# אפשר גם אחרת

## מודל העוגה המלבנית, כפל שברים

**מיכאל קורן**, משרד החינוך

### 1. מבוא

במאמרים הקודמים ("מודל העוגה המלבנית לשברים פשוטים, מספר חזק 2000 2; "מודל העוגה המלבנית, חילוק שברים", מספר חזק 2000 3) הראיתי כיצד ניתן להיעזר במודל העוגה המלבנית להוראת מהות השבר, להוראת חיבור וחיסור שברים ולהוראת חילוק שברים. במאמר זה יושלם מהלך ההוראה על-ידי הרחבת פעולת הכפל מהטבעיים לשברים.

לכאורה, פעולת הכפל בשברים היא הפשוטה ביותר להרחבה מהטבעיים לשברים: לחישוב המכפלה פשוט כופלים את המונים וכופלים את המכנים. מבחינה אלגוריתמית, אכן כפל שברים הוא פעולה פשוטה. הבעיה היא במשמעות הכפל.

בכפל של מספרים טבעיים, המשמעות האינטואיטיבית היא של **חיבור חוזר**. משמעות זו קשה להרחיב למקרה בו שני הכופלים הם שברים (ששניהם לא שלמים). לצורך הרחבת הכפל מטבעיים לשלמים יש אפוא צורך בשינוי המשמעות של הכפל.

לדומיננטיות של משמעות הכפל כחיבור חוזר יש עדויות רבות. ראו למשל את מאמרו של פישביין ומחברים נוספים (1). כדי ללמד כפל שברים יש להתייחס תחילה במפורש למשמעות המקובלת של הכפל כחיבור מקוצר בטבעיים, ולעמוד על הצורך במתן משמעות **נוספת** לכפל. זאת כדי שיהיה ניתן להרחיב את הכפל לשברים באופן משמעותי.

כדי לבצע את השינוי יש לבחור במודל או במודלים, בהם השימוש בכפל נחוץ גם כשהגורמים אינם שלמים, וכשברור שמשמעות הכפל כחיבור חוזר אינה המשמעות היחידה. כל מצב "כפלי" (הניתן לתיאור כיחס ישר או כיחס הפוך) יכול לשמש לשם כך.

דוגמאות:

- שטח של מלבן
- כלל המנוף (או חוק המאזניים עם זרועות לא שוות)
- תשלום על קנייה
- נסיעה במהירות קבועה

במאמר זה נדון במודל הראשון בלבד, מודל השטח. ניעזר במודל העוגה המלבנית, ונראה שבמובן מסוים **גם בכפל** **שברים מסתתר חיבור חוזר.**

השימוש בכלל המנוף הוא מעניין, בין היתר בגלל שבמקרה זה אין לכפל משמעות של חיבור חוזר, אפילו בתחום הטבעיים. כלל המנוף קובע, כי מנוף נמצא בשווי משקל אם מכפלת המשקל במרחק מנקודת המשען שווה משני צדי נקודה זו. את המכפלה של משקל במרחק לא ניתן לפרש כחיבור חוזר.

### 2. שטח מלבן

כפי שידוע לתלמידים, שטח של מלבן שאורכו ורוחבו הם טבעיים (ביחידת המידה בה משתמשים) ניתן לחישוב על ידי כפל. במקרה זה, השטח נקבע על-ידי מספר מלבני היחידה המרכיבים את המלבן, המסודרים בקבוצות שוות (בשורות, למשל). לכן מודל החיבור החוזר מאפשר להבין את הכפל כדרך למצוא את השטח.

כדי לשכנע את התלמידים בצורך להרחיב את הכפל גם למקרה של מספרים לא שלמים, נסתכל במלבן שאורכו 50 ס"מ ורוחבו 20 ס"מ. שטחו הוא כמובן
1000 סמ"ר = 50 ס"מ · 20 ס"מ.

אם לא נגדיר כפל של שברים, נקבל מצב בו שטח מלבן זה לא יהיה ניתן לחישוב על-ידי כפל, אם נמדוד את אורך צלעותיו במטרים, שכן נקבל חצי מטר וחמישית מטר. מדוגמה זו נגיע למסקנה שכדאי להרחיב את הכפל מהטבעיים לשברים, וזאת באופן שיבטיח כי גם אם הממדים של מלבן הם שברים, שטחו יהיה שווה למכפלת צלעותיו.

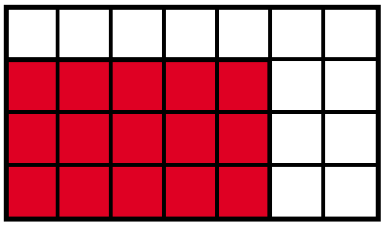
> נסכים כי כפל שברים צריך לתת את שטח המלבן שאורכי צלעותיו הם הכופלים

נניח, לדוגמה, שנרצה לקבוע למה שווה המכפלה $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}$, כפי שהסכמנו על משמעות הכפל, עלינו לבחור

מלבן שממדיו הם $\frac{5}{7}$ ו-$\frac{3}{4}$ ולחשב את שטחו. שטח המלבן הוא תוצאת המכפלה הזו. נשתמש במודל העוגה המלבנית ונבחר כמלבן המייצג את השלם (דהיינו מלבן ששטחו 1) במלבן שאורך צלע אחת שלו קל לחלק לשבע (כדי להציג שביעיות) ואורך צלע אחרת שלו קל לחלק לארבע (כדי להציג רבעים). ניקח למשל מלבן שאורכו 7 משבצות ורוחבו 4 משבצות.

הערה: בשימוש במודל העוגה לכפל שברים, בבחירת המלבן יש פחות חופש מאשר בפעולות האחרות, שכן לא די שהמספר הכללי של המשבצות יאפשר הצגה נוחה של שני השברים שבתרגיל, אלא יש לדאוג שכל ממד של המלבן יהיה באורך נוח להצגת אחד השברים.

בציור 1 המלבן הגדול הוא מלבן היחידה, והמלבן האדום הוא מלבן שאורכו חמש שביעיות של אורך מלבן היחידה, ורוחבו שלושה רבעים של רוחב מלבן זה ולכן שטח המלבן האדום הוא $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}$. מצד שני, מספר המשבצות במלבן האדום הוא $5\cdot3$, ומספר המשבצות במלבן היחידה הוא $7\cdot4$, לכן שטח המלבן האדום הוא $\frac{5\cdot3}{7\cdot4}$ ולכן $\frac{5\cdot3}{7\cdot4}=\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}$



ציור 1

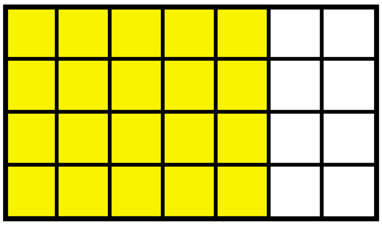
שימו לב שמכפלת המכנים נותנת את מספר המשבצות במלבן היחידה, ולכן ניתן להסתכל על מכפלה זו כעל חיבור מקוצר (של מספר המשבצות במלבן היחידה), ומכפלת המונים נותנת את מספר המשבצות במלבן האדום, ולכן ניתן להסתכל גם על מכפלה זו כעל חיבור מקוצר.

התהליך של מעבר ליחידות קטנות יותר, כפי שקיים בכל שימוש במודל העוגה המלבנית הוא תהליך שהתרבות המתמטית חזרה עליו שוב ושוב. לדוגמה, סנטימטר הוא פשוט שם למאית המטר, ולכן כשהמידות הן בסנטימטרים שלמים, אפשר לחשב אורכים ושטחים בלי להתייחס למשמעות של הסנטימטר כמאית המטר.

הערה: המעבר מחישוב שטח מלבן לכלל למכפלת שברים הוא מהלך קצר, ולכן, אם המורה סבור שמוטב כי המלבן המיצג את השלם יהיה תמיד ריבוע, ניתן לבחור ריבוע ולחלק את צלעותיו כנדרש לפי השברים הנבחרים. במקרה זה, ה"משבצות" המתקבלות תהיינה, בדרך כלל, מלבנים שאינם ריבועים. את החלוקה ניתן לעשות, למשל, בעזרת סרגל רגיל.

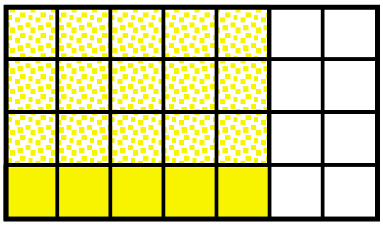
את שטח המלבן האדום בציור 1, ניתן לחשב בדרך נוספת, בעזרת חישוב חלק של חלק (שלושה רבעים של חמש שביעיות, במקרה זה) כמודגם בציורים 2 ו–3. דרך זו חשובה כי היא מראה מדוע בשברים מזהים "חלק של חלק", כמכפלה. אחד השימושים החשובים של כפל שברים הוא לפתרון בעיות של חלק של חלק.

במלבן בציור 2, החלק הצהוב הוא חמש שביעיות של המלבן.



ציור 2

ציור 3



בציור 3, המלבן הצהוב המנוקד הוא שלושה רבעים של החלק הצהוב, כלומר שלושה רבעים של חמש שביעיות, אך זהו בדיוק שטח המלבן האדום בציור 1, דהיינו, שלושה רבעים כפול חמש שביעיות. ובאופן כללי:

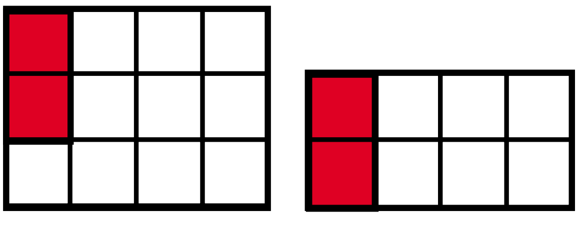
$\frac{a}{b}$ של $\frac{c}{d}$ הם $\frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}$

### 3. חלק של חלק

בסעיף זה נפתור שתי בעיות הקשורות בחלק של חלק, הן באופן ישיר, במודל העוגה המלבנית, (דרך שניתן להראות גם לפני הכנסת הכפל) והן תוך ניצול המסקנה על חלק של חלק שבסוף הסעיף הקודם.

בעיה ראשונה: קיבול של בקבוק הוא שני שליש ליטר. רבע של הבקבוק מלא יין. כמה ליטר יין יש בבקבוק?

פתרון בדרך אחת: נייצג ליטר על ידי מלבן של 12משבצות (בגלל הרבע והשליש שבשאלה).



ציור 4

בציור 4, המלבן הגדול הוא הליטר. המלבן מימינו הוא הבקבוק, כי יש בו 8 משבצות, שהן שני שלישים של 12 המשבצות. רבע של המשבצות בבקבוק הן שתי משבצות, ולכן שתי המשבצות האדומות מייצגות את היין שבבקבוק. כל משבצת היא אחת חלקי שתיים-עשר הליטר (כפי שרואים אם צובעים שתי משבצות במלבן השמאלי, המייצג ליטר אחד) .כלומר, כמות היין בבקבוק היא שתיים חלקי שתיים–עשרה ליטר (או שישית ליטר)

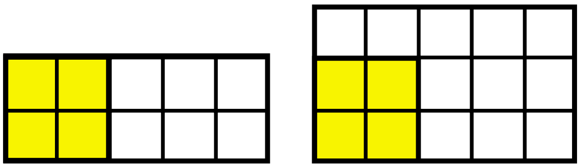
פתרון בדרך שנייה: יש לחשב רבע של שני שליש, ולכן נכפול, ונקבל: $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{4\cdot3}=\frac{1}{6}$

הערה: מובן שהפתרון בדרך השנייה קל יותר.

עם זאת, נראה לי כי כדאי להציג את השאלה כאתגר, לפני הוראת הכפל.

בעיה שנייה: בקופסה שיכולה להכיל קילוגרם וחצי קמח יש כעת שתי חמישיות ק"ג קמח. איזה חלק של הקופסה מלא?

פתרון א: על–ידי מודל העוגה המלבנית: בציור 5, נייצג את הקילוגרם על–ידי מלבן של 10 משבצות (בגלל החצאים והחמישיות שבשאלה).



ציור 5

הקופסה תיוצג לכן על–ידי 15 משבצות, והקמח שבה על–ידי 4 משבצות(שהן שתי חמישיות של המלבן המייצג קילוגרם אחד). החלק המלא של הקופסה הוא לכן $\frac{4}{15}$, כפי שרואים אם מסמנים את ארבע המשבצות במלבן המייצג את הקופסה.

פתרון ב: על–ידי משמעות השבר כחילוק: יש למצוא איזה חלק מהוות שתי חמישיות מתוך אחד וחצי, כלומר, יש לחלק שתי חמישיות לשלושה חצאים. התשובה לכן היא

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{2}=\frac{2\cdot2}{5\cdot3}=\frac{4}{15}$$

פתרון ג: פתרון זה מסובך, אך ייתכן שתלמידים ינסו לפתור את השאלה דווקא בדרך זו. זהו פתרון על–פי הקשר בין חלק של חלק לבין כפל: החלק המלא (שאינו ידוע לנו) כפול שלושה חצאים הם שתי חמישיות: $\frac{\square\cdot3}{\square\cdot2}=\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$ ולכן במשבצות ניתן לכתוב $\frac{4}{15}$ . (הרחבנו את השבר $\frac{2}{5}$ ב–6, כדי שנוכל להשלים את המשוואה על–ידי כתיבת מספרים טבעיים במשבצות).

## 4. סגירת מעגל

בפרק על חילוק שברים סיימנו באלגוריתם הלא סטנדרטי, לפיו יש להגיע למכנים שווים ואז לחלק את המונים: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd}=\frac{ad}{bc}$ לאחר שלמדנו לכפול שברים, הביטוי האחרון אינו אלא $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ מכאן הגענו לכלל המקובל: "כדי לחלק שברים יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני".

## 5. סיכום

בסדרת מאמרים זו תיארתי דרך לפיתוח מושג השבר וארבע פעולות החשבון בשברים, בדרך המבוססת על המשמעויות של הפעולות. לאורך כל הפיתוח ליווה אותנו מודל העוגה המלבנית.

דרך זו מתאימה הן למהות השברים, כמספרים בעלי משמעות בחיי היום–יום, והן לחשיבה של ילדים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי.

בהרחבות אחרות, כמו בהרחבה מהחיוביים (והאפס) לשליליים, אני מעדיף גישה פורמלית, המבקשת להרחיב את חוקי הפעולות לתחום חדש של מספרים, תוך שמירה רבה ככל האפשר על חוקים מועילים שקיימו הפעולות בתחום המצומצם. (כללים כמו חילופיות, חוק הפילוג, שמירה על המספר הנייטרלי, וכו').

נראה לי שראוי שגם מורים ביסודי יכירו את שתי הדרכים להרחבת הפעולות, הדרך האינטואיטיבית והדרך הפורמלית. אולי יפורסם בעתיד מאמר ב"מספר חדש", הדן בהרחבת הפעולות למספרים השלמים במהלך פורמלי, "פנים מתמטי".

## ביבליוגרפיה

1. Fischbein, E., Deri, M., Nello, S. M., & Marino, M. S. (1983). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 16, 1, 3-17.