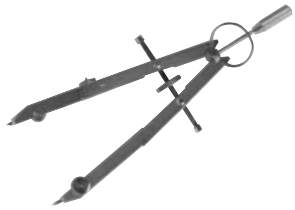
גיאומטריה



מעט מתמטיקה בעזרת טנגרם

פרק 7 מתוך הספר: **TANGRAMS-360 Puzzles**

מאת: **Ronald C. Read**

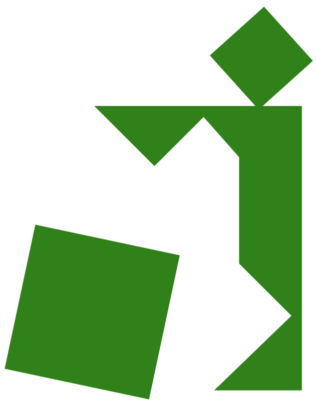
Dover Publications, U.S.A., 1965

תרגום: **מיכל סוקניק**, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה

אל תיבהלו! תהיו זקוקים למעט מאוד ידע מתמטי על מנת לעקוב אחר הכתוב בפרק זה.

כולנו מכירים חידות טנגרם שונות, ומשתמשים בהן לחקירות גיאומטריות. לפנינו מספר חקירות מתמטיות נוספות.

כפי שכבר ציינו, יותר מפעם אחת, מספר הטנגרמים הוא גדול מאוד, וזה למעשה בלשון המעטה, משום שהמספר הוא אינסופי! ניתן לראות זאת בקלות אם מסתכלים, לדוגמה, בציור 1.

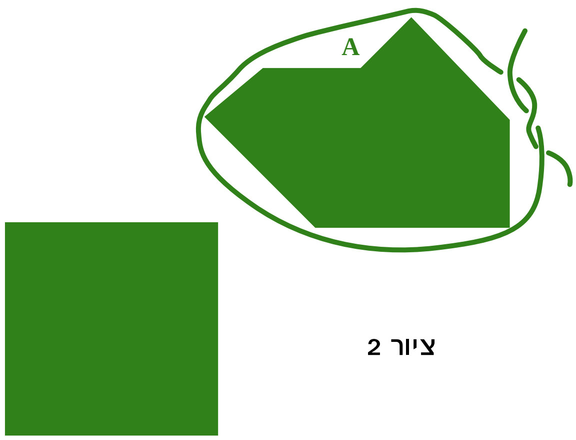


ציור 1

הפינה התחתונה של הריבוע הקטן, המייצג את הראש של הילד המתופף, יכולה לגעת בשאר הטנגרם במספר בלתי מוגבל של נקודות, לאורך הקו המייצג את הכתף והיד המושטת. נכון שהצורות שמקבלים על ידי הנחת חתיכה זו בתנוחות שונות לא תהיינה מאוד שונות זו מזו, אך במובן המדויק ביותר הן תחשבנה כנפרדות.

אולם יהיה זה בלתי מעשי לתת אותו משקל לווריאציות קטנות בצורות הטנגרם, ולהבדלים בין שתי צורות שונות לחלוטין. באופן טבעי ניתן לתהות, האם, כשמתעלמים מווריאציות פעוטות, ניתן לשאול את השאלה, "כמה טנגרמים קיימים?", בתקווה כלשהי לקבל תשובה ברורה. לחילופין, אפשר לשאול את השאלה "כמה טנגרמים יש מסוג מסוים כזה וכזה?"

בשנת 1942, שני מתמטיקאים סינים, פו טסיאנג וונג וצ'ואן–צ'י הסיונג, שאלו, וענו על השאלה: "כמה טנגרמים קמורים יש?" כעת, לפני שנמשיך, אנו חייבים להיות בטוחים לגבי המשמעות של "קמור" בהקשר זה. באופן גס, ניתן לומר שצורה קמורה היא כזו שאין לה שקעים בקו המקיף אותה. עבור צורות עם זוויות (כמו הקווים המקיפים את צורות הטנגרם), המשמעות של זה היא, שכל אחת מהזוויות קטנה מ–180 מעלות; במילים אחרות, שכל הפינות בולטות החוצה במקום פנימה. אך הדרך הפשוטה ביותר לראות את ההבדל בין צורה קמורה לבין כזו שאינה קמורה, היא לדמיין חתיכת חוט או גומי המתוח סביב הצורה, כפי שרואים בטנגרמים בציור 2 שלהלן:



ציור 2

אם החוט נוגע בצורה לאורך כל הדרך סביב הקצה שלה, אז הצורה היא קמורה; אך אם יש רווחים בין החוט לבין קצה הצורה, כפי שקורה ב–A שבציור 2, אזי הצורה אינה קמורה, אלא קעורה, במקום בו מופיעים רווחים אלה.

עתה, כשאנו יודעים בדיוק מה המשמעות של "קמור" בהקשר זה, אנו יכולים לבחון שוב את השאלה שנשאלה על–ידי המתמטיקאים הסיניים: "כמה טנגרמים קמורים יש?" קרוב לוודאי שנשער שמספרם יהיה מאוד גדול, אך מתברר שישנם שלושה–עשר בלבד!

במאמר שבו מוכיחים תוצאה זו, (שהתפרסם ב: (American Mathematical Monthly, Vol. 49 (1942), p. 596), לא מצוירים שלושה–עשר הטנגרמים, אלא רק רשומים באופן הבא:

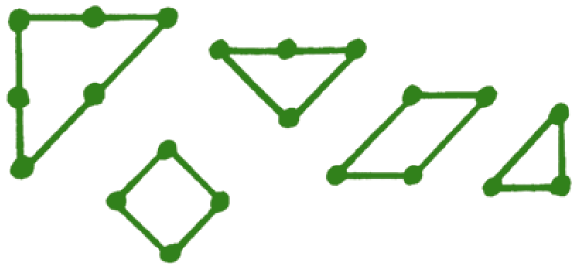
משולשים	1
מרובעים	6
מחומשים	3
משושים	3

בפרק זה אנו מביאים את כל שלושה–עשר הטנגרמים הקמורים. חלק מהם קל מאוד לבנות, אך כמה הם די "טריקיים". הקורא אולי ירצה לנסות לבנות את כולם, מבלי להסתכל קודם בצורות הנתונות (טנגרמים 1–12 המופיעים בסוף המאמר), או שהוא יכול להתבונן בצורות ואחר כך לנסות לבנות את הטנגרמים. על מנת להגיע לשלוש-עשרה צורות סך הכל, צריך לקחת בחשבון גם את הטנגרם שבציור 2.

בעיה בלתי פתורה

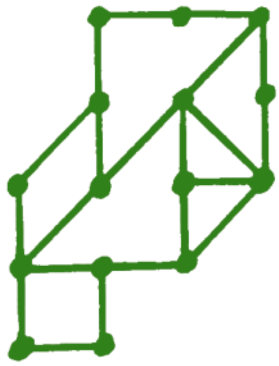
ברור שהטנגרמים הקמורים הם אכן מיוחדים, ישנם כל כך מעט מהם. האם נוכל לחשוב על סוגים מיוחדים אחרים של טנגרמים, שיהיו מהם יותר מאשר הקמורים, אך עדיין לא מספר אינסופי שלהם? עד כמה שידוע לי, איש לא עשה זאת עדיין, אך אני עומד להציע בעיה מסוג זה, לטובת כל מי שחש נטייה להתמודד איתה. ראשית עלינו לציין את סוג הטנגרם עליו אנו עומדים לדבר.

הבה נדמיין סט של חתיכות טנגרם, בגודל שבו הצלעות השוות של המשולשים הקטנים הן באורך של אינץ' אחד. אז הצלע השלישית של משולשים אלה תהיה בערך 1.414 אינצ'ים (ליתר דיוק, השורש הריבועי של 2). כעת, כל צלע של כל החתיכות של סט זה תהיה באחד מהאורכים האלה, או כפולה של אחד מהאורכים האלה, ולפיכך אנו יכולים לדמיין כל צלע של כל אחת מהחתיכות, כמורכבת מקטעים שאורכם הוא או 1 אינץ' או 1.414 אינצ'ים. לכל צלע יהיו אחד או שני קטעים. בציור 3 המראה את חתיכות הטנגרם, קצוות הקטעים מסומנים על–ידי נקודות.



ציור 3

כעת דמיינו טנגרם שנבנה בצורה כזו, שבכל פעם ששתי חתיכות נוגעות זו בזו, הן נוגעות לאורך קטע שלם של כל אחת מהן, כך שקצוות הקטעים האלה מתלכדים. במילים אחרות, כששתי חתיכות נוגעות, הנקודות בשני קצוות הקטעים יתלכדו. ניתן לראות זאת בציור 4.



ציור 4

אילוצים אלה לגבי הדרך בה ניתן להניח יחד את החתיכות, מגבילים באופן ניכר את סוג הצורה שניתן ליצור; מצד שני, כמות גדולה של טנגרמים מאוד מעניינים שייכת לקטגוריה זו. אנו נביא אילוץ נוסף: על הטנגרם להיות כולו חתיכה אחת. לטנגרמים המקיימים את האילוצים הנ"ל אני קורא טנגרמים "חמימים ונעימים", בגלל הצורה שבה כל החתיכות מתאימות יחד זו לזו. כל הטנגרמים הקמורים הם "חמימים ונעימים"; גם הטנגרם בצורת ריבוע הוא כזה, וכאלה הם גם טנגרמים רבים אחרים בספר זה. טנגרמים חמימים ונעימים נוטים להיות קשים יותר להרכבה על–פי הציור שלהם, מאשר טנגרמים שאינם כאלה, משום שההתאמה הצמודה מגלה פחות את הדרך שבה נוצרו הטנגרמים.

הגיוני לשאול את השאלה "כמה טנגרמים חמימים ונעימים יש?" משום שניתן להראות שטנגרמים אלה, שלא כמו הטנגרמים באופן כללי, הם מוגבלים במספרם– יש רק מספר סופי שלהם. אך כמה יש בדיוק? ברגע זה, *איש אינו יודע, ואני ממליץ לנסות לחשב מספר זה, לכל מי שמוצא בזה עניין, ויש לו גישה למחשב אלקטרוני גדול. לא סביר להניח ש"מספר הטנגרמים החמימים ונעימים" יימצא ללא שימוש במחשב, משום שהוא קרוב לוודאי גדול מאוד, כנראה מגיע למיליונים, אם לא גדול בהרבה יותר.

(חקירה ראשונית של הבעיה מראה שזה מורכב מידי עבור המחשב אליו יש לי גישה, אך הבעיה של תכנות המחשב למצוא את מספר הטנגרמים החמימים והנעימים תהיה מרתקת – חידה העולה על חידות הטנגרם! לרוע המזל, זוהי חידה שאינה זמינה לכל אחד).

* *המאמר נכתב בשנת 1965, האם מישהו יודע אם נפתרה הבעיה?*

טנגרמים קמורים