מן השטח

בערוגת הגינה - כפל שברים פשוטים

שרי גלסמן, איריס בליזובסקי

הקדמה

האלגוריתם של כפל שברים פשוטים נחשב בעיני הילדים כאלגוריתם מאוד פשוט בהשוואה לאלגוריתם המקובל של חיבור וחיסור שברים פשוטים. אבל בניגוד ליכולת להבין מה עומד מאחורי האלגוריתם של חיבור וחיסור, הלומדים אינם "רואים" את הקשר בין תרגיל הכפל למכפלה המתקבלת באלגוריתם הכפל.

בתכנית הלימודים במתמטיקה שנכתבה בשנת תשמ"ח נאמר: "את כללי הכפל של שברים ניתן לקבל על סמך השימוש בכפל למציאת שטח של מלבן."

הצעת תכנית הלימודים, והקושי של הלומדים להבין את הקשר בין תרגיל הכפל בשברים למכפלה המתאימה לו, הביאו אותנו לבניית המשימה "בערוגת הגינה".

המשימה מזמנת ללומדים תכנון גינה מלבנית בהתאם למספר דרישות, המובילות למצבי כפל שברים פשוטים. מצבים אלה מבוססים על חישוב שטח של מלבן.

המשימה מבוססת על ההנחה שגם כאשר מידות המלבן מוצגות כמספרים רציונאליים שאינם טבעיים, המכפלה שלהם תיתן שטח של מלבן.

במשימה המוצגת מחשבים הלומדים את השטח היחסי של כל חלקה בערוגה.

המשימה ניתנה בתחילת כיתה ו' כפעילות פותחת לנושא כפל שברים פשוטים.

העבודה על המשימה נעשתה בקבוצות הטרוגניות, בכל קבוצה 5-6 לומדים.

להלן מוצגים תיעוד ודיון באסטרטגיות פתרון של ארבעה לומדים.

הצגת המשימה

בערוגת הגינה

בבית הספר הוחלט לתכנן ערוגה בצורת מלבן.
ניתן לשתול בערוגה פרי, ירק, תבלינים ופרחים.
הנהלת בית הספר חייבה את מתכנני הערוגה לעמוד במספר דרישות.
השטחים יחולקו כך:
א. לפרי - רבע מתוך חצי ערוגה.
ב. לפרחים - שלושה רבעים מתוך חצי ערוגה.
ג. לירק - שני שלישים מתוך חצי ערוגה.
ד. לתבלינים - שליש מתוך חצי ערוגה.

1. שרטטו ערוגה מתאימה.
2. רשמו ליד כל חלקה של הערוגה בציור, את השברים המתאימים למידות החלקה (אורך ורוחב).
3. כתבו תרגיל כפל מתאים לחלק מתוך הערוגה שהוקצה לכל אחד מהגידולים הבאים:
א. פרי,
ב. פרחים,
ג. ירק,
ד. תבלינים.

נסו לגלות את הקשר בין התרגיל למכפלה המתאימה לו.

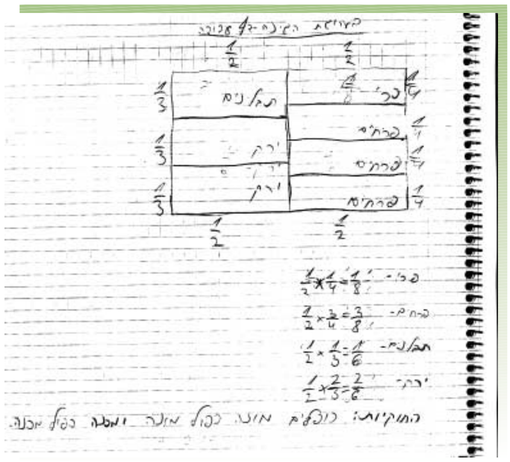
מאמר זה הוא תוצר של הוראת תלמידים ומורים בגישה "הבניית הוראת המתמטיקה על דרכי החשיבה של ילדים", במשך מספר שנים. ברצונינו להודות לדר' רותי שטיינברג שפתחה בפנינו עולם ומלואו ושתפה אותנו בהתנסות חקר ותיעוד גישת הוראה זו.

תיעוד תהליך ההתמודדות עם המשימה

בתחילה התמודדו הלומדים באופן עצמאי עם שרטוט הערוגה לפי הדרישות הנתונות במשימה. חלק מהילדים ניסו לבנות מלבן שיותאם לדרישות הערוגה, בהתבססם על המשבצות בדף. חלקם התעלמו מהמשבצות ושרטטו מלבן ללא התייחסות מכוונת לאורכי הצלעות. הלומדים שניסו לבנות את צלעות המלבן על סמך מספר המשבצות, נתקלו בחלקם בקושי בשרטוט מלבן שיתאים לכל דרישות הערוגה. כמו כן הדבר הצריך תיווך שונה מלומד ללומד, עקב השרטוטים השונים שתכננו הלומדים.

לאחר שלכל לומד היה שרטוט ראשוני של הערוגה, נערך דיון על מגוון השרטוטים.

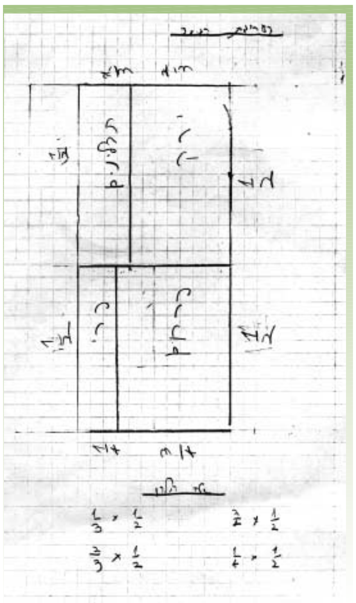
נטע הציגה את השרטוט שהכינה (איור 1): "אני חילקתי את המלבן לשני חלקים שווים. חצי ממנו חילקתי לרבעים, וחצי אחר חילקתי לשלישים."



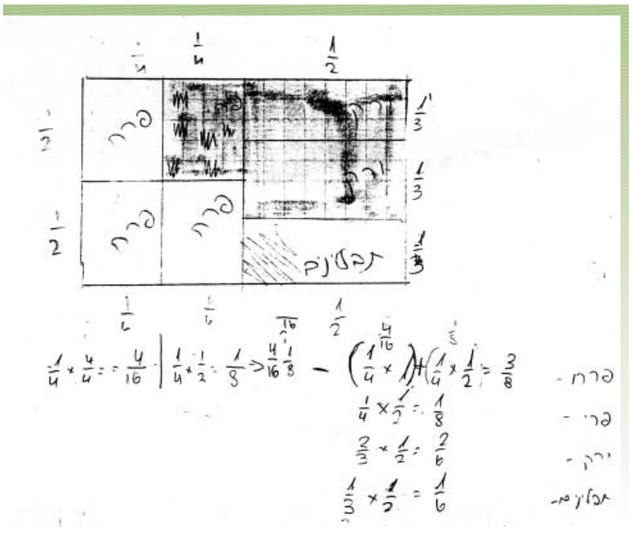
איור 1

(התרגילים המתועדים ופתרונותיהם יוסברו בהמשך.)

אמיר (איור 2): "גם אני חילקתי את המלבן לשני חלקים שווים כמו נטע. בחצי העליון סימנתי קו אחרי שליש וכתבתי תבלינים ועל השאר ירק, שזה שני שליש, ובחצי התחתון סימנתי קו אחרי רבע וכתבתי פרי, ועל החלק שנשאר כתבתי פרחים, שזה שלושה רבעים."



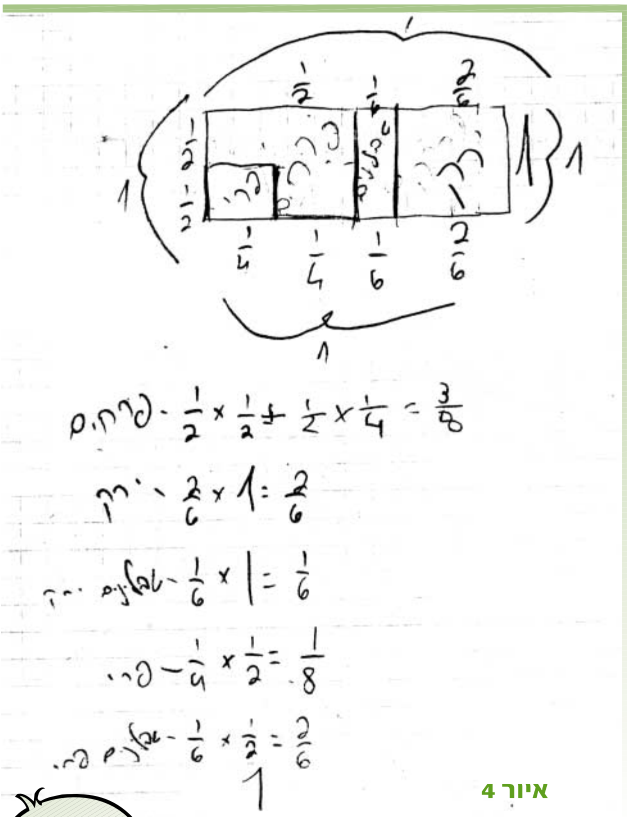
איור 2



איור 3

שני (איור 3) אמרה: "אני חילקתי לשניים לאורך, כמו נטע, אבל חילקתי לרבעים אחרת ממנה."

ירדן (איור 4): "גם השרטוט שלי דומה לשרטוטים שלכם, גם אני לא סימנתי את כל הקווים (קווי החלוקה), אבל השרטוט שלי דומה גם לשרטוט של שני. את הרבע חילקתי כמו שני, לשני הכיוונים."



איור 4

המורה התייחסה לכל השרטוטים: "האם לדעתכם כל השרטוטים נכונים?"
הילדים הסבירו שכל השרטוטים נכונים מכיוון שהם עונים על דרישות תכנון הערוגה, אבל יש הרבה דרכים לחלק את שטח הערוגה.
המורה: "אני רואה משהו משותף בדרך בה שרטטו נטע ואמיר את הערוגה שלהם, ודרך אחרת של שרטוט המאפיינת את השרטוטים של שני וירדן. מה דעתכם?"
אמיר: "אני חושב שאני מבין למה את מתכוונת. אנחנו השתמשנו במשבצות שבדף כדי לשרטט את הערוגה."
ירדן: "אני באמת הסתבכתי בהתחלה בגלל המשבצות האלו, ניסיתי שיהיו 12 משבצות. בסוף החלטתי להתעלם מהמשבצות ולחלק לפי השברים אפילו שהקווים יוצאים לא לפי המשבצות."
אמיר: "בגלל השלוש והארבע, נכון? זה כמו מכנה משותף."
ירדן: "כן, חשבתי שזה יצליח ככה אבל זה לא."
המורה: "מה אתכם אמיר ונטע?"
אמיר: "לי היה ישר ברור שזה צריך להיות מספר שמתחלק גם בשלוש וגם בארבע, כמו מכנה משותף. זה מה שאני עשיתי ולדעתי גם נטע. תראו אם תסובבו את השרטוט של נטע, תראו שזה בדיוק כמו החלוקה אצלי. רק שנטע סימנה את הקווים הפנימיים ואני לא."
המורה: "כולם התחילו משרטוט שמסתמך על המשבצות?"
שני: "אני לא, ישר ראיתי במלבן ששרטטתי, שזה לא יתחלק בדיוק לשלישים, אז חילקתי שני שלישים עם שלוש משבצות ואחד עם ארבע, אבל התייחסתי לזה כאל שלישים שווים, אפילו שזה לא יצא כך בשרטוט. עם הרבעים זה דווקא הסתדר לי בסדר."
המורה חייכה למשמע השיחה שהתפתחה בין הילדים בקבוצה והמשיכה. היא לקחה שרטוט אחד ושאלה: "איך מחשבים שטח של מלבן?"
הילדים: "כופלים שתי צלעות סמוכות."
המורה: "בואו נתבונן בשרטוט של אמיר. לכמה חלקים חילק אמיר את הצלע השמאלית?"
הילדים: "לשניים."
המורה: "אז איך נקרא לכל חלק של הצלע?"
הילדים: "חצי."
המורה: "עכשיו נתבונן בצלע התחתונה, איך נקרא לכל חלק שלה?"
אמיר: "לחלק אחד נקרא רבע ולשני שלושה רבעים. ובצלע העליונה, לחלק אחד נקרא שליש ולשני שני שלישים. והימנית כמו השמאלית."
הלומדים חזרו לפעול באופן עצמאי בשרטוטים שלהם והמורה תיווכה במידת הצורך.
ירדן (למורה): "לי יש בעיה בצלע העליונה. החלק השמאלי שלה זה חצי. ואת החצי השני חילקתי לשליש ושני שלישים. אז זה מה שאני כותבת?"
המורה: "זה שליש ממה?"
ירדן: "שליש מתוך החצי."
המורה: "ואיזה חלק זה מתוך השלם?"
ירדן: "זה יכנס 6 פעמים בתוך הצלע השלמה אז זה שישית? כן זה יהיה שישית."
לאחר שכל הלומדים כתבו את שמות החלקים בשרטוט שלהם, הפנתה המורה את הלומדים לשרטוט של נטע.
המורה: "אמרתם שכדי לחשב שטח של מלבן צריך לכפול שתי צלעות סמוכות. עד היום עשיתם זאת רק עם צלעות שהן מספרים טבעיים, כלומר, מספרים שלמים חיוביים. כעת יש לנו צלעות של מלבן שהן חלק משלם - שברים. כדי להמשיך לחשב שטח באותה הדרך שפעלנו עד היום, אנחנו מניחים שהמכפלה של שני השברים תיתן גם היא את שטח המלבנים שנוצרו בערוגה.
נתבונן בערוגה של נטע ונרשום תרגיל כפל שיביע את השטח של כל חלקה בערוגה.
מאיזו חלקה נטע, היית רוצה להתחיל?"
נטע: "מהפרי. $\frac{1}{2}x\frac{1}{4}$ אבל אני לא יודעת כמה זה."
המורה: "נכון, אם היינו יודעים לפתור תרגילי כפל, לא היינו זקוקים לערוגה... אנחנו בונים עכשיו רק את התרגילים, אחר-כך נחפש דרך אחרת להגיע למכפלות.
איזה תרגיל מתאים לאזור הפרחים?"
אמיר: " $\frac{1}{2}x\frac{3}{4}$ "
שני: "אפשר גם שלוש פעמים רבע כפול חצי:
$3x\frac{1}{2}x\frac{1}{4}$ "
המורה: "ולחלקת התבלינים?"
נטע: " $\frac{1}{3}x\frac{1}{2}$ ולחלקת הירק $\frac{2}{3}x\frac{1}{2}$ או $2x\frac{1}{3}x\frac{1}{2}$, לפי הדרך של שני."
המורה: "כל אחד מכם ישלים לכל חלקה בשרטוט שלו את תרגילי הכפל המתאימים."
המורה (לנטע): "תנסי לגלות איזה חלק מהערוגה כולה תופסת כל חלקה."
הדיון הקבוצתי נמשך לאחר שכל הלומדים כתבו תרגילי כפל לחלקות השונות בערוגתם.
המורה: "מי רוצה להציג בפנינו את התרגילים שכתב

שני (ראה איור 3): "התבלינים והירק זה כמו אצל נטע. אבל הפרחים אצלי זה אחרת. החלקה הזו היא בכלל לא מלבן אצלי. אז פילגתי את הצורה הזו לשני מלבנים. במלבן אחד, אחת הצלעות היא שלם אחד והשנייה היא רבע, אז זה רבע כפול 1, ובמלבן השני זה רבע כפול חצי, ויש לחבר את שתי המכפלות."

ירדן (ראה איור 4): "גם אצלי הפרחים נראים כמו אצל שני. ואני גם השתמשתי בפילוג, אבל יש לי תרגילים שונים, במלבן אחד זה חצי כפול חצי ובמלבן השני זה רבע כפול חצי."

המורה: "טוב, אחרי שגילינו איזה תרגיל כפל מתאים לכל חלקה, נותר לנו לברר מהן המכפלות המתאימות לתרגילים, ואז ננסה להיעזר בתרגילים ובמכפלותיהם כדי לגלות כיצד כופלים שברים פשוטים. אמיר, ניעזר בשרטוט שלך כדי לבדוק איזה חלק מהערוגה מהווה חלקת הפרי."

נטע: "שמינית, חלק אחד מתוך שמונה חלקים."

המורה: "זאת אומרת שרבע כפול חצי שווים לשמינית. מה לגבי הפרחים?"

תומר: "זה פי שלוש מהפרי, אז זה שלוש שמיניות."

לאחר שכל לומד כתב את המכפלה המתאימה לכל אחת מהחלקות בערוגה, אמרה המורה: "בואו נערוך רשימה של כל התרגילים והמכפלות שכתבתם. נתחיל מהתרגיל והמכפלה שגילינו יחד בשרטוט של אמיר של חלקת הפרי:

$\frac{1}{2}x\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

אם למישהו יש תרגיל אחר לחלקה מסוימת שיאמר אותו."

(כל הילדים בקבוצה כתבו אותו התרגיל לחלקת הפרי.)

המורה: "נעבור לחלקת הפרחים."

אמיר:

$\frac{1}{2}x\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

שני:

$\frac{1}{4}x1+\frac{1}{4}x\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

ירדן:

$\frac{1}{2}x\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

המורה: "אילו תרגילים ומכפלות כתבתם לחלקת התבלינים?"

נטע:

$\frac{1}{3}x\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

ירדן:

$\frac{1}{6}x1=\frac{1}{6}$

המורה: "חלקת הירק?"

שני:

$\frac{2}{3}x\frac{1}{2}=\frac{2}{6}$

ירדן:

$\frac{2}{6}x1=\frac{2}{6}$

המורה: "האם אתם רואים קשר בין התרגילים למכפלותיהם?"

נטע: "בכל התרגילים שלי אני רואה שאם נכפול מונה כפול מונה ומכנה כפול מכנה מתקבלת המכפלה שגילינו."

המורה: "באמת? זה פועל בכל המקרים?"

נטע: "כן!"

המורה: "אצל כולם זה ככה? ירדן גם אצלך זה פועל בכל התרגילים?"

ירדן: "בתבלינים ובירק אני לא בטוחה."

המורה: "למה?"

ירדן: "כי בירק ובתבלינים אחד הגורמים הוא שלם אחד."

$\frac{1}{6}x1=\frac{1}{6}$

$\frac{2}{6}x1=\frac{2}{6}$

המורה: "מה דעתכם? האם גם פה זה מתאים לחוקיות שנטע מצאה?"

אמיר: "אפשר, אם נציג את האחד כשבר: $\frac{1}{1}$, אבל אין צורך כי אנחנו יודעים ש- 1 הוא ניטרלי בכפל, זה סתם יותר מסובך."

המורה: "ירדן ושני, אצלכן לאזור הפרחים היו תרגילים מורכבים. בואו נתבונן בהם ונראה האם אפשר להשתמש בחוקיות גם בהם."

שני:

$\frac{1}{4}x1+\frac{1}{4}x\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

ירדן:

$\frac{1}{2}x\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

שני: "זה בסדר, רק שהמכפלה מורכבת מחיבור של שתי מכפלות שאפשר להגיע אליהן בדרך של נטע."

ירדן: "וחצי כפול חצי זה בדיוק כמו רבע כפול אחת לפי הדרך של נטע."

המורה: "ואיך לדעתכם נוכל לפתור את התרגיל הזה בדרך

של נטע?"

$3\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$

אמיר: "אפשר לפי חוק הפילוג: $3\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$".
המורה: "האם יש למישהו רעיון נוסף?"

שני: "אם נהפוך את $3\frac{1}{4}$ לשבר מדומה ונציג אותו כמונה חלקי מכנה נוכל להשתמש בחוקיות של נטע."

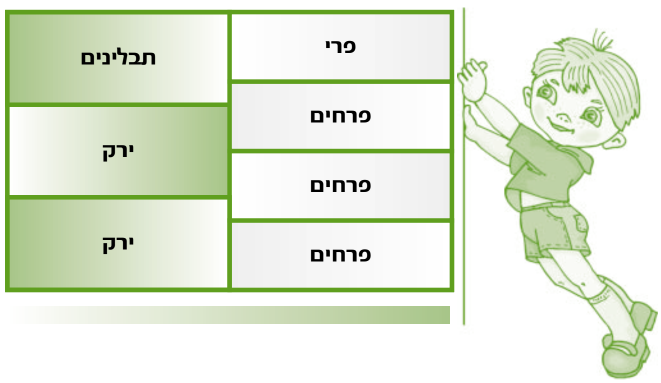
המורה: "אז מה גילינו היום באמצעות המשימה?"

נטע: "גילינו שצריך להגיע למצב שבו אפשר לכפול מונה כפול מונה, מכנה כפול מכנה."

אמיר: "ועם כל תרגיל כפל של שברים פשוטים נוכל להגיע למצב כזה של מונה כפול מונה ומכנה כפול מכנה, אפילו אם בתרגיל יהיו שלמים או מספרים מעורבים, רק שלפעמים יותר פשוט לפתור זאת בדרך אחרת."

רפלקציה של אחת המורות בעקבות תהליך ההתמודדות עם המשימה

כשנתתי בפעם הראשונה את המשימה, לא תיארתי לעצמי שיווצרו שרטוטים שונים לנתוני הערוגה. בדמיוני ראיתי את השרטוט הבא:



כשהתחילו הלומדים לשרטט את ערוגותיהם וגיליתי מגוון של שרטוטים, חששתי שהלומדים לא יגיעו למטרה שעמדה לנגד עיניי כשבניתי את המשימה - איך ומדוע כופלים שברים פשוטים. הבנתי שאני יוצאת להרפתקה יחד עם תלמידיי, שבה אני אלמד לפחות כמותם.
כשהתחילו הלומדים בשרטוט המלבן הם התמודדו עם השאלה איך לשרטט את המלבן? שאלה שלא התמודדתי אתה בבניית הערוגה שבניתי בדמיוני, מצאתי את עצמי מתמודדת יחד עם הלומדים, מה צריכות להיות מידות המלבן אם רוצים להשתמש במשבצות, כך שיתאימו לנתוני המשימה, מה שהתברר כמידות שונות בהתאם לאופן החלוקה של אזורי הערוגה. הלומדים הראו שהם יוצרים קשרים בין תכנים מתמטיים שונים. הרעיון של מכנה משותף נלקח מחיבור וחיסור שברים פשוטים ונעשה בו שימוש למציאת מידות המלבן. הלומדים גילו שניתן לשרטט מלבן שבו אורך של צלע אחת בלבד הוא כפולה של 3 ושל 4, בניגוד למה שחשבו תחילה שאורך שתי הצלעות צריך להיות כפולה של 3 ו- 4.
לעומתם היו לומדים שהחליטו לפתור את הקושי על-ידי שרטוט מלבן שאינו בנוי על המשבצות. בקבוצות נוספות היו שביקשו דפים חלקים לשרטוט המלבן.
קושי זה הוביל אותי למחשבה שאולי היה עדיף מלכתחילה לתת לילדים דף חלק, אבל לאחר שראיתי את הדיון המעניין שהתפתח בעקבות קושי זה, החלטתי לא לוותר על ההתמודדות הטבעית שיכולה לעלות והשארתי את הבחירה בידי הלומדים.

עם ההתקדמות של הלומדים בשרטוט הערוגה התגלו קווי חלוקה שונים בשרטוטיהם, מה שהביא אותי לתהייה האם הם יצליחו לבנות תרגילי כפל מתאימים לחלקות השונות, שאצל חלקם לא היו חלקות בצורת מלבן. המשימה התבססה על בניית תרגיל כפל למציאת שטח של מלבן שבו הגורמים הם שברים פשוטים. החלטתי לזרום עם שרטוטי הלומדים כפי שהם ולראות מה יתפתח בהמשך המשימה.

עם השנים למדתי ש"סייג לחכמה - שתיקה", הלומדים מתמודדים עם הקשיים שמעלות האסטרטגיות שלהם, משכללים את האסטרטגיות ומוצאים פתרונות לקשיים שבדרך.

במבט לאחור על התהליך שהתרחש בפתרון המשימה ראיתי שכל ה"קשיים" שצפיתי בעצם הובילו להתפתחות וגילוי של מגוון תרגילי כפל שלם בשבר וכפל שבר בשבר, שכדי לפתור אותם הלומדים השתמשו באלגוריתם שגילו באמצעות המשימה או באמצעות ידע מתמטי קודם (חוק הפילוג ו- 1 כאיבר ניטרלי בכפל).

אין ספק שהמשימה היוותה חוויה הן עבור הלומדים והן עבורי. תהליך הלמידה היה דו כיווני. למדתי איך אפשר להגיע לאלגוריתם שפרוצדורלית הוא מאוד פשוט, אבל הקשר בין התרגיל למכפלה מהווה "תעלומה". תהליך זה העמיד בפני אתגר חדש - בניית משימה שתזמן גילוי של האלגוריתם המתמטי לחילוק שברים פשוטים.