב.מ. הראה מנדלברוט שהדגם של השינויים היומיומיים במחירי הכותנה זהה לדגם של השינויים החודשיים במחירי הכותנה: ניתן לומר שהדגם נשמר ולא היה תלוי בבחירת קני המידה– יום או חודש.

בתחילת שנות השישים המתמטיקאי הפנה את התעניינותו לנושא אחר: השינויים במפלס המים בנהרות, ולהפתעתו הוא הבחין בהתנהגות מאוד דומה לזו של שינויי מחירי הכותנה.

מזה מאות שנים האנושות ניסתה לחזות את הגאויות בנהרות הגדולים, כמו הנילוס, על מנת למנוע מראש שיטפונות קשים שיהרסו את היבול. מנדלברוט מצא שהמודלים הסטטיסטיים הקיימים לא התאימו לנתונים המפורטים, שנאספו עוד מתקופת המצרים הקדמונים וגילה שקיימת קביעות בשינויי משך הזמן וגודל השיטפונות והבצורות. קביעות זאת קורית גם בקני מידה של עשרות שנים וגם בקני מידה של מאות שנים: ניתן היה להבחין בכך שמידת אי–הסדר נשמרת, נשארת קבועה בקני מידה שונים.

מעניין לספר פרט נוסף, מנדלברוט הכין שני סוגי גרפים של הגאויות: אחד המתבסס על התיאוריה שלו והשני המתבסס על הנתונים האמיתיים, והציג אותם להידרולוג בעל שם עולמי, מומחה לחקר המעטפת המימית של כדור הארץ. ההידרולוג, שלא ידע איזה מבין הגרפים שהוצגו לפניו הוא האמיתי, לא יכול היה להבחין בין שני סוגי הגרפים.

מה משותף לעננים ולפרעושים?

מלא סקרנות ותהייה, מנדלברוט הרהר בקשרים המוזרים שגילה בין שני נושאים, שנראו לכאורה שונים זה מזה, והתחיל להתבונן בדברים אחרים בטבע, כמו: צורות העננים וההרים, צורת הריאות בגוף האדם, דרך התפתלות הנהרות, צורות המכתשים בירח וגם צורת החוף של אנגליה.

מנדלברוט אהב לומר: "עננים הם לא כדורים, ההרים הם לא חרוטים, קווי החופים הם לא עגולים, קליפת העץ אינה חלקה והברק אינו נע בקו ישר". כוונתו הייתה לומר שהטבע מורכב מדי, ולכן המסגרת הפשוטה של הגיאומטריה האוקלידית אינה מתאימה לחקור אותו.

בתופעות הטבע ניתן להבחין בצירופים של שברי צורות המרכיבות צורות חדשות החוזרות על עצמן – מין תכונה של דמיון עצמי בקני מידה גדולים וקטנים.

ניתן לומר שהדגמים היו בעלי תכונת סימטריה מוזרה, לא מוכרת – סימטריה של הצורות על פני קני המידה השונים.

בעיני מנדלברוט מצאו חן מילותיו של הסופר ג'ונתן סוויפט:

> *"לפרעוש, אומרים לנו חוקרי הטבע,*
> *יש פרעושים קטנים היניקים ממנו דרך קבע*
> *ופרעושים קטנים מהם את הקטנים עוקצים,*
> *וכך נמשך התהליך עד כלות כל הקיצים."*

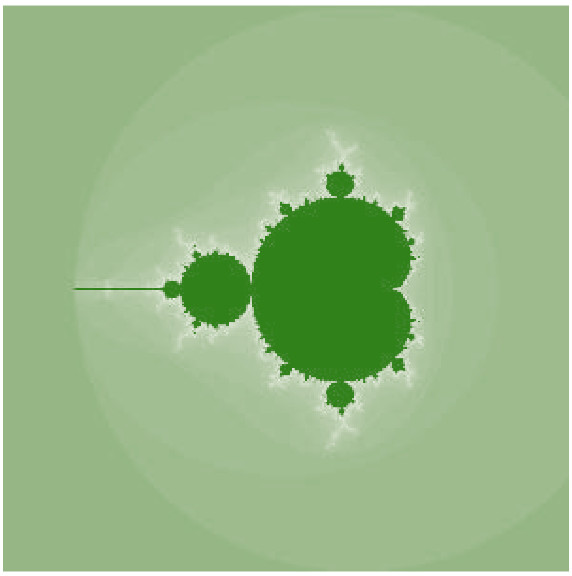
(מתוך הספר **כאוס**, מאת ג'יימס גליק, תרגום ע. לוטם, ספריית מעריב, 1991, עמ' 108).

כך נוצרה המילה פרקטל

מנדלברוט החליט שיש צורך במילה שתתאר את הצורות שחקר, צורות שבהן "החלקים הקטנים דומים לחלקים הגדולים", כפי שנהג לומר. הוא דפדף במילון הלטיני של בנו ומצא את המילה FRACTUS, שהיא שם תואר הגזור מהפועל FRANGERE, שפירושו בשפה הלטינית הוא לשבור.
הצליל נשמע לו מאוד מתאים והזכיר לו מילים באנגלית FRACTION – שבר בחשבון ו- FRACTURE – שבר ברפואה.
במילה פרקטל השתמש לראשונה מנדלברוט בספרו "האובייקטים הפרקטלים", שפורסם בשנת 1975.

מפלצות מוזרות

החל מסוף המאה ה–19, מתמטיקאים חשובים חקרו סגולות של נוסחאות שונות (הידועות כיום כתכונות פרקטליות), המובילות לצורות גיאומטריות מקוטעות שהתנהגו באופן מוזר. בין המתמטיקאים האלו היה גסטון ז'יוליה (Gaston Julia) אחד המורים המעולים של מנדלברוט בלאקול פוליטכניק בפריס.
ז'יוליה עבד עם פונקציות של משתנים מרוכבים. (מספר מרוכב הוא מספר שצורתו הכללית היא $z=a+bi$ כאשר a,b הם מספרים ממשיים ו–i הוא השורש הריבועי של 1-).
בשלב הראשון הוא הציב מספר מרוכב במקום המשתנה וחישב את התוצאה, לאחר מכן, בשלב השני, הציב במקום המשתנה את התשובה שהתקבלה בשלב הראשון וחישב את התוצאה החדשה, וכן הלאה, שוב ושוב (תהליך כזה נקרא תהליך רקורסיבי). מנדלברוט החל לחקור את הצורות המפותלות האלו, צורות שיצרו התהליכים הרקורסיביים, בהשתמשו ביתרונות המחשב (שלא היה קיים בתחילת המאה העשרים).



התובנה של מנדלברוט והאינטואיציה הגיאומטרית שלו עזרו לו לראות באובייקטים האלה ובעוד הרבה אחרים שגילה (הנקראים על שמו) לא עוד "מפלצות פתולוגיות מוזרות או שעשועי מתמטיקה", כפי שטענו אנשי אקדמיה רבים, אלא ציוני–דרך למתמטיקה חדשה בעלת שיטתיות והכללה באותה מידה כמו הגיאומטריה האוקלידית.
"אם הגיאומטריה שלי אומנם חולנית", אהב מנדלברוט לומר, "אז אנו חיים ביקום פתולוגי", והמשיך:
"המצאתי, פיתחתי ויישמתי בהרבה תחומים את הגאומטריה החדשה של הטבע, גיאומטריה שמביאה סדר לצורות ולתהליכים כאוטים, ונותנת אפשרות למדע המודרני לטפל בהתנהגות האקראית של תופעות הטבע".

החיתוך הריק...

באחת מהרצאותיו, כאשר המנחה הציג אותו כך: "לימד כלכלה בהרווארד, הנדסה בייל, פיסיולוגיה בבית הספר לרפואה על שם איינשטיין..." הגיב המתמטיקאי: "לעיתים קרובות, כשאני שומע את רשימת המשרות הקודמות שלי אני שואל את עצמי אם אני קיים. אין ספק שהחיתוך של כל הקבוצות האלה חייב להיות ריק".
מנדלברוט הצליח לנסח בשפת המתמטיקה את התכונה הפרקטלית המשותפת של תופעות הטבע ולהבליט את האספקטים הבין-תחומיים שלה.
אולי יש צורך להוסיף "קבוצות" חדשות כדי שהתמונה תהיה מלאה יותר?
מסתבר שיש עוד הרבה תחומים שניתן לחקור אותם בעזרת הפרקטלים:
מאופן התפשטות המגפות, המבנה המסובך של ריאות האדם, המבנים של העלים והעצים, עד לחקר ה–ד.נ.א. ואפילו פיזור הגלקסיות.
בגילויו בגיאומטריה הפרקטלית של הטבע הגשים המתמטיקאי בנואה מנדלברוט את חלום נעוריו: לגלות סדר נסתר במה שנראה ממבט ראשון ככאוס.
גם כעת, כאשר אתם קוראים שורות אלו, המתמטיקאי והסטודנטים הרבים שלו ממשיכים ליצור, לגלות, לעשות מתמטיקה ולעסוק ביישומיה הרבים.

מנדלברוט בישראל

בנואה מנדלברוט ביקר פעמים רבות בארצנו. במאמר שכתבה עבור JERUSALEM POST מדווחת העיתונאית ג'ודי סיאג'ל יצקוביץ על אחד מביקוריו.
התאריך: 25 במאי 1999
המקום: בית המלון לרום בירושלים.
האולם היה כל–כך גדוש בגאונים עד שהיה אפשר "לחתוך את ה–IQ בסכין".
האירוע: ועידה לכבוד 40 האנשים שזכו בפרס וולף היוקרתי, פרס שלעיתים קרובות מצביע על הזוכה העתידי בפרס נובל, אם כי במתמטיקה לא קיים פרס נובל.

עוד מדברי מנדלברוט

המתמטיקאי מתאר את היתרון שנתנה לו חברת י.ב.מ. כך: "היה פער של מאות שנים שבו השרטוט לא מילא שום תפקיד במתמטיקה, משום שהאפשרויות של היד, של העיפרון ושל הסרגל כבר מוצו עד תום. המחשב לא היה קיים".
ב–י.ב.מ. המחשב כמובן היה קיים ומנדלברוט ידע לנצל את יתרונותיו, לכן השרטוט והאינטואיציה הגיאומטרית חזרו למלא תפקיד חשוב במתמטיקה.

מהסרטים...

- הסרטים של ג'ורג לוקס: "שובו של הג'די" ו"מסע בין כוכבים" היו בין הסרטים הראשונים שהשתמשו בפרקטלים בציורי נופים.
- אחד מהסטודנטים לשעבר של מנדלברוט השתמש בידע שלו לציור תמונות פרקטליות עבור הסרט "טיטאניק".

פעילויות בנושא פרקטלים

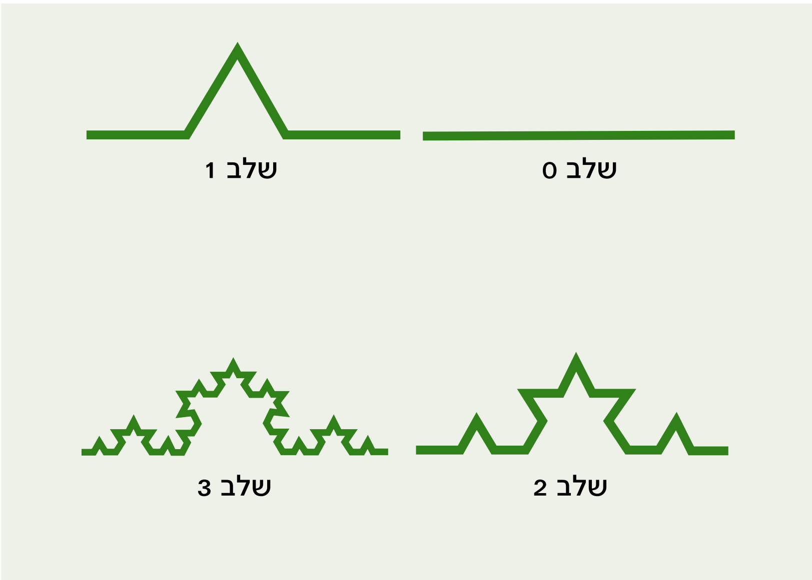
בחלק הבא של המאמר אציג הצעה לפעילות בנושא פרקטלים.
בפעילות הזו התלמידים לומדים להכיר ולבנות פרקטלים קוויים תוך כדי זיהוי ושרטוט דגמים; עוסקים במושג האינסוף ומפתחים חשיבה מסוג אחר – חשיבה רקורסיבית; מפתחים יכולת לדמיין צורה שעברה תהליך מסוים; מעלים השערות בנושא התנהגותם של הפרקטלים; עוסקים בחקר תופעות השתנות (שינויי היקף, שינויי מספר צלעות, שינויי שטח); לומדים לזהות את התכונה של דמיון עצמי של הפרקטלים; ומתרגלים מיומנויות בנושא שברים פשוטים, היקף וסדרות.

הפעילות מתחילה בהכרה של מונחים חדשים, הצורה ההתחלתית והכלל:
הצורה ההתחלתית היא הצורה שאיתה מתחילים את התהליך, והכלל הוא הכלל שמשתמשים בו כדי ליצור צורה חדשה מהצורה הקודמת.
התהליך של בניית הפרקטל הוא תהליך רקורסיבי, תהליך החוזר על עצמו שוב ושוב.
בניית הפרקטלים מתוארת בציורים 3,2,1. מומלץ לבקש מהתלמידים לשרטט אותם בכוחות עצמם על דף סריג של משולשים שווי–צלעות.
בתחילת הפעילות התלמידים עוסקים בחקירת הפרקטל ששמו עקומת קוך.

הפרקטל עקומת קוך (ציור 1):

עקומה זו נושאת את שמה של המתמטיקאית השוודית הלגה פון קוך (Helge von Koch) שחקרה אותה בשנת 1904.
הצורה ההתחלתית היא קטע (שלב 0) והכלל הוא: מחלקים את הקטע לשלושה חלקים שווים, מסירים את החלק האמצעי ומחליפים אותו בשני קטעים שווים באורכם לקטע המוחלף (שלב 1). מקבלים 4 קטעים, כל אחד באורך של שליש מהקטע שבשלב 0. בהמשך, מפעילים את הכלל על כל אחד מ–4 הקטעים האלו (שלב 2). התהליך הוא רקורסיבי, חוזרים עליו שוב ושוב.

בתחילה, נבקש מהתלמידים לתאר את הצורות שהתקבלו בשלבים השונים ואת השינויים שניתן להבחין בהם.



ציור 1 – עקומת קוך

האם ניתן לשער מה יקרה בהמשך, ואיך תראה הצורה בשלבים הבאים? ובכלל, כמה פעמים נוכל לחזור על התהליך? בעיקרון ניתן לחזור על התהליך לנצח, אינסוף פעמים, אבל כמובן שקיימות מגבלות טכניות. במילים אחרות מספר הפעמים שהפעילות ניתנת לשכפול שואף לאינסוף.

בהמשך נעסוק בתכונה של הפרקטל הנקראת דמיון עצמי, כלומר נבדוק איזה עיצוב חוזר על עצמו בשלבים השונים. התלמידים מתבקשים לבדוק אם הפרקטל הזה בעל דמיון עצמי.
האם ניתן לזהות את הדגמים הדומים?
לדוגמה, אם נתבונן בשלב 2 נוכל להבחין בדגם דומה לזה שבשלב 1.
נחזור אל הנושא הזה כאשר נחקור פרקטלים אחרים.
בהמשך התלמידים מתבקשים לחקור מספר נושאים:

1. מהי סדרת מספרי הקטעים הקיימים בצורה בכל שלב?
ניתן לראות שהסדרה היא: ...1,4,16,64
כלומר $1,4,4^2,4^3...$
(ככול שמתקדמים בשלבים מספר הקטעים שואף לאינסוף)

לאחר שהתלמידים הבינו את החוקיות אפשר לשאול:

- מהו מספר הקטעים בשלב 8 ?
- מהו מספר הקטעים בשלב n ?
- באיזה שלב של התהליך מספר הקטעים הוא 1024?

2. מהו אורך העקומה בכל שלב?
בהנחה שאורך הקטע ההתחלתי הוא 1 אז אורך העקומה בשלב 1 הוא $\frac{4}{3}$ (מדוע?) וסדרת אורכי העקומה בכל שלב היא:

$\frac{4}{3}, \frac{16}{9}, \frac{64}{27}...$ (מדוע?)

כלומר: $\frac{4}{3}, \frac{4^2}{3^2}, \frac{4^3}{3^3}$ ...

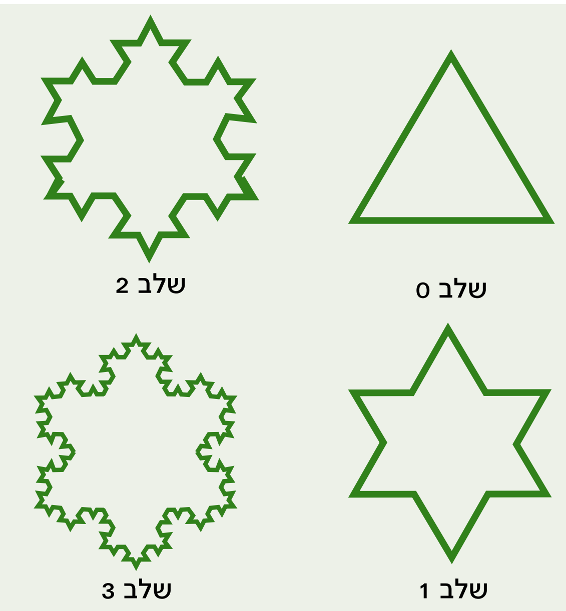
ובצורה הכללית $\frac{4^n}{3^n}$ או $(\frac{4}{3})^n$.
ככול ש-n גדל, ערכו של השבר (שהוא גדול מ-1) גדל ולכן אורך העקומה שואף לאינסוף.

הרעיון של הפרקטל עקומת קוך הורחב לבניית פרקטל אחר- פרקטל פתית השלג של קוך.

הפרקטל פתית השלג (ציור 2)

הצורה ההתחלתית היא משולש שווה צלעות (שלב 0). הכלל הוא אותו הכלל כמו בבניית עקומת קוך, אבל מפעילים אותו על כל הצלעות של המשולש שווה הצלעות. גם בפתית השלג התהליך הוא רקורסיבי - חוזרים על הכלל אינסוף פעמים. בניית הפרקטל מתוארת בציור 2 (שלבים 0-3).

כמו בפרקטל הקודם גם כאן ניתן לשאול האם קיימים דגמים דומים בשלבים השונים? אפשר לבקש מהתלמידים לשער איך תיראה הצורה בשלבים הבאים, ועד מתי אפשר להמשיך את התהליך. האם אפשר להמשיך את התהליך עד אינסוף?
התלמידים מתבקשים לחקור מספר נושאים:
מה נוכל לומר על היקף הצורה?
בכל שלב היקף הצורה החדשה הוא 4/3 מהיקף הצורה שבשלב הקודם (מדוע?) ולכן היקף הצורה גדל ככול שמתקדמים בשלבים. ניתן לומר שהיקף הצורה שואף לאינסוף.
מה נוכל לומר על שטח הצורה? האם גם שטח הצורה גדל בכל שלב?
חשוב להדגיש תכונה מעניינת שקיימת בפתית השלג: היקף הצורה שואף לאינסוף, אבל שטח הצורה מוגבל. (ניתן לחסום את הצורות במעגל).
הפרקטל השלישי שנעסוק בו הוא משולש שירפינסקי.



ציור 2 - פתית השלג של קוך

פרקטל משולש שירפינסקי (ציור 3)

פרקטל זה נושא את שמו של המתמטיקאי הפולני ווצלוו שירפינסקי (Waclaw Sierpinski) שחקר אותו בשנת 1915.
הצורה ההתחלתית של הפרקטל היא משולש שווה צלעות (שלב 0).

הכלל הוא: מחברים את נקודות האמצע של צלעות המשולש ומסירים את המשולש האמצעי שנוצר(המשולש הלבן), חוזרים על אותו התהליך שוב ושוב.

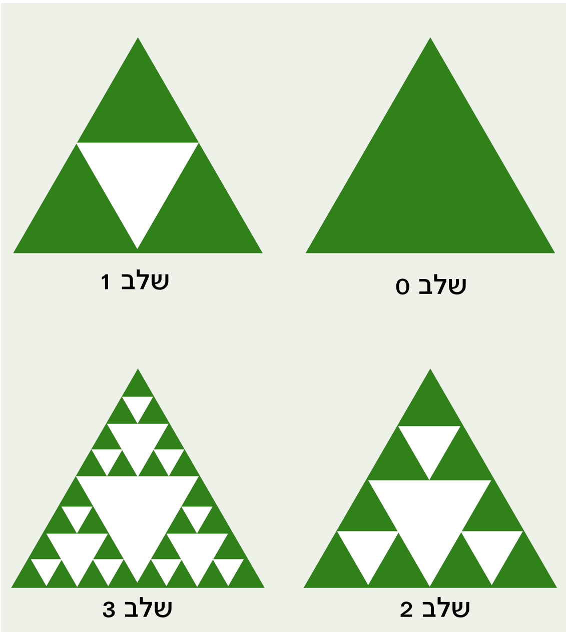
גם כאן, כמו בשני הפרקטלים הקודמים, מתבקשים התלמידים לזהות את תכונת הדמיון העצמי של הפרקטל (איזה עיצוב חוזר על עצמו בשלבים השונים?).

אפשר לשאול את השאלות הבאות:

- מהו החלק הצבוע של המשולש בכל שלב?
  (תשובה: $\frac{3^n}{4^n}$ בשלב n. מדוע?)
- מה קורה לשטח הצורה (השטח הצבוע)?
  תשובה: ניתן לראות, שככל שמתקדמים בתהליך שטח הצורה שואף לאפס.
- האם תוכלו למצוא את השטח בשלב 5?
- באיזה שלב שטח הצורה הוא 81/256?

ועוד משימות

אפשר לבקש מהתלמידים לבנות פרקטל כאשר הצורה ההתחלתית והכלל נתונים ולתאר את בנייתו, ולהפך: התלמידים מתבקשים לשער מהו הכלל והצורה ההתחלתית, כאשר נתונה שרשרת של שרטוטים.



ציור 3 – משולש שירפינסקי

ביבליוגרפיה

פרוים, מ' (1999). נורברט וינר. *עממי, עלון למורי המתמטיקה בישראל, 9.*

פרוים, מ' (2001). יאנג הוי והמתמטיקה הסינית. *מספר חזק 2000, 1.*

פרוים, מ' (2001). עומר כיאם. *מספר חזק 2000, 2.*

פרוים, מ' (2000). גוטפריד לייבניץ. *מספר חזק 2000, 3*

Albers, D., & Alexanderson, G. (Eds.). (1985). *Mathematical People: Profiles and Interviews.* Boston: Birkhauser. Berlin: Springer Verlag.

Clark, P. *Presentation of Professor B. Mandelbrot for the Honorary Degree of Doctor of Science (University of St. Andrews, 23 June, 1999)*

Gleick, J. (1985). The Man Who Reshaped Geometry. *The New York Times Magazine, Dec. 8.*

Gleick, J. (1987). *Chaos: Making a New Science.* NY: Viking Penguin.

Henderson, H. (1996). *Modern Mathematicians.* NY: Facts on File.

Mac Tutor History of Mathematics Archive, Benoit Mandelbrot.
http://www.groups.dcs.st_andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Mandelbrot.html.

Mandelbrot, B. (1988). *The Fractal Geometry of Nature.* New York: Freeman.

McGuire, M., & Mandelbrot, B. (1991). *An Eye for Fractals: A Graphic and Photographic Essay.* NY: Perseus Press.

Peitgen, H.-O., & Peter, H. (1986). *The Beauty of Fractals.* Springer Verlag.

Siegel-Itzkowich, J. (1998). Wolf Prize Intellects Shine at the Laromme. *The Jerusalem Post, July 6.*

תודה לד"ר בנו ארבל מאוניברסיטת ת"א ומכללת בית ברל על הערותיו .