משימות חקר בעולם המספרים השלמים

שלמה חריר, משה סטופל, המכללה האקדמית הדתית לחינוך - "שאנן", חיפה

בתחומים רבים במתמטיקה, מהווה המספר השלם מרכיב מרכזי בפתרון משימות שונות. לעתים קרובות הדרישה היא שהמספר השלם יהיה הפתרון היחיד. למשל, בבעיות העוסקות בגודל אוכלוסיית אנשים, בעלי חיים, חפצים וכדומה המספר חייב להיות שלם; בחלוקת מספרים שלמים המנה והשארית הם מספרים שלמים, ספרותיו של מספר הן מספרים שלמים, וכך גם לגבי מספר איברים בסדרה והמיקום שלהם, כולם מספרים שלמים. במהלך ההתמודדות עם פתרון בעיות או משימות מתמטיות מתקבלים פתרונות מספריים שונים ולעתים יותר מפתרון אחד, והתלמיד חייב לברור את הפתרונות המתאימים. הדרישה לפתרונות עם מספרים שלמים וכן הגבלות נוספות כגון: מספר חד-ספרתי או מספר בתחום מסוים, דורשות לנפות מספרים בלתי מתאימים.

קבלת פתרונות של מספרים לא שלמים, במקרה שהפתרון חייב להיות מספר שלם, יכולה להוות אינדיקציה לכך שהפתרון אינו נכון או שנפלה טעות באחד משלבי הפתרון. תחום מעניין הוא מערכת משוואות למציאת נעלמים, שבה חסרה משוואה אחת או יותר, כשאת המשוואות החסרות משלים הנתון שהנעלמים הם מספרים שלמים. לכאורה ממבט ראשון, לא ניתן למצוא את הנעלמים, כי כידוע מציאת שלושה נעלמים כשנתונות שתי משוואות בלבד, היא משימה בלתי-אפשרית. לאחר מחשבה, התייחסות לנתונים וניתוח המשימה, היא הופכת להיות אפשרית.

בחלק מהמשימות המשוואות הנתונות אינן לינאריות והדבר מגביר את הקושי. במקרים כאלה הדרך למציאת התשובה מבוססת על תהליך של חקר, ניסוי וטעייה. ההתמודדות תורמת לפיתוח החשיבה, לגילוי יופיה של המתמטיקה, ומהווה תמריץ לעיסוק בפתרון בעיות וחידות מתמטיות, במסגרת הלימוד בכיתה וכן כחלק מתרבות הפנאי.

להבלטת חשיבותו של המספר השלם על תכונותיו (פריקות, כללי חלוקה), תוצגנה חמש משימות בליווי הפתרונות שלהן. בחלק מהמשימות תוכן טבלה להצגת ערכי הנעלמים, ועל-ידי חקר, בדיקה וניפוי, ימצאו הפתרונות המתאימים. בחלק מהמשימות יינתנו גם פתרונות אלגבריים המקצרים את הדרך לפתרון. כמו כן ייבחנו היבטים מתודיים.

פתרון משימות מתמטיות במספרים שלמים, שחלקן מאפיינות תחומים שונים של בעיות מעשיות המתעוררות בחיי היום-יום, מהווה תשתית לקידום ההבנה והחשיבות של המספרים השלמים, כחלק מרכזי בעולם המספרים.

משימה מס' 1.

מהירות מופרזת?

בדרך מחיפה לאשדוד יש תמרור המגביל את מהירות הנסיעה ל- 100 קמ"ש. שר התחבורה נסע במכונית השרד מחיפה לאשדוד. בדרכו הוא הבחין באבן דרך ועליה מספר דו-ספרתי. כעבור חצי שעה בדיוק עברה מכוניתו ליד אבן דרך אחרת, שעליה מספר בעל אותן ספרות אך בסדר הפוך. חצי שעה נוספת חלפה והנה אבן דרך שלישית ועליה אותן ספרות (כבתחילה) אך ביניהן הספרה 0. בהנחה שהשר נסע במהירות קבועה, האם הוגש דו"ח על נהיגה במהירות מופרזת?

פתרון בדרך חקר - חשיבה לוגית

יש למצוא את אורך הדרך שעבר השר בשעה. ברור שבמספר שהופיע על אבן הדרך הראשונה, ספרת האחדות גדולה מספרת העשרות, וזאת על-מנת שהמספר שיופיע על אבן הדרך השנייה יהיה גדול יותר. כמו כן ברור שהמספר המופיע על אבן הדרך הראשונה חייב להיות מספר קטן דו-ספרתי. קטן כדי לא לקבל תשובה שמהירות הנסיעה מגיעה למהירות של מטוס.

המספר על אבן-דרך א	המספר על אבן-דרך ב	המספר על אבן-דרך ג	הדרך בק"מ בחצי השעה הראשונה	הדרך בק"מ בחצי השעה השנייה
12	21	102	9	81
13	31	103	18	72
14	41	104	27	63
15	51	105	36	54
16	61	106	45	45
17	71	107	54	36

טבלה 1

לפי תנאים אלו בודקים את האפשרויות החל מהמספר 12, כפי שמראה טבלה 1.
מאחר שהמכונית נסעה במהירות קבועה (לפי הנתון), הרי שהדרך שעברה בחצי השעה הראשונה חייב להיות שווה לדרך שעברה בחצי השעה השנייה. לפי הטבלה רואים שהתשובה הנכונה היא כאשר על אבן הדרך הראשונה מופיע המספר 16 והדרך הכוללת 90 ק"מ כלומר, מהירות של 90 קמ"ש. המסקנה: השר נסע במהירות מותרת.

פתרון בדרך אלגברית

מסמנים את המספר על אבן הדרך הראשונה ב- $\overline{xy}$, על האבן השנייה ב- $\overline{yx}$, ועל האבן השלישית ב- $\overline{x0y}$ מכאן:

$(100x+0\cdot10+y) - (10x+y)=$

$(10y+x) - (10x+y) =$

ומקבלים: $6x - y=0$

הפתרון המתאים של מספר (חייבים להיות מספרים שלמים) הוא $x=1$ ו- $y=6$.

בדרך קצרה יותר, מוצאים את הדרך שעברה המכונית בשעת נסיעה:

$(100x+0\cdot10+y) - (10x+y) \Rightarrow$ הדרך $=90x$

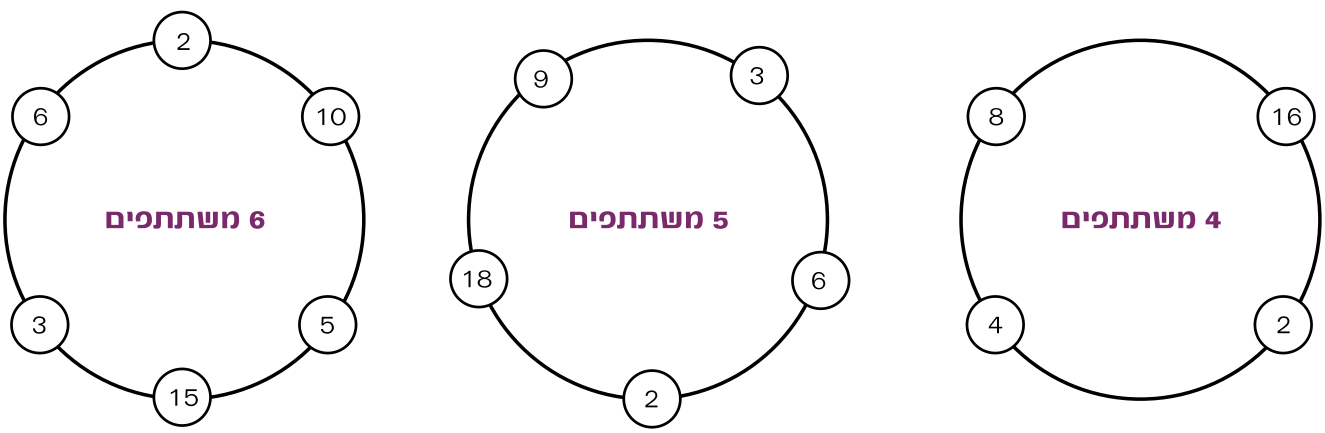
ואז המהירויות האפשריות הן 90 קמ"ש, 180 קמ"ש, 270 קמ"ש, והתשובה הסבירה היא 90 קמ"ש.

משימה מס' 2

לשבץ במעגל -
לא כל המספרים שבחוץ הם ראשוניים

מורה בבי"ס יסודי חילק לשבעה-עשר מתלמידיו מספרים מ- 2 ועד 18 (כולל). כל תלמיד נדרש להצמיד לבגדו, במרכז החזה, את המספר שקיבל. התלמידים נתבקשו להסתדר במעגל באופן שהמספרים של כל זוג שכנים יתחלקו זה בזה (המספר הגדול במספר הקטן). המורה מחלק סוכריות לכל אחד מתלמידיו. תלמיד שלא הצליח להיכנס למעגל מקבל סוכריות לפי המספר שעל חולצתו. מי שנכנס למעגל מקבל לפי מכפלת המספרים של שני שכניו (מימין ומשמאל). מאחר ויוקרתי להיות במעגל יש לפעול שמספר מרבי של תלמידים ישובצו במעגל.

א. מהו המספר המרבי של תלמידים שיוכלו להסתדר במעגל?
ב. מי מהתלמידים יקבל את המספר הגדול ביותר של סוכריות?
ג. מהו המספר הכולל של סוכריות שחילק המורה?



איור 1

דרך הפתרון

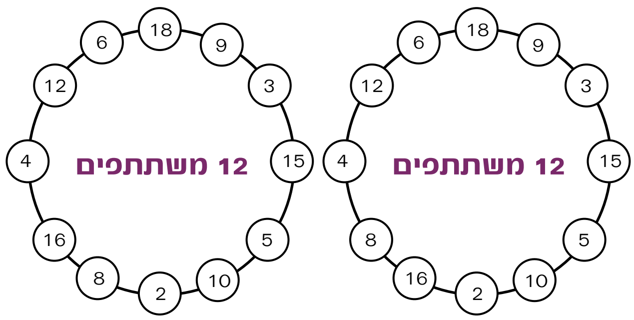
בשלב הראשון מנפים את המספרים שלא ניתן לשבץ להם שכנים במעגל, והם חלק מהמספרים הראשוניים. למספרים הראשוניים: 17, 13, 11 לא ניתן לשבץ שכנים ברי-חלוקה (שימו לב שהמספר 1 אינו מופיע על החולצות).

למספר 14 יש שני שכנים, אולם שיבוצם במעגל בסדר 7, 14, 2 אינו-אפשרי, משום שלמספר 7 לא יהיה שכן בר-חלוקה בהמשך המעגל. מאחר שלא ניתן לשבץ את המספר 7, לא ניתן לשבץ גם את המספר 14. לפיכך המספרים הבאים בחשבון לשיבוץ במעגל הם: 18, 16, 15, 12, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2.

כמו כן, יש לתת את הדעת שהשכנים של המספר 10 חייבים להיות 2 ו- 5.

אפשר לסדר מעגלים עם מספר קטן של תלמידים, כפי שרואים באיור 1. אך כאמור יוקרתי להיות במעגל וכל תלמיד שואף להיכנס אליו.

שתי האפשרויות היחידות לשיבוץ מרבי של משתתפים נראות באיור 2:



סידור א   סידור ב

איור 2

הפרסים לפי סידור א נראים בטבלה 2:

המספר	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
מספר הסוכריות	160	135	96	150	216	7	64	54	10	11	24	13	14	15	16	17	54

טבלה 2

לפי סידור א המורה מחלק 1056 סוכריות, כשהפרס הגבוה ביותר הוא 216 סוכריות.

הפרסים לפי סידור ב נראים בטבלה 3:

המספר	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
מספר הסוכריות	80	135	192	150	216	7	32	54	10	11	24	13	14	15	32	17	54

טבלה 3

גם לפי סידור ב המורה מחלק 1056 סוכריות, כשהפרס הגבוה ביותר הוא 216 סוכריות.

משימה מס' 3

מסדר המפקח

לרגל ביקורו של המפקח בבית הספר, סדרה המנהלת את תלמידי המוסד בריבוע המורכב משורות ועמודות. בהמשך היא שינתה את הצבת התלמידים מריבוע למלבן, כך שמספר השורות גדל ב- 5.

כמה תלמידים לומדים בבית הספר?

דרך הפתרון

מאחר ומספר התלמידים לא השתנה, מחפשים את ממדיו של מלבן השווה בשטחו לריבוע, כשידוע שאורך צלע המלבן גדולה ב- 5 מצלע הריבוע. המשוואה האלגברית היא $s=a^2=(a+5)b$ כאשר s מייצג שטח (מספר התלמידים), a צלע הריבוע ו- b רוחב המלבן. מדובר במשוואה בעלת שני נעלמים אך ידוע שהם מספרים שלמים. רוחב המלבן הוא $b=\frac{a^2}{a+5}$. מחפשים מספר שלם a כך שגם b יהיה מספר שלם. בונים טבלה (טבלה 4) ומתקדמים עד המספרים הדרושים. מקבלים שמספר התלמידים הוא 400.

דרך אלגברית

$$\frac{a^2}{a+5}=\frac{a^2-25+25}{a+5}=\frac{(a+5)(a-5)+25}{a+5}=a-5+\frac{25}{a+5}$$

השבר $\frac{25}{a+5}$ יהיה מספר שלם רק עבור $a=20$.

$\frac{a}{a+5}$	$a+5$	$\frac{a^2}{a+5}$
$\frac{1}{6}$	6	1
$\frac{4}{7}$	7	2
$\frac{9}{8}$	8	3
$\frac{16}{9}$	9	4
⋮	⋮	⋮
$\frac{400}{25}=16$	25	20

טבלה 4

משימה מס' 4

להוכיח כי מספר תלת-ספרתי שספרותיו יוצרות בסדר כלשהו (עולה או יורד) סדרה חשבונית, הוא מספר פריק (לא ראשוני).

דרך הפתרון

יהא המספר $\overline{abc}$, וערכו $100a+10b+c$.
היות והספרות a, b, c מהוות סדרה חשבונית, אזי אחת מהתכונות של סדרה חשבונית היא שפעמיים איבר בסדרה שווה לסכום של שכניו (כל איבר הוא הממוצע החשבוני של שני שכניו), ניתן לרשום $2b=a+c$.
מציבים קשר זה בערך המספר ומקבלים:

$$100a+10b+c=100a+5x2b+c=100a+5(a+c)+c=$$
$$105a+6c=3(35a+2c)$$

המסקנה

ערכו של המספר התלת-ספרתי הוא מכפלה של שני מספרים ועל-כן הוא פריק. בשל הגורם 3 כל מספר תלת-ספרתי שספרותיו מהוות סדרה חשבונית מתחלק ב- 3.
דוגמאות: 741, 963, 258, 147, 135, 123.
ניתן כמובן, ללא שימוש בתבנית מספר, לרשום את כל המספרים האפשריים (קיימים סה"כ 30 מספרים תלת-ספרתיים בעלי ספרות שונות המהווים סדרה חשבונית) ולראות שאכן כולם מתחלקים ב- 3 (לפי סכום ספרותיהם) ועל-כן הם פריקים.
המשימה הנ"ל יכולה לשמש לא רק להטמעת המושגים פריקות של מספר וכללי החלוקה, אלא, גם להיכרות ראשונית עם המושג סדרה חשבונית.

משימה מס' 5

מספר "ענק" הורכב מכל המספרים 1, 2, 3, ..., 100, לפי הסדר 123456789101112 ....., 99100
האם מספר זה מתחלק ב- 4, ב- 8 וב- 3?

דרך הפתרון

חלוקה ב- 4

כל מספר המסתיים ב- 100, 200 וכו 'מתחלק ב- 4. לפיכך המספר ה"ענק", מתחלק ב- 4.

חלוקה ב- 8

כל מספר המסתיים ב- 200, 400 וכו' מתחלק ב- 8. המספר ה"ענק" מסתיים ב- 100 ועל-כן אינו מתחלק ב- 8.

חלוקה ב- 3

מספר מתחלק ב- 3 אם סכום ספרותיו מתחלק ב- 3. לשם בדיקת החלוקה ב- 3 יש לחשב את סכום ספרותיו של המספר ה"ענק".
כל ספרה חוזרת על עצמה 10 פעמים, כספרת יחידות, ו- 10 פעמים, כספרת עשרות, דהיינו 20 פעם, ולסכום יש להוסיף 1 בגלל המספר האחרון 100.
הסכום הוא 20 פעם ערך כל ספרה, בתוספת 1 (מהמספר 100):

$$20(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)+1=901$$

סכום הספרות של המספר ה"ענק" 901 אינו מתחלק ב- 3 ולכן המספר ה"ענק" אינו מתחלק ב- 3.
בנוסף לכך, ניתן לשאול את התלמידים מכמה ספרות מורכב המספר ה"ענק".

משימות נוספות ניתן למצוא במקורות 1-4.

מקורות

1. סטופל, מ' ואוקסמן, ל' (1998). חידות, בעיות ומשימות מתמטיות בעלות פתרונות עם מספרים שלמים בלבד, **על"ה, עלון למורה המתמטיקה.**
2. סטופל, מ' ואוקסמן, ל' (תש"ס). מספרים ראשוניים המופיעים במשימות ובעיות מתמטיקה. **שאנן, ו', שנתון המכללה האקדמית הדתית לחינוך.**
3. סטופל, מ' (תשנ"ט). הצגת משימות ככלי להגברת מוטיבציה ופיתוח החשיבה בלימודי חשבון ומתמטיקה. **שאנן, ה', שנתון המכללה האקדמית הדתית לחינוך.**
4. סטופל, מ', וחריר, ש' (התקבל לשנתון "שאנן"). התמודדות עם משימות מיוחדות של סדרות, מספרים, שלמים, ריבועי מספרים שלמים, מספרים ראשוניים ומספרים מרוכבים.