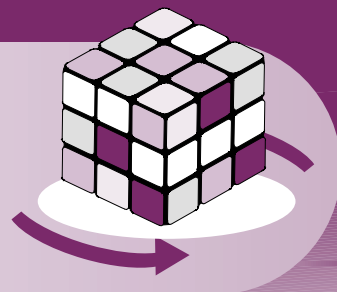


משחקי מתמטיקה



קובייה ראשונית - משחק מתמטי

גרייסי ויניצקי-לנדמן, מכללת אורנים - בית הספר לחינוך של התנועה הקיבוצית

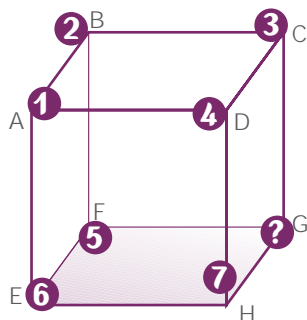
כעת נשארו שלושה קודקודים פנויים D, E ו-F ושלוש מדבקות: מספר 5, 7 ו-8. על-ידי בדיקה קפדנית של כל האפשרויות, ניתן לראות שבמקרה זה, לשחקן השני אין מהלך אפשרי ולכן הוא המפסיד. כדי לנתח את המשחק הזה, ננסה לענות על השאלות הבאות:

שאלות

1. האם משחק זה יכול להסתיים בתיקו?
2. האם קיימת אסטרטגיית ניצחון לאחד השחקנים? אם כן, לאיזה שחקן: לראשון או לשני?
3. באיזה אופנים ניתן להרחיב משחק זה ולקבל משחקים אחרים?

שאלה 1: האם משחק זה יכול להסתיים בתיקו?

במשחק זה, תיקו פירושו שכל הקודקודים "נתפסו" בצורה חוקית. במילים אחרות: כל הקודקודים ממוספרים על-ידי המספרים הטבעיים מ-1 עד 8. והסכום של כל שני מספרים המופיעים בקודקודים סמוכים, הוא מספר ראשוני. ננסה ליצור קובייה במצב זה. כפי שרואים באיור 2:

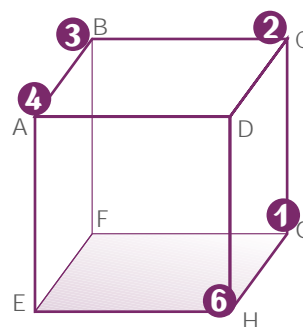


איור 2

נניח שהמספר 1 מופיע בקודקוד A, כל קודקוד "מחובר" ל-3 קודקודים אחרים. לכן, המספרים המופיעים בקודקודים השכנים ל-A, חייבים להיות 2, 4 ו-6 (חשבו מדוע). כיוון שהקודקודים השכנים של A הם B, D ו-E, נסמן את המספרים האלה במקומות המתאימים להם. אם נתבונן בקודקוד C, הוא שכן של B ו-D. מתוך

הנחיות למשחק

במאמר זה מוצג משחק לשני שחקנים אשר מצריך קובייה ו-8 מדבקות, שבהן רשומים המספרים הטבעיים מ-1 עד 8. כל מספר מופיע בדיוק פעם אחת. מהלך המשחק: השחקן הראשון בוחר את אחת המדבקות ומדביק אותה על אחד הקודקודים של הקובייה. השחקן השני בוחר קודקוד "פנוי" בקובייה ומדביק בו מדבקה בתנאי שאם הקודקוד הנבחר מחובר על-ידי מקצוע לקודקוד שיש בו כבר מדבקה, סכום המספרים המתאימים לקודקודים אלה יהיו מספר ראשוני. בדרך זו ממשיכים לשחק לסירוגין. מפסיד השחקן שאינו יכול לבצע מהלך לפי ההוראות. (הנחיות למשחק זה מופיעות בספרו של אביטל, "מתמטיקה בהנאה", 1991, עמ' 133). להלן דוגמה של משחק: נסמן את קודקודי הקובייה בעזרת אותיות לטיניות.



איור 1

- השחקן הראשון מדביק את המדבקה עם המספר 2 על קודקוד C.
- השחקן השני מדביק את המדבקה עם המספר 6 על הקודקוד H.
- השחקן הראשון מדביק את המדבקה עם המספר 1 על קודקוד G (נא לשים לב כי $6+1$ הוא מספר ראשוני ו- $2+1$ גם הוא מספר ראשוני).
- השחקן השני מדביק את המדבקה עם המספר 4 על קודקוד A.
- השחקן הראשון מדביק את המדבקה עם המספר 3 על קודקוד B (נא לשים לב כי $2+3$ הוא מספר ראשוני ו- $4+3$ גם הוא מספר ראשוני).

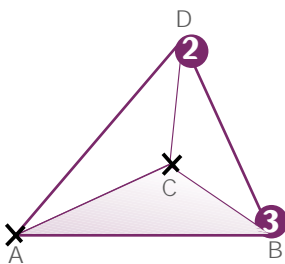
הנותרים. מהלך זה מבטיח לו את הניצחון.

מסקנה כללית

במשחק זה כדאי להיות שחקן שני. שחקן זה יכול להבטיח לעצמו את הניצחון במשחק אם בכל מהלך הוא יבחר מספר בעל זוגיות שונה מזו של המספר הנבחר על-ידי השחקן הראשון, וירשום אותו בקודקוד נגדי לקודקוד שנבחר על ידי השחקן הראשון אבל באותה פאה. לפי שיטה זו, המשחק מסתיים לאחר ארבעה מהלכים ולכן מנצח השחקן השני. בנוסף לכך, מכאן ניתן להסיק שזהו המשחק הקצר ביותר.

שאלה 3: באילו אופנים ניתן להרחיב משחק זה ולקבל משחקים אחרים?

במשחק המקורי משתמשים בקובייה ובמספרים הטבעיים מ-1 עד 8. אם במקום פאון זה משתמשים בפירמידה משולשת אזי צריכים ארבעה מספרים, כי לפירמידה זו ארבעה קודקודים. במשחק "פירמידה ראשונית" עם המספרים הטבעיים מ-1 עד 4, כל משחק נגמר לאחר שני מהלכים ולכן במשחק זה כדאי להיות שחקן שני. בידקו זאת! (ראו רמז באיור 4).



איור 4

נדגים את המשחק "פירמידה ראשונית" כאשר הפירמידה היא מרובעת. בפירמידה מרובעת נדרשות 5 מדבקות, עם המספרים הטבעיים מ-1 עד 5.

איור 5 מדגים משחק שמסתיים לאחר 3 מהלכים ולכן מנצח בו השחקן הראשון. במשחק זה:

- השחקן הראשון מדביק את המדבקה עם המספר 3 על קודקוד E.
- השחקן השני מדביק את המדבקה עם המספר 4 על הקודקוד B.
- השחקן הראשון מדביק את המדבקה עם המספר 2 על קודקוד D.
- לשחקן השני אין אפשרות לבצע מהלך חוקי. לכן הוא מפסיד.

המספרים שנותרו 3, 5, 7 ו-8, המספר שמופיע בו חייב להיות 3 (חשבו מדוע). באותו אופן, המספר 5 חייב להיות בקודקוד F. הקודקוד H שכן של D ושל E, ולכן, מתוך המספרים שנותרו 7 ו-8, בקודקוד H חייב להופיע המספר 7.

הקודקוד היחיד שנשאר פנוי הוא G והמספר היחיד שנשאר ברשימה הוא 8. אבל לא ניתן לרשום את 8 בקודקוד זה כי המספר $8+7$ איננו ראשוני.

מניסיון זה עולה המסקנה כי המשחק לא יכול להסתיים בתיקו.

בנוסף ניתוח זה מראה שהמשחק הארוך ביותר שניתן לשחק הוא בעל שבעה מהלכים. מעניין לדעת מהו המשחק הקצר ביותר?

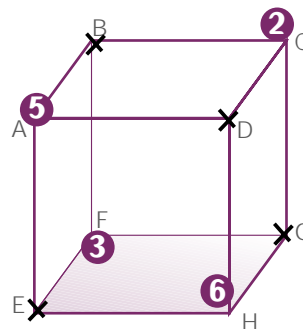
שאלה 2: האם קיימת אסטרטגיית ניצחון לאחד השחקנים? אם כן, לאיזה שחקן: לראשון או לשני?

במשחק זה קיים יתרון לשחקן השני. הוא יכול להכריע את המשחק בדיוק בארבעה מהלכים ולנצח. להלן דוגמה: (איור 3) נניח שהשחקן הראשון בוחר בקודקוד A ורושם בו את המספר 5. אם השחקן השני בוחר בקודקוד C (למשל) ורושם בו מספר זוגי כלשהו, הוא "שורף" את הקודקודים B ו-D כי לא ניתן יהיה לרשום אף מספר בהם. להלן הסיבה:

■ אם רושמים ב-D מספר זוגי אז סכום המספרים על הקודקודים C ו-D הוא זוגי (וגדול מ-2) לכן איננו ראשוני.

■ אם רושמים ב-D מספר אי-זוגי, אז סכום המספרים על

הקודקודים A ו-D זוגי (וגדול מ-2) לכן איננו ראשוני. (אותו הסבר תקף לגבי קודקוד B).



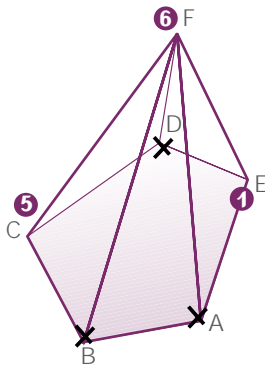
איור 3

קעת תורו שוב של השחקן הראשון: הוא יכול לבחור בכל קודקוד שבפאה הנגדית לפאה ABCD, כלומר, EFG או H.

נניח שהוא רושם את המספר 6 בקודקוד H. השחקן השני יכול לבחור בקודקוד הנגדי לקודקוד H בפאה EFGH, ולרשום בו מספר אי-זוגי, ובכך הוא שורף את שני הקודקודים

שאלה לסיים:

ראינו כי במשחק הקובייה הראשונית קיימת אסטרטגיית ניצחון לשחקן השני, ואילו ב"פירמידה מרובעת ראשונית" קיימת אסטרטגיית ניצחון לשחקן הראשון. אם משחקים את המשחק "פירמידה מחומשת ראשונית" מה כדאי להיות: שחקן ראשון או שחקן שני? באיור 7 מופיע משחק בפירמידה מחומשת אשר מסתיים עם ניצחון של השחקן הראשון. האם יש לו יתרון במשחק זה? אולי לשחקן השני יש דרך למנוע ממנו לנצח? שחקו ובידקו זאת.



איור 7

הערות דיסקטיות

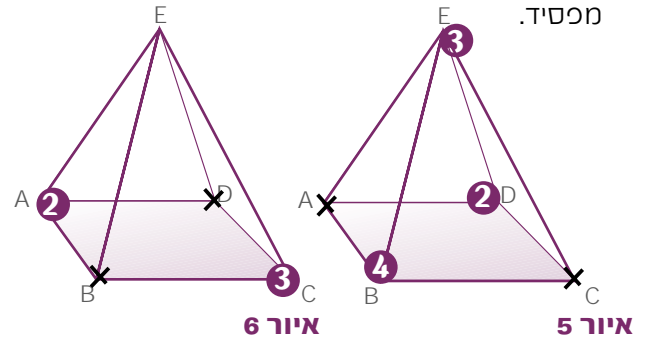
במשחק זה משתלבים בצורה טבעית שני תחומים מתכנית הלימודים במתמטיקה: גיאומטריה של המרחב ותורת המספרים. המושגים הקשורים לגיאומטריה של המרחב הם: קובייה, פאה, קודקוד, מקצוע, פירמידה, ואילו המושגים הקשורים לתורת המספרים הם: מספר ראשוני, מספר פריק, מספר זוגי, מספר אי-זוגי. כמו כן, מספר מיומנויות חשובות בלימוד המקצוע מתמטיקה מוצאות את מקומן כאשר משחקים משחק זה: ראייה מרחבית, מיצוי כל האפשרויות, מתן דוגמאות, הצגת הסבר, השערת השערות, ניסוח הכללות ושאלות.

ניתן לשלב משחק זה החל מכיתות בהן נלמד המושג מספר ראשוני ועד קבוצות בוגרים במפגש חברתי. שילוב זה יכול לעזור בהשגת מטרות שונות בהוראת המתמטיקה, מטרות כגון: יצירת חוויה לימודית מהנה, זימון שיתוף פעולה בין התלמידים, תרגול של מושגים מתמטיים, עידוד של תקשורת מתמטית וכו'.

איור 6 מדגים משחק שמסתיים לאחר 2 מהלכים ולכן מנצח בו השחקן השני.

במשחק זה:

- השחקן הראשון מדביק את המדבקה עם המספר 3 על קודקוד C.
- השחקן השני מדביק את המדבקה עם המספר 2 על הקודקוד A.
- לשחקן הראשון אין אפשרות לבצע מהלך חוקי. לכן הוא מפסיד.



מכאן עולה השאלה: במשחק זה, מה כדאי להיות שחקן ראשון או שני? כדי לענות על שאלה זו יש להבחין שבמקרה זה, לא כל הקודקודים של הפירמידה "שקולים". קיים קודקוד שיש לו ארבע שכנים (קודקוד E), ואילו ליתר הקודקודים 3 שכנים בדיוק. לכן, לשחקן הראשון יש שתי אפשרויות:

■ מקרה א: אם הוא בוחר בקודקוד E, במהלך הבא, השחקן השני יבחר את אחד מקודקודי הבסיס, לדוגמה את הקודקוד B, במהלך זה הוא "שורף" את הקודקודים A ו-C. לשחקן הראשון קיים בהכרח מהלך אפשרי אחד נוסף (לבחור את הקודקוד D) והוא יכול להשתמש בו כדי לנצח (ראה איור 5).

■ מקרה ב: אם הוא בוחר באחד מקודקודי הבסיס של הפירמידה המרובעת לדוגמה הקודקוד C, השחקן השני יכול לנצח על-ידי בחירת הקודקוד A, כי במהלך זה הוא "שורף" את כל יתר הקודקודים (ראה איור 6).

מהאמור לעיל, ניתן להסיק כי בידי השחקן הראשון לנצח. כלומר, אם השחקן הראשון בוחר בקודקוד E של הפירמידה הוא מבטיח לעצמו את הניצחון. כל מהלך אחר, יכול להוביל אותו להפסד.

נא לשים לב כי אין חשיבות למספרים שנבחרים: יש להתייחס רק לקודקודים ולזוגיות המספרים.

[מקורות]

אביטל, ש' (1991). מתמטיקה בהנאה, תל-אביב: עם עובד.