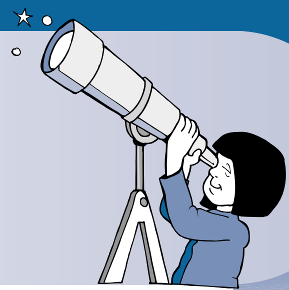


מה אפשר ללמוד על שברים רק עם מחשבים?

אילנה ארנון, פרלה נשר, רנטה נירנברג, המרכז לטכנולוגיה חינוכית

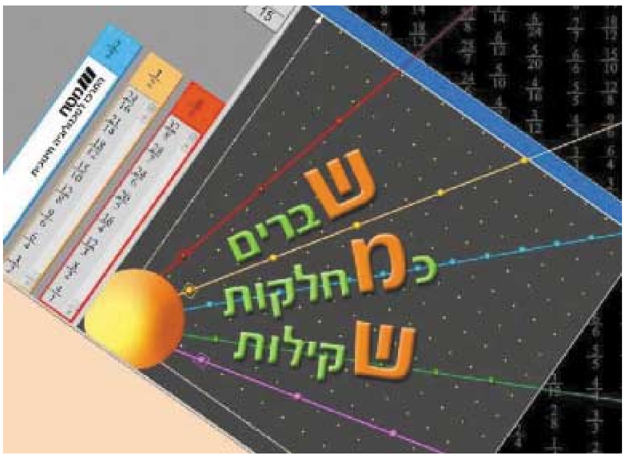
תרגום ועיבוד: מיכל סוקניק

מתוך מאמר שהתפרסם:

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (1999). What can be learnt about fractions only with computers. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the Twenty-Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education II. (pp. 33-40). Haifa, Israel.

תקציר

במאמר זה נציג את הלומדה "שמש", וננתח הישגי תלמידים שלמדו בעזרתה. הלומדה נועדה ללימוד מושגים מתמטיים באמצעות ייצוגים מוחשיים, שאינם יכולים להיבנות על-ידי התלמידים ללא המחשב. למושג של מחלקת שקילות יש תפקיד משמעותי במבנה של המספרים הרציונליים. במערכת קרטזית דיסקרטית, מחלקת שקילות של שברים מיוצגת על-ידי ישר העובר דרך הראשית. גם למושגים אחרים בשברים יש ייצוגים מוחשיים במערכת כזו. תלמידי כיתה ה' שהשתמשו ב"שמש" בתהליך הלמידה שלהם רואיינו אישית מספר חודשים לאחר מכן. נמצא שהם זכרו ייצוגים אלה ויכלו להשתמש בהם לפתרון בעיות שברים קונבנציונליות.



מסך הפתיחה של הלומדה "שמש" בגרסת האינטרנט החדשה שעומדת להופיע בקרוב

להשוות בין שני שברים משמעותו למצוא את יחס הסדר ביניהם, כמו הבעיה הבאה:

"מבין $\frac{3}{4}$ ו- $\frac{7}{10}$, איזה שבר גדול יותר, או האם הם שווים?"

כיצד אנו, בדרך כלל, ניגשים לבעיות כאלה בבית הספר היסודי? דרך אחת היא ללמד אלגוריתם מסוים, אותו יש לזכור בעל-פה. אם אנו שואפים ללמידה משמעותית יותר, אולי נבחר בדרכים ארוכות יותר. לדוגמה, אולי נלמד את השיטה הבאה:

מצאו שני שברים חדשים: אחד שווה ל- $\frac{3}{4}$, השני שווה ל- $\frac{7}{10}$, אולם לשניהם צריך להיות אותו מכנה (מכנה משותף). השוו את השברים החדשים.

אפשר לטעון שהמכנה המשותף אותו קל ביותר למצוא הוא 40 (מכפלת שני המכנים הנתונים). בשיטה זו, אנו מרחיבים כל שבר נתון במכנה של השבר האחר, כדי להסיק ש- $\frac{3}{4}=\frac{30}{40}$, $\frac{7}{10}=\frac{28}{40}$ מכאן, על פי כלל שנלמד קודם של השוואת שברים עם מכנה משותף, $\frac{30}{40} > \frac{28}{40}$ ולכן $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$

אפשר גם לטעון שקיים מכנה משותף שפשוט יותר לעבוד איתו, והוא 20. תומכי השיטה הראשונה יטענו ש- 20, בהיותו מספר קטן יותר, יהיה אולי קל יותר לשימוש בחישובים, אך הוא אינו קל למציאה. כדי למצוא אותו יש להשתמש ברעיונות מורכבים של תורת המספרים, כמו, פירוק לגורמים ראשוניים ומציאת הכפולה המשותפת הקטנה ביותר, או בניית רשימות של שברים השווים למקוריים, עד שפוגעים בשברים עם מכנה משותף:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\ldots \quad , \quad \frac{7}{10}=\frac{14}{20}=\ldots$$

יש!

בעבודתנו על מושגי שברים עם תלמידי כיתות ד', ה', ו- ו' מצאנו שקשה מאוד לתלמידים לתפוס בו-זמנית את המרכיבים של סיטואציה מורכבת זו: שני השברים הנתונים, השוויון של כל אחד מהם לחברי המחלקה שלו עצמו, ושלושת האפיונים המשמעותיים של השברים עם מכנה משותף: שהמכנים שלהם שווים, שכל אחד מהם שווה לאחד מהשברים המקוריים, ושהם, בדרך-כלל, לא שווים זה לזה. (נהפוך הוא, עלינו לקבוע איזה מהם גדול יותר ולהסיק מכך לגבי יחס הסדר בין השברים המקוריים).

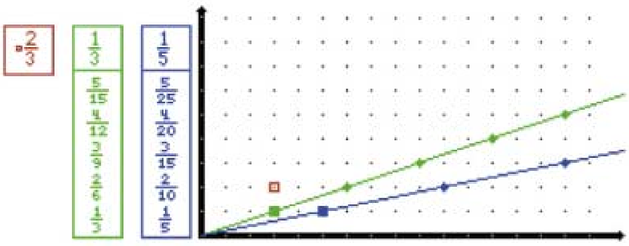
המורכבות של השיטות האלה מובילה את התלמיד להאמין שהוא מצא את המכנה המשותף המתאים, ולא מכנה משותף אחד מתוך כמה אפשריים.

אותו הדבר קיים עבור פעולות חשבוניות אחרות בשברים, כמו חיבור וחיסור. אם איננו רוצים ללמד פעולה כאלגוריתם טכני, הפתרון מתחיל תמיד עם חיפוש אחר חלופה לכל שבר נתון: אנו מחפשים חלופה בקבוצת השברים השווים לשבר. אנו בוחרים בחלופה על-פי הנוחות; אותה בעיה חשבונית יכולה לרוב להיפתר על ידי יותר מבחירה אחת. הרעיון האומר שהתוצאה אינה תלויה בבחירה שאנו עושים (לגבי החלופה הספציפית בה השתמשנו בתהליך הפתרון) הינו קריטי להבנת פעולות בשברים. לדעתנו רעיון זה מוזנח מידי בשעורי המתמטיקה בבית הספר.

קיים רעיון מתמטי בסיסי מאחורי כל השיטות האלה, והוא, ששבר אינו זוג יחיד של מספרים שלמים (מונה ומכנה), אלא מחלקה של זוגות שקולים כאלה. למעשה, כל פעולה חשבונית המבוצעת בין שני שברים, מוגדרת במונחים של מחלקות השקילות שלהם. לימוד שברים כמחלקות שקילות משמעותו יותר מאשר לימוד השקילות של שני איברים של מחלקה נתונה. משמעותו לגרום לתלמידים לפעול על המחלקות כאובייקטים. וכך, בעוד שמושג השברים כמחלקות שקילות נשאר קשה ומאוד מופשט, הרי שנחוץ ללמד אותו. פיאז'ה לימד אותנו, שתלמידים בגיל זה מפתחים מושגים מתמטיים מופשטים על-ידי רפלקציה על הפעילויות המוחשיות שלהם עצמם (Piaget, 1976). מה יקרה אם נמצא ייצוגים מוחשיים למחלקות שקילות של שברים? האם זה יאפשר את לימוד המושג הזה?

Resnick (1987) הדגישה את ההכרח במיפוי מדוייק ומפורש בין ייצוג מוחשי לבין הרעיונות המתמטיים אותם הוא מייצג. Nesher (1989) הדגישה את הצורך בתחומי ידע מוגדרים היטב וסגורים (מבחינה מתמטית), אשר יילמדו על ידי שימוש בתחומי הדגמה מוחשיים איזומורפיים. Dubinsky (1991) הדגיש שהתפתחותו של מושג מתמטי חדש מתחילה על ידי פעולה, ו-Arnon (1997) חקרה את השיפור בהתפתחותם של מושגי שברים על-ידי שימוש בפעולות מוחשיות. היא גם הראתה את ההכרח בתנאי נוסף: יכולתם של הילדים לבצע את הפעולות המוחשיות, לאחר הפנמה מתאימה, בדמיונם.

אנו בחרנו לייצג שברים כמחלקות שקילות במערכת קואורדינטות קרטזית דיסקרטית - מערכת צירים שבה רק נקודות עם שיעורים שלמים. שבר מסוים (מונה ומכנה מסויימים) מיוצג על ידי נקודה שהקואורדינטה האנכית שלה היא המונה, והקואורדינטה האופקית שלה היא המכנה. הנקודות של כל השברים של אותה מחלקת שקילות נמצאות על קו ישר העובר דרך הראשית.
(Kieren, 1976 ; Kalman, 1985). (איור 1).



איור 1

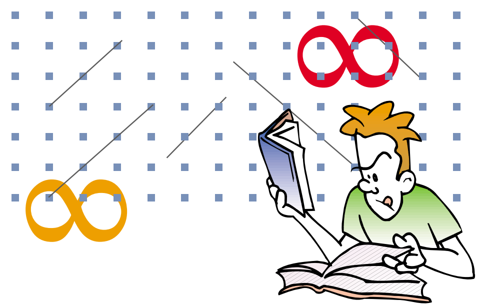
השימוש במחשבים הכרחי להדגמה זו, בשל הצורך בדיוק בסרטוט של הישרים השונים. לעיתים קרובות קשה להחליט לפי מראה עיניים בלבד, אם נקודה מסוימת שייכת או איננה שייכת לישר העובר בקרבתה. תוכנת מחשב נותנת תשובה חד משמעית לשאלה זו. התוכנה "שמש" (שברים כמחלקות שקילות, מט"ח- המרכז לטכנולוגיה חינוכית) פותחה עם מצג המורכב משני חלקים נפרדים: תחום מספרים, ותחום ציורים. מחלקת שקילות מיוצגת בתחום המספרים כרשימה של השברים השווים לשבר נתון, ונקראת "מחלקה". בתחום הציורים היא מיוצגת כישר העובר דרך הראשית, ודרך כל הנקודות של השברים ב"מחלקה" - נקודה עבור כל שבר (ראו איור 1). המשתמש יכול לבנות נקודות המייצגות זוגות בודדים של מונה ומכנה, וישרים המייצגים מחלקות שקילות. המשתמש יכול גם לבחור באיזה תחום לעבוד, ואז הוא מקבל תגובה אוטומטית בתחום השני: אם כותבים שבר בתחום המספרים, מודגשת הנקודה שלו בתחום הציורים; אם בונים ישר דרך הראשית בתחום הציורים, נבנית בהדרגה רשימת השברים של המחלקה בתחום המספרים. צבעים עוזרים להתאמה הזו: שבר והנקודה שלו או ישר והמחלקה שלו מקבלים את אותו הצבע בתחומים השונים (ראו איור 1).

פעילויות נוספות שהלומדה מאפשרת הן: בניית סוגים שונים של קבוצות שברים, ביצוע פעולות חשבון בשברים, כגון: חיבור, חיסור, השוואה, ועוד. הלומדה, והפעילויות שהיא מאפשרת, תוכננו על-פי התנאים החיוניים ללמידה על-פי החוקרים שצוטטו לעיל. יחד עם זאת, השימוש בייצוג זה על-ידי תלמידי בית הספר היסודי מעלה את השאלות הבאות:

* באיזו מידה ייצוג זה הוא באמת מוחשי עבור ילדים צעירים?
* האם השימוש בלומדה זו באמת משפר את ההתפתחות של מושג השבר כמחלקת שקילות?

מטרתנו הייתה לבדוק שאלות אלה. בניסוי הוראה שקיימנו, שלושים תלמידי כיתה ה' השתתפו בשיעור אחד עד ארבעה שיעורים לשבוע. השיעורים התקיימו במעבדת מחשבים, בנוסף למערכת הלימודים הרגילה, וההשתתפות הייתה בהתנדבות. חלק מהתלמידים נשרו במהלך הניסוי. אחרים התמידו, ונכחו עד 30 שיעורים. השיעורים כללו עבודה קבוצתית, עבודה אישית, ודיונים כיתתיים.

שלושה חודשים לאחר שהניסוי הסתיים, ריאיינו 20 תלמידים. נציג את הנתונים שאספנו מתלמידים אלה בשני חלקים: בניית המושג מחלקת שקילות, ושימוש במושג זה לפתרון בעיות חשבון נוספות.



א. בניית המושג מחלקת שקילות

1. הייצוג של זוג של מונה ומכנה כנקודה במערכת קרטזית

כל 20 התלמידים השתמשו נכון בייצוג זה (למרות שחלק נזקקו ל"תזכורת" קצרה): כשהיו צריכים לצייר בנייר ועיפרון שבר נתון, הם ציירו במערכת צירים קרטזית נקודה המייצגת אותו, ולהפך - ידעו לומר מהו השבר המצוייר כנקודה במערכת קרטזית.

2. הקשר בין השברים שבאותה מחלקת שקילות

כל 20 התלמידים ידעו שהשברים שנקודותיהם על ישר העובר דרך הראשית שווים זה לזה. הם גם ידעו שהשברים שהופיעו ברשימה בתחום המספרים היו שווים זה לזה.

להלן ציטוטים מדברי התלמידים:

תלמיד 8: "... הם בעצם באותה מחלקה... כי הם שווים..."

תלמיד 19: "כי הם אותה מחלקה, והם שווים אחד לשני..."

תלמיד 20: "דבר ראשון, כולם על הישר הזה. דבר שני - כולם שווים."

3. הקשר בין רשימה בתחום המספרים (מחלקה) וישר בתחום הציורים

19 תלמידים בטאו את הבטחון שלהם לגבי הקשר בין הרשימה והישר שלה:

תלמיד 8: "כי בדרך כלל במחשב כשיש לנו ישר, ויש מחלקה, אז זה בדרך כלל שייך אחד לשני".

תלמיד 17: "כל השברים של המחלקה הם על הישר".

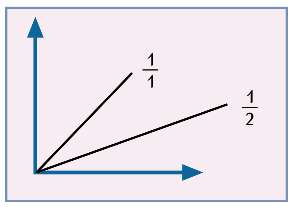
תלמיד 10 ביטא את השילוב של הרעיונות האלה:

"הם [מתייחס לרשימה] כולם שברים של $\frac{2}{3}$, זה ישר של $\frac{2}{3}$, וכולם הרחבות של $\frac{2}{3}$".

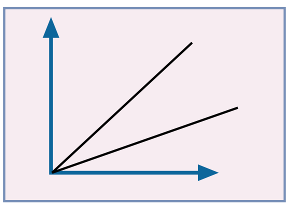
ב. השימוש בישרים בפתרון תרגילי חשבון בשברים

1. השימוש בישרים להשוואת שברים

בייצוג זה, יחס הסדר בין שברים נקבע על פי הישרים שלהם, ולא על פי הנקודות הבודדות שלהם: השבר שהישר שלו גבוה יותר, הוא השבר הגדול יותר (ראו איור 2).



איור 2



איור 3

כלל זה תקף עבור הרביע הראשון של המערכת הקרטזית, ודורש עידון עם שברים שליליים. (תלמידים מבוגרים יותר למדו שברים שליליים בעזרת "שמש", אך על זאת לא נדווח כאן). בראיונות המדווחים כאן עסקנו בשלושה מצבים של השוואת שברים, המציינים היררכיה בהתפתחות יכולתם של התלמידים להשתמש בישרים ככלי לפתרון בעיות:

1א. השברים יוצגו על-ידי הישרים שלהם

לתלמידים הוצג ציור עם שני ישרים במערכת קרטזית, ללא נקודות (ראו איור 3).

הבעיה הייתה:

"לפניכם הישרים של $\frac{1}{1}$ ושל $\frac{1}{2}$. **רשמו כל שבר ליד הישר שלו.**"

בחרנו בשברים $\frac{1}{1}$ ו- $\frac{1}{2}$ משום שחשבנו שרוב התלמידים ידעו איזה מהם גדול יותר.

ציפינו שתלמידים שהפנימו את הייצוג של היחס "<" במערכת קרטזית, וידעו ש- $\frac{1}{2} < \frac{1}{1}$, ייחסו את המספר $\frac{1}{1}$ לישר הגבוה יותר, ואת המספר $\frac{1}{2}$ לישר הנמוך יותר.

מצאנו ש- 15 מתוך 20 התלמידים עשו זאת, כשהם מסתמכים בהסבריהם על יחס הסדר בין השברים:

תלמיד 1: "כי זה שלם, וזה יותר גדול מחצי, ולכן הישר שלו גבוה יותר."

תלמיד 10: " $\frac{1}{2}$ הוא יותר קטן... הוא שבר יותר קטן מ- $\frac{1}{1}$ והישרים שיותר גבוהים, שעולים למעלה, הם הישרים שיותר גדולים."

1ב. השברים הנתונים יוצגו על-ידי ישרים, בעוד שהתשובות התבקשו כנקודות

בפני התלמידים הוצגה המערכת הקרטזית שבאיור 2, והם התבקשו לצייר נקודות של שברים:

א. קטנים מ- $\frac{1}{2}$

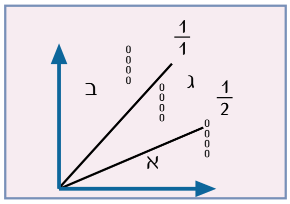
ב. גדולים מ- $\frac{1}{1}$

ג. קטנים מ- $\frac{1}{1}$ וגדולים מ- $\frac{1}{2}$.

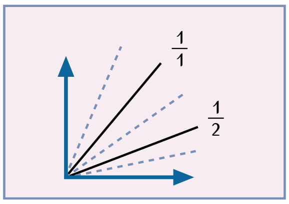
אותם 15 תלמידים שהצליחו לפתור את הבעיה הקודמת, הצליחו גם כאן. הנה, לדוגמה, תשובתו של תלמיד 10 לשאלה ג:

"הוא לא יכול להיות מעל לישר של 1, אבל זה יהיה מעל לישר של $\frac{1}{2}$".

איורים 4 ו- 5 מראים דוגמאות לדרכי פתרון של תלמידים בבעיה זו.



איור 4

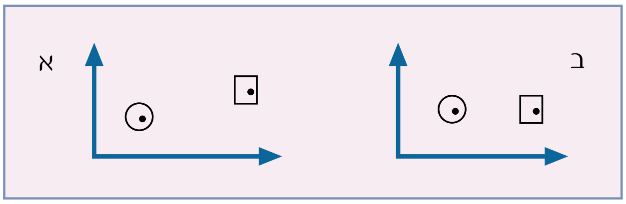


איור 5

איור 4: 14 תלמידים דיברו על אזורים במישור.
איור 5: 2 תלמידים השתמשו בישרים בתשובותיהם.

1ג. שני השברים יוצגו על-ידי נקודות

בפני התלמידים הוצגו שתי מערכות קרטזיות ריקות, מלבד שתי נקודות, כפי שמופיע באיור 6.



איור 6

בכל מערכת, התלמידים התבקשו לסמן את הנקודה של השבר הגדול יותר.

כדי לפתור את הבעיה, היה עליהם לדעת שיחס הסדר נקבע על ידי המיקום היחסי של הישרים ולא של הנקודות. 14 תלמידים השתמשו בישרים כדי לפתור נכון את הבעיות. 4 מהם ממש ציירו את הישרים.

10 ענו נכון ללא כל פעולה נראית לעין. כשנתבקשו להסביר את תשובותיהם, הם התייחסו לישרים בהסבריהם:

תלמיד 4: "אם ניקח ישר ונמתח אותו מנקודת הראשית עד לשבר, ונמתח אותו, אז נגלה שהריבוע יהיה מתחת לקו, אז הוא יהיה קטן ממנו" [יחד עם הסבר זה לא היו ציורי ישרים, אלא רק תנועות ידיים שציירו ישרים דמיוניים].

תלמיד 5: "אם אני אקח סרגל ואמתח קו מפה לפה, הישר יהיה יותר גבוה מאשר אם אמתח קו מפה לפה [מצייר בזמן ההסבר] וככל שהישר גבוה יותר, כך הוא גדול יותר."

תלמיד 17: "זה קשור לישר ולא לשבר עצמו."

אפשר לומר שעבור תלמידים אלה, הפעולה המוחשית של השוואת שברים באמצעות הישרים המייצגים אותם, הופנמה לרמה שבה הם ביצעו אותה בדמיון.

מה עשו שאר התלמידים האחרים? תלמיד אחד עשה אומדן מספרי של השברים המתאימים לנקודות הנתונות, ואחר כך השווה אותם נכון. תלמיד אחד חשב שככל שהנקודה הייתה רחוקה יותר מהציר המאונך, כך השבר גדול יותר. האחרים לא הצליחו לפתור את הבעיה, או לא נתבקשו לעשות זאת.

2. צפיפות המספרים הרציונליים

השאלה הייתה:

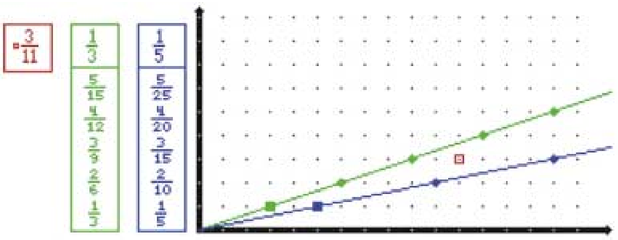
מצא שברים (רבים ככל האפשר) הגדולים מ- $\frac{1}{5}$ וקטנים מ- $\frac{1}{3}$:

$\frac{1}{5} < \square < \frac{1}{3}$

16 תלמידים התחילו עם $\frac{1}{4}$. זה היה הפתרון היחידי עבור 3 מהם. אחרים הוסיפו הרחבות של $\frac{1}{4}$.

שני תלמידים הוסיפו ("מהראש שלי") שבר שלא היה הרחבה של $\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{13}$ ו- $\frac{3}{10}$), והשתמשו בלומדה לבדיקה.

שאר 11 התלמידים השתמשו במערכת הקרטזית שבמחשב בחיפוש אחר פתרונות נוספים: הם ציירו את הישרים של $\frac{1}{5}$ ושל $\frac{1}{3}$ ורשמו שברים רבים שנקודותיהם נמצאו בין שני ישרים אלה (כמו $\frac{3}{11}$ שבאיור 7).



איור 7

לגבי השאלה כמה שברים כאלה יש, ענו כולם "הרבה" או "המון" או "אינסוף":

תלמידה 9: [מציירת את הישרים] "כל מה שבין הישר הזה והישר הזה" [רושמת... $\frac{4}{13}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{5}{16}$ אחר כך היא מרחיבה את תחום הציור כדי להגיע לשברים נוספים, כמו $\frac{5}{17}$ ואחרים].

מראיינת: "כמה יש?"

תלמידה 9: "עד אינסוף".

סיכום הממצאים

הממצאים שתיארנו מציעים תשובות לשתי שאלות המחקר שלנו.

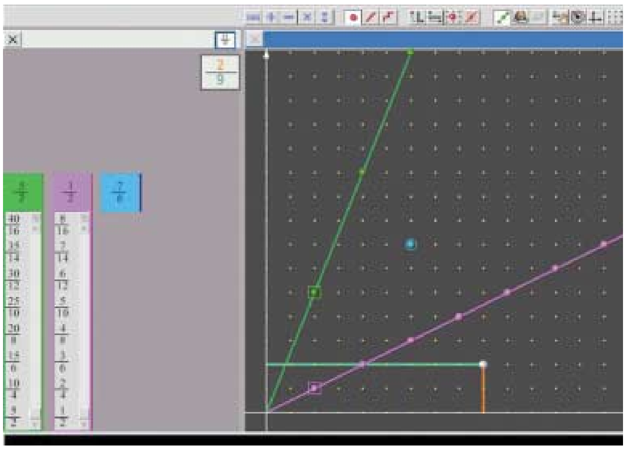
באשר לשאלה לגבי המוחשיות של ייצוג זה, הראינו שתלמידי כיתה ה' עבדו עם המרכיבים השונים של המערכת הקרטזית הדיסקרטית - נקודות, ישרים, ראשית הצירים, ואזורים. אלה היו מוחשיים עבורם במידה כזו, שהם היו מסוגלים לצייר סקיצות ביד חופשית בשעת הצורך.

באשר לשאלה השנייה, לגבי התפתחות מושג השברים כמערכות שקילות, הראינו כי:

* תלמידים הבינו את המיפוי בין השפה המתמטית וייצוג זה: הם הצליחו לזהות שבר כאשר ניתנו הנקודה או הישר שלו; לצייר סקיצה של ישר או נקודה של שבר נתון; ואפילו למצוא את ההתאמה שבין קבוצות שברים בעלי תכונה נתונה, ואזורים של המערכת הקרטזית.

* התלמידים הכירו את המונח "מחלקת שקילות של שברים" והייצוג הקונקרטי שלו - ישר העובר דרך הראשית. הם גם היו מודעים לשוויון שבין כל שני שברים במחלקה כזו.

* התלמידים השתמשו במושג זה ובייצוג שלו כדי לפתור בעיות חשבוניות. הם עשו זאת כשהבעיה יוצגה על-ידי ציורים, כמו,



למשל, כשהם מצאו שברים קטנים מ- $\frac{1}{2}$ מתחת לישר של $\frac{1}{2}$. הם עשו זאת גם כשהבעיה יוצגה בשפה מתמטית פורמלית, כמו, למשל, כשהם התבקשו למצוא שבר גדול מ- $\frac{1}{5}$ וקטן מ- $\frac{1}{3}$. הם ציירו את הישרים של שברים אלה ומצאו את השברים הדרושים בין הישרים. הם אפילו הצליחו להסיק מסקנות לגבי המספר הרב של שברים כאלה.

מסקנות

ממצאי מחקר זה מראים שילדים בכיתה ה' יכולים לפתח את המושג של שבר כמחלקת שקילות, בתנאי שמשתמשים בייצוגים ובפעולות מוחשיים מתאימים. התפתחות זו התאפשרה על-ידי הלומדה "שמש".

התוצאות גם מעידות על כך שמושג זה מתפתח בהדרגה. מחקר נוסף דרוש, על מנת להשיג הבנה טובה יותר לגבי אופייה של התפתחות זו.

{מקורות}

Arnon, I., (1997). *In The Mind's Eye: How Children Develop Mathematical Concepts - Extending Piaget's Theory*. Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University.

Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school? *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, V. 6(2), pp. 167-214.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, (pp. 95-123). Dordrecht/Boston/London: Clair Academic Publishers.

Kalman, D. (1985). Up fractions! Up n divided by m! *Arithmetic Teacher*, 32 (8), 42-43.

Kieren, T. A. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A, Lesh, (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*, eric/smeac (pp. 101-144). Columbus.

Nesher, P. (1989). *Microworlds in mathematical education: A pedagogical realism*. In L.B. Resnick (Ed.), Knowing, learning & instruction (pp. 187-215). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J. (1976). *The grasp of consciousness* (S. Wedgwood, Trans.). Cambridge, Massachusettes: Harvard University Press. (Original work published 1974).

Resnick, L. B., & Omanson, S. S., (1987), Learning to understand Arithmetic. In R. Glaser (ed.) *Advances in Instructional Psychology*, V. 3, (pp. 41-95). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

לפרטים על הלומדה: ilana_a@cet.ac.il