



# בעיות מתמטיות שנשארו פתוחות - לתלמידים

נאוה קוצר, מורה למתמטיקה, בית הספר גבע, גבעת עדה

ככמה דרכים, לדוגמה:

$$3+17=20, 13+7=20$$

$$23+3=26, 13+13=26, 19+7=26 \text{ ועוד.}$$

## עבודת התלמידים הייתה שיטתית בכמה מישורים:

א. המספרים הזוגיים נבחרו ונרשמו לפי סדר הופעתם בלוח המאה.

ב. הייתה שיטתיות בבחירת המספרים הראשוניים "הקטנים" כמו: 3, 5, 7, 11, 13 והתלמידים נעזרו בהם לפי סדר הופעתם. לדוגמה:  $3+47=50$ ,  $5+47=52$ ,  $7+47=54$  וכדומה.

ג. היו תלמידים שהכינו לעצמם רשימה של מספרים ראשוניים כדי שתהיה להם לעזר בעבודתם.

בעקבות העבודה הקבוצתית קרה דבר מעניין. שני תלמידים, אחים תאומים, החליטו להתמודד עם אתגר נוסף והפעם- בבית. הם המשיכו לחקור את השערת גולדבך לגבי המספרים 102 עד 150. ומלבד טעות אחת שנבעה מחוסר תשומת לב, הם הצליחו יפה מאד.

בסך הכל הייתה עבודה פורייה שבסופה הגיעו הילדים למסקנה שהשערת גולדבך נכונה לגבי המספרים שבדקו.

הפעילות שתוארה כאן ניתנה כפעילות חקירה, המקשרת להיסטוריה של המתמטיקה. מטרתה הייתה להפגיש את התלמידים עם בעיות מתמטיות שאין להן פתרון. התלמידים נוכחו לדעת שלא הכל סגור וכדאי להמשיך לחקור.

בתחילת רשימתי העליתי את השאלה: "האם ניתן להציג בפני תלמידים בבית הספר היסודי בעיות מתמטיות שנשארו פתוחות?" מתוך ניסיוני, כמורה ותיקה למתמטיקה, ניתן ורצוי לעשות זאת. התמודדות עם בעיות פתוחות מאתגרת ומפתחת חשיבה מתמטית. המכנס עם בעיות כאלה יכול לקרב את התלמידים למתמטיקה ואולי כך הם יראו אותה פחות מאיימת, כי גם מתמטיקאים דגולים לא תמיד הצליחו להגיע למסקנות סופיות, להכללות ולהוכחות.

בעקבות השערת גולדבך הרי לפניכם הטענה הבאה, אותה מצאתי באתר האינטרנט:

[www.workjoke.com/puzzles/puzzle2k.htm](http://www.workjoke.com/puzzles/puzzle2k.htm)

**"כל מספר ראשוני גדול מ-2 ניתן להצגה כהפרש של שני ריבועים."**  
נסו ותיהנו!

## האם ניתן להציג בפני תלמידים בביה"ס היסודי בעיות מתמטיות שנשארו פתוחות?

שאלה זו מעסיקה בוודאי מורים אוהבי מתמטיקה, המחפשים עבור תלמידיהם אתגרי חשיבה.

כריסטיאן גולדבך, מתמטיקאי שוויצרי, שחי במאה ה-18 היה מורם של ילדי הצאר. בשנת 1742 הוא העלה השערה ש"כל מספר זוגי גדול מ-2 ניתן להצגה כסכום של שני מספרים ראשוניים".

השערה זו נותרה ללא הוכחה עד עצם היום הזה. נכונותה של השערה זו נבדקה באמצעות מחשב ונמצאה נכונה לגבי המספרים הזוגיים עד  $10^{14}$ . פרס של מיליון דולר הובטח לראשון שיוכיח את השערת גולדבך עד ה-15 במרס 2002, אך אף אחד לא הצליח לעשות זאת.

בתחילת שנת הלימודים הוצגה בפני תלמידי כיתה ו' בבית-ספר "גבע" ההשערה של גולדבך. השערה זו הוצגה לתלמידים כחידה, והמשימה הייתה לבדוק האם ההשערה נכונה לגבי המספרים מ-4 עד 100. השיעור החל בכך שנערכה תזכורת לגבי ייחודם של המספרים הראשוניים לעומת המספרים הפריקים. כמו כן, הוזכרו מספר סימני התחלוקות, ונערכה תזכורת לגבי ייחודו של המספר -1. הודגש שהוא מיוחד, לא פריק ולא ראשוני.

בהמשך, התחלקה הכתה לשתי קבוצות עבודה עיקריות: קבוצה אחת בדקה האם "השערת גולדבך" מתקיימת לגבי המספרים מ-4 עד 50, וקבוצה שנייה בדקה לגבי המספרים מ-52 עד 100. התלמידים עבדו בקבוצות קטנות, בזוגות ויחידים לפי בחירתם. במהלך העבודה התלבטו הילדים לגבי המספרים 51, 71, 91, 69, 57. נראה היה להם שהמספרים המסתעיימים ב-1, ב-7, או ב-9 עשויים להיות ראשוניים. נערך דיון במליאה והתברר ש-51, 57 ו-69 הם כפולות של 3, 91 הוא כפולה של 7 ו-71 נתגלה כראשוני. המסקנה הייתה שלא כל מספר שמסתיים ב-1, 7 או 9 הוא ראשוני.

בדיון המסכם התלמידים הציגו את דרכי הפתרון השונות ובדקו באילו מספרים ראשוניים הם השתמשו כדי להוכיח את הטענה שבהשערת גולדבך. התבררו הדברים הבאים:

1. התלמידים התחילו מבחירת הסכום (מספר זוגי) וחיפשו עבורו שני מחוברים (מספרים ראשוניים) כאשר בחירת המספרים הראשוניים נעשתה באופן מקרי.
2. היה שימוש רק בחלק מהמספרים הראשוניים שבין 2 ל-100.
3. באמצעות הפתרונות השונים של התלמידים התגלה שישנם מספרים זוגיים שאפשר לכתוב אותם כסכום של מספרים ראשוניים