

## ג'ורג' פויה (1887-1985)

מרגרט פרוים, מרכז מורים ארצי אוניברסיטת חיפה, מכללת תלפיות



**"עבור החינוך המתמטי ועולם השיטות לפתרון בעיות מסמל ספר זה (גיורג' פויה, כיצד פותרין?) קו הפרדה בין שתי תקופות: פתרון בעיות לפני פויה ופתרון בעיות אחריו". (Schoenfeld, 1987)**

**"שתי מטרות צריכות לעמוד לנגד עיניו של המורה, כאשר הוא מעלה לפני תלמידיו שאלה: הראשונה - הרצון לעזור לתלמיד לפתור את הבעיה שלפניו. השנייה - השאיפה לפתח בתלמיד יכולת כך שבעתיד יוכל לפתור בעיות בכוחות עצמו". (פויה, כיצד פותרין?, 1961)**

### על משפחתו

גיורג' פויה נולד ב-13 בדצמבר, שנת 1887, בעיר בודפשט שבהונגריה, 21 שנה לאחר שהונגריה זכתה לאוטונומיה כמעט מלאה בתוך הקיסרות האוסטרו-הונגרית. הוריו של פויה היו יהודים, ושמו אנה ויעקב פולק. מקור משפחתה של אנה מצד אימה הוא מהעיר בודה (כיום בודפשט), ומקור משפחת אביה הוא מהעיר הקטנה לוגוש (Lugoj), היום חלק מרומניה. אמו של פויה הייתה אישה יפת מראה ואינטליגנטית. אביו, יעקב, היה עורך דין, עד אשר המשרד שבבעלותו פשט את הרגל, והוא עבר לעבוד בחברת ביטוח גדולה. מדי יום, לאחר ארוחת הערב, נהג יעקב להסתגר בחדר העבודה שבביתו, שם עסק במחקר ובכתיבה בנושאים שבהם התעניין באמת - כלכלה וסטטיסטיקה. יעקב שאף לקבל משרה אקדמית, אך חשש שמא יהדותו תפגע בסיכוייו לזכות במשרה. על כן שינה את שם המשפחה מפולק לשם בעל צליל הונגרי פויה (Polya), והמשפחה כולה המירה את דתה והתנצרה.

בסופו של דבר זכה האב במשרה הנכספת, אך הוא נפטר זמן קצר לאחר מכן, בגיל 53. יעקב הותיר אחריו את אשתו אנה וחמשת ילדיהם, ביניהם גיורג' בן העשר. עול פרנסת

המשפחה הוטל כעת על האחים הבוגרים: ינו - Jeno (שלימים הפך למנתח בעל שם עולמי), אילונה - Ellona ופלורה - Flora (Alexanderson, 2000). גיורג' פויה היה ילד שובב ונמרץ, כפי שעולה ממכתב שכתב לאביו בחופשת הקיץ, ובו התייחס גיורג' ליחסיו עם קרובים-רחוקים שבאו לביקור: "התחברנו מיד ביום הראשון", הוא כותב, "ובאותו יום כבר רבתי עם כולם". פויה היה נער אתלטי ואהב לעסוק בספורט. בצעירותו שיחק כדורגל, וכסטודנט באוניברסיטה אף זכה בפרס בתחרות היאבקות ומאוחר יותר נהנה לגלוש בהרי שוויץ. הספורט שהיה אהוב עליו במיוחד במהלך חייו היה ההליכה (Taylor, 1993).

### "שניים היו נבזיים ואחד טוב"

גיורג' פויה למד בגימנסיה בבודפשט. המורים, שלימדו אותו לטינית, הונגרית וגיאוגרפיה היו, לדעת פויה, יוצאים מן הכלל. לגבי המורים שלימדו אותו מתמטיקה, דעתו הייתה כי "שניים היו נבזיים ואחד טוב". ייתכן, כי בכך נעוץ ההסבר לחוסר התעניינותו של פויה בשלב זה במתמטיקה.

שבאופן כללי, שלא כמו פיסיקה או כימיה, מתמטיקה היא המדע הזול ביותר, וכל מה שצריך כדי לעסוק בה הם עיפרון ונייר. זו לא הייתה הערה בעלמא לנוכח העובדה שהונגריה הייתה אז מדינה ענייה יחסית. בתשובה אחרת, ממוקדת יותר לאותה שאלה, הצביע פויה על השפעתו של פרופסור פייר.

פייר לבדו משך צעירים רבים למתמטיקה, באמצעות הרצאותיו, הדיונים ופגישותיו הבלתי פורמליות עם הסטודנטים שלו (Wieschenberg, 1987).

את שנת 1910 בילה ג'ורג' פויה בלימודים באוניברסיטת וינה. את פרנסתו מצא, בין היתר, במתן שיעורים פרטיים לנער לקוי-למידה. בספרו Mathematical Discovery, התייחס פויה להתנסותו זו כאל "תחילת ההתעניינות ארוכת השנים בפתרון בעיות". ואולם, בשל אווירת האנטישמיות בווינה חזר פויה לאוניברסיטת בודפשט ושם הוענק לו בשנת 1912 תואר דוקטור.

### במכון הטכנולוגי הפדרלי בציריך

בשנת 1914, עם פרוץ מלחמת העולם הראשונה, החל ג'ורג' פויה ללמד במכון הטכנולוגי הפדרלי בציריך (בין תלמידי אותו מכון נמנה גם לא אחר מאשר הפיזיקאי הנודע אלברט איינשטיין, שסיים שם את לימודיו בשנת 1900). עם התקדמות המלחמה קרא לו הצבא ההונגרי להצטרף לשורותיו, אלא שפויה, שהושפע מכתבי המתמטיקאי והפילוסוף ראסל (Bertrand Russell) התנגד למלחמה וסירב לחזור להונגריה.

בשנת 1905 החל ג'ורג' פויה בלימודי משפטים באוניברסיטת בודפשט. בתום סמסטר אחד עזב את לימודי המשפטים ופנה ללמוד שפות וספרות. הוא קיבל רישיון לעסוק בהוראת לטינית והונגרית לגילאי 10 עד 14 - רישיון בו היה גאה מאוד למרות שמעולם לא עשה בו שימוש. בשלב זה החל פויה ללמוד פילוסופיה. היה זה המרצה שלו לפילוסופיה שהמליץ בכניו להשתתף במספר קורסים של פיסיקה ומתמטיקה.

אחת מאמרותיו המבדחות של פויה, בנוגע לסיבה שבזכותה החליט ללמוד דווקא מתמטיקה הייתה: "חשבתי שאני לא מספיק טוב לפיסיקה ויותר מדי טוב לפילוסופיה. מתמטיקה היא ביניהם".

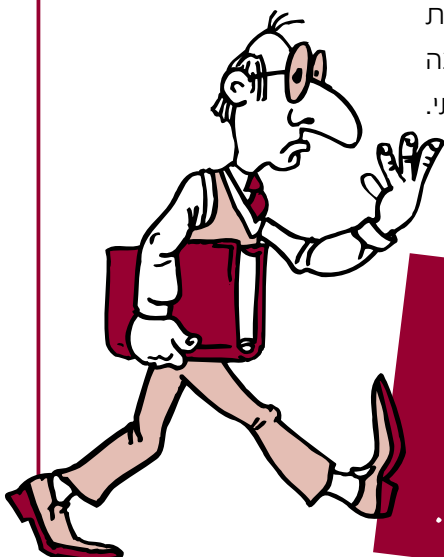
אחד האנשים שהשפיעו רבות על התפתחותו של ג'ורג' פויה היה ליפוט פייר (Lipot Fejer), מרצה למתמטיקה באוניברסיטת בודפשט. ג'ורג' פויה מיטיב לתאר את גודל ההשפעה שהייתה לפרופסור פייר עליו:

"כולנו היינו תלמידיו (...) אני עדיין מתרגש כשאני נזכר כמה מאלפות, משעשעות ומעניינות היו הרצאותיו. פייר ביטא את התיאורמות כאילו היו אנקדוטות, והיה זה ממנהגו להשתמש בטרמינולוגיה מתמטית גם כאשר דיבר על נושאים לא מתמטיים. לדוגמה, פעם אמר: אנא זכרו שמשכורתו של מורה למתמטיקה הכרחית למחייתו, אך לא מספיקה" (Taylor, 1993).

כשפויה נשאל מה הביא לדעתו למספרם הרב של מתמטיקאים הונגרים בתחילת המאה ה-20, הוא ענה,

### הידעתם ש...

בשנת 1978, נערך בארה"ב כנס משותף של The American Math Society ושל The Mathematical Association of America בהשתתפות פויה. נושא אחת ההרצאות בכנס היה "איך לא ללמד מתמטיקה". במקום לדבר על הנושא, המרצה הדגים בהרצאתו, באופן מכוון, מהי הרצאה גרועה במתמטיקה באופן יסודי ומהותי. המרצה אמנם שיעשע מאוד את קהל המאזינים אך כמעט הרס את הכנס כולו, שכן המאזינים שמו לב לכך שטעויות מכוונות רבות של המרצה חוזרות ונשנות באופן בלתי מכוון ובלא משים בחלק נכבד מההרצאות של הדוברים האחרים. הרצאתו של ג'ורג' פויה לעומת זאת, הייתה ללא רבב.



הזמנה לכנס הארצי  
איך לא  
ללמד מתמטיקה!  
כולכם מוזמנים.

בני הזוג פויה חיו בצניעות ונהגו לעזור לקרובים ומכרים שעברו תקופה כלכלית קשה בהונגריה שלאחר המלחמה (Taylor, 1993).

פרט מעניין נוסף הראוי לציון הוא שפויה, אף-על-פי שאהב בכל מאודו לעסוק בפתרון בעיות מתמטיות, לא השכיל לפתור את הבעיות במשק ביתו, ונותר אובד עצות אף מול התקלות הפשוטות ביותר. כך קרה, שאשתו סטלה נאלצה לבקש, בדרכים מתוחכמות, מאורחים מזדמנים להושיט יד ולתקן תקלות קטנות בביתם.

### תחרות במתמטיקה ותכנית לימודים להוראת המתמטיקה

בשנת 1946, ייסד ג'ורג' פויה יחד עם המתמטיקאי גבור סגו (Gabor Szego) את "התחרות במתמטיקה" של אוניברסיטת סטנפורד. תחרות זו הפכה למסורת במהלך כ- 20 שנה. בשנים האחרונות לקיומה השתתפו בה כ- 1200 סטודנטים בכל שנה.

בשנת 1953, בגיל 65, פרש פויה מאוניברסיטת סטנפורד ומונה ל- Professor Emeritus.

גם בשנים הבאות התמיד פויה בקשריו עם אוניברסיטת סטנפורד ולא חדל מלפרסם מאמרים, לשאת הרצאות ודברים בכנסים, ואף היה מעורב בכתיבת נייר עבודה לתכנית לימודים להוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון.

### השתלמויות למורים

במטרה לשפר את רמת הוראת המתמטיקה, היה פויה אחד מהוגי הרעיון של השתלמויות אינטנסיביות למורים, בין יעדיהן היה שיפור הידע המקצועי של המורים, ויצירת קשרים הן עם מורים אחרים בעלי ניסיון והן עם אנשי אקדמיה, וזאת במטרה למצוא פתרונות לבעיות הממשיות הצצות במהלך ההוראה בכיתה.

### גלריה של מתמטיקאים

לפויה היה אוסף תצלומים, אוסף שהיווה את נקודת מבטו האישית על הקהילייה המתמטית במאה ה- 20. מתמטיקאים שביקרו באוניברסיטת סטנפורד זכו ל"סיור מודרך" באלבום התמונות של פויה, בהדרכתו של פויה עצמו, סיור שכלל העלאת זיכרונות וסיפורים על האישים ועל המפגשים שהוצגו בתמונות.

דפדוף בדפי האלבום מגלה בין היתר את תמונותיהם של מתמטיקאים כאמי נטר (פרוים, 2003 א) נורברט וינר,

האובדן שחש עם היעלמותו של אחיו הקטן לסלו (Laszlo) במלחמה, בשנת 1915, רק העצים את התחושות האנטי-מלחמתיות שלו. פויה נותר פציפיסט כל ימי חייו, ובשנת 1985 חתם על עצומה בינלאומית להקפאת הפצתו של הנשק הגרעיני, יחד עם מתמטיקאים נוספים. בשנת 1918 נשא פויה לאישה את סטלה (Stella) בתו של מרצה לפיזיקה. סטלה, אישה שוויצרית יפיפייה הקדישה את חייה לבעלה במשך כל 67 שנות נישואיהם, והעניקה לו את האהבה והתמיכה שהיו נחוצות לו לניהול חיי יצירה פוריים.

ג'ורג' פויה, שהתברך בכישרון לעיצוב ולשרטוט, עיצב את הרהיטים בביתם. הייתה לו חיבה מיוחדת לטטיחים, קניית שטיח אצלו ארכה מספר שבועות והייתה כרוכה בחקירת דוגמאות של עיצובי שטיחים בספריית ביתם של בני הזוג. בסופו של החיפוש הגיע פויה למסקנה, שהעיצוב האהוב עליו ביותר הוא זה של שטיחים אפגאנים, בעלי דוגמאות גאומטריות.

### רופסור באוניברסיטת סטנפורד

בשנת 1940 עזבו בני הזוג פויה את ביתם שבשווייץ, מאימתו של היטלר, והשתקעו בארצות הברית. במהלך השנתיים הראשונות של שהותם שם, היה ג'ורג' פויה מרצה באוניברסיטת בראון (Brown). בתום שנתיים הוענקה לו משרה באוניברסיטת סטנפורד ובני הזוג עברו להתגורר בעיר פאלו אלטו (Palo Alto) שבקליפורניה. ג'ורג' פויה אהב ליצור קשרי ידידות אמיצים עם הסטודנטים שלו באוניברסיטה. הוא נהג לצאת אתם לטיולים, לשוחח עמם ולהזמין לכיתו, דבר שהפך במרוצת הזמן למסורת: מתמטיקה, תה ועוגיות.



### מדברי ג'ורג' פויה

"ספרים וסרטים יכולים לספק דוגמאות של פתרון בעיות או בעיות שיש לפותרן, אולם אין מילים או תמונות שיכולות לשמש כתחליף לחוויה של הימצאות בכיתה בה המורה פותר אתך בעיות ואז נותן לך הזדמנות לתרגל את מה שלמדת."

## השראה לצייר מ.ק. אשר

בשנת 1924 פרסם ג'ורג' פויה מאמר העוסק בגאומטריה של הגבישים, ובו סרטט 17 סוגי ריצופים. אחיו של הצייר הנודע אשר, נתקל באותו מאמר והבחין בקשר שבין המאמר של פויה לבין עבודותיו של הצייר. הוא הראה לאשר את המאמר, והצייר העתיק למחברתו את הריצופים וחקר אותם ביסודיות.

ניתן לומר, שמאמר זה היווה את ההשראה למספר ציורים ידועים של אשר. במהלך השנים, החליפו ביניהם פויה ואשר מכתבים שעסקו בגאומטריה שבעבודותיו של הצייר. אשר, שהיה אסיר תודה לפויה על עזרתו, אף שלח לו מספר ציורים.

## "מהלך מקרי" ביער

בשנות בחרותו, אהב פויה לשוטט ברגל ביערות שהקיפו את העיר ציריך.

כאחד מאותם טיולי הפנאי שלו נקרה בדרכו זוג אוהבים צעיר. כדי להימנע מפגישה מביכה נוספת, בחר פויה לסטות מדרכו וללכת בשביל אחר. למרות זאת, במהלך אותו הטיול, הוא פגש בזוג האוהבים שש פעמים נוספות, וכל זאת אף-על-פי שבחר בשבילי ההליכה באופן אקראי. תדירות המפגשים עוררה את סקרנותו של פויה והוא החליט לחקור בדבר. ממצאי חקירתו פורסמו מספר שנים לאחר מכן, במאמר שנושאו "הבעיה של המהלך המקרי". נסביר, כי מהלך מקרי הוא תהליך בו חפץ או גוף מסוים נע כל יחידת זמן מסוימת בכיוון מקרי.

פויה הוכיח כי במהלך מקרי יחזור החפץ או הגוף בוודאות לנקודת ההתחלה, רק כאשר המהלך המקרי הינו במרחב חד-ממדי (לאורך קו) או דו-ממדי (במישור). עיקר מרצו של פויה בשנים בהן פרש ממשרתו באוניברסיטת סטנפורד הוקדש לחקירת המהות של החשיבה המתמטית שעל-פי ניסוחו היא "האמנות של פתרון בעיות".

איסי שור (מתמטיקאי יהודי שחי תקופה מסוימת בישראל), אלברט איינשטיין, ואף תצלום פסלו של המתמטיקאי והמהנדס שחי במאה ה-16 סימון סטווין (פרויס, 2003), (Alexanderson, 1987).

## 250 מאמרים

ג'ורג' פויה המשיך לכתוב ולהרצות גם בשנות ה-90 שלו: בשנת 1978, בגיל 91, לימד פויה קורס בנושא קומבינטוריקה באוניברסיטת סטנפורד, בגיל 97 פרסם את המאמר ה-250 שלו (Wieschenberg, 1987). בשנים האחרונות לחייו, דעכה ראייתו והקריאה קשתה עליו. רק בזכות מקרן להגדלת אותיות שרכש לעצמו שב לקרוא, ועשה זאת בחדווה רבה (Schiffer, 1987). ג'ורג' פויה הלך לעולמו ב-7 בספטמבר 1985 בפאלו אלטו שבקליפורניה, בגיל 98.

## על תרומתו למחקר במתמטיקה

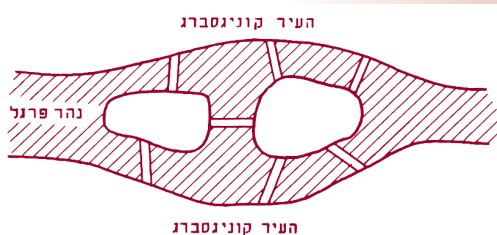
המחקר של ג'ורג' פויה בנושאים מתמטיים עשיר ומגוון עד כדי כך, שקצרה היריעה מלתאר את כולו במסגרת מאמר זה.

פויה כתב ספרים ומאמרים, לכדו ובשיתוף עם מתמטיקאים אחרים, בנושאים, כגון: אנליזה, הסתברות, קומבינטוריקה, תורת המספרים, גאומטריה ותורת הגרפים. לפחות 49 משפטים, שיטות ורעיונות נושאים את שמו של ג'ורג' פויה (Wieschenberg, 1987).

## "יצירת מופת"

בשנת 1925 פרסם יחד עם המתמטיקאי גבור סגו את הספר "בעיות ותיאורמות באנליזה I", שכונה "יצירת מופת" כפי מתמטיקאים (Alexanderson, 1987). הרעיון החדשני של פויה היה לקבץ את הבעיות שבספר, לא על-פי נושאייהן, אלא על-פי שיטת פתרון. הספר עוסק בנושאים מתמטיים וניתן לראות שהשיטה, הסדר, המבניות והרציפות היו חשובים ביותר למחבר.

## הידעתם ש...



המתמטיקאי ממנו הושפע ג'ורג' פויה באופן הרב ביותר היה לאונרד אוילר (1707-1783). הסיבה לכך, כפי שנרשמה מפי פויה: "אוילר עשה משהו שאף מתמטיקאי גדול אחר במעמדו לא עשה. הוא הסביר כיצד הגיע לממצאיו, ואני התעניינתי בכך מאוד. זה כרוך בהתעניינותי בפתרון בעיות."

## על תרומתו להוראת המתמטיקה

### כיצד פותרין?

בין הספרים הרבים שכתב היה ג'ורג' פויה גאה במיוחד בספרו "כיצד פותרין?" (How to solve it) שפורסם בארצות הברית בשנת 1945.

פויה חשב ש"החלק הנכבד ביותר של פעולת המחשבה ההכרתית שלנו עניינו בפתרון בעיות. שעה שאין אנו שקועים בהרהורים גרידא ובהזיות, מכוונות מחשבותינו לעבר מטרה מסוימת: אנו מבקשים למצוא פתרון לבעיות." הספר "כיצד פותרין?" מעמיד "רשימה הכוללת פעולות חשיבה שיש בהן תועלת" בפתרון בעיות, ומציג הצעות והנחיות לגבי הפעילויות הנחוצות ליישום רשימה זו.

ההצעות המפורטות לפתרון הבעיה הן הצעות האוריסטיות, מעין הנחיות להתקדמות כאשר פותרים בעיות מורכבות. (Schoenfeld, 1987).

על פי ג'ורג' פויה, האוריסטיקה היא "לימוד השיטות והכללים של דרכי התגלית וההמצאה".

### ארבעה שלבים בפתרון בעיה

התהליך של פתרון בעיה, לפי ג'ורג' פויה, מורכב מארבעה שלבים, וכך הוא מציגם בספרו "כיצד פותרין?" (פויה 1961).

3

#### השלב השלישי הוא ביצוע התכנית:

"עם ביצוע תכנית פתרון, בדוק כל צעד וצעד. האם ברור לך שהצעד נכון? התוכל להוכיח את נכונותו?"

1

#### השלב הראשון הוא הבנת הבעיה:

בשלב זה יש לשאול "מהו הנעלם? מהם הנתונים? מה הוא התנאי?". פויה מציג, לדוגמה: "סרטט תרשים. קבע סימון נכון. הפרד את התנאי לחלקיו".

4

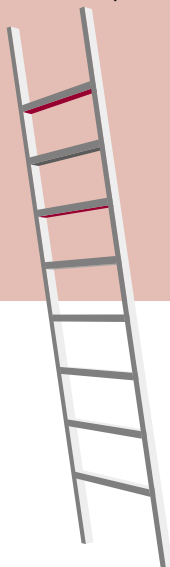
#### השלב הרביעי והאחרון הוא סקירה לאחור (ביקורת):

"התוכל לבדוק את התוצאה? (...) התוכל להגיע לכלל תוצאה זו בדרך אחרת? (...) התוכל להשתמש בתוצאה או בשיטת הפתרון לפתרון בעיה אחרת כלשהי?"

2

#### השלב השני הוא עריכת תכנית:

"מצא את הקשר בין הנתונים לבין הנעלם (...) עליך להגיע לעריכת תכנית לקראת הפתרון." "הרואה אתה בעיה זו בפעם הראשונה? המכיר אתה בעיה קרובה לזו? התוכל להשתמש בה? התוכל להשתמש בשיטת הפתרון שלה? התוכל לנסח את הבעיה מחדש? נסה לפתור תחילה בעיה קרובה לה (...) התוכל לשנות את הנעלם או את הנתונים או את שניהם, כך שהנעלם החדש והנתונים החדשים יהיו קרובים יותר זה לזה?"



## “מילון האוריסטי קצר”

החלק הגדול ביותר של הספר “כיצד פותרין?” נקרא “מילון האוריסטי קצר” והוא מכיל 67 ערכים המסודרים לפי סדר האלף-בית. ערכים מסוימים מוסיפים דוגמאות ופירושים מפורטים יותר לשלבי היסוד ולשאלות היסוד של התהליך לפתרון בעיה.

מספר ערכים דנים בנושאים מתודיים כמו: “פעולה בכיוון הפוך מ-ת עד א” או “הוכחה בדרך השלילה”. ערכים אחרים הוקדשו לתלמידים חדורי מוטיבציה, לדוגמה, הערכים: “פותר הבעיות הנכון”, “הקורא הנכון”, ו“המתמטיקאי לעתיד”. ערכים נוספים - כגון הערכים: “דקארט רנה” (1650-1596) ו“לייבניץ גוטפריד וילהלם” (1646-1716) (פרוים, 2002 א) - יועדו להערות על המהלכים ההיסטוריים של הנושא הנדון בספרו. לדוגמה, בערך רנה דקארט כותב פויה על המתמטיקאי והפילוסוף אשר “תכנן שיטה אוניברסאלית לפתרון בעיות, אולם לא השלים את חיבורו ‘כללים להדרכת השכלי...’ ערך מעניין אחר, הראוי לציון, נקרא “בחן את הניחוש”. בערך זה כותב פויה: “שום רעיון איננו רעיון רע ממש (...). רע מכול הוא להיות ריק מרעיונות”. והוא ממשיך ואומר: “הטוב שברעיונות עלול להיפגם אם יתקבל על הדעת בלא ביקורת”. רעיונותיו אלו - על החשיבות של העלאת השערות וניחושים - הורחבו על-ידי פויה בספריו האחרים.

## “חמשת ידידי הטובים”

לדעתו של פויה פתגמים רבים מביעים בצורה תמציתית ומדויקת את השיטות המיוחדות לפתרון בעיות. לכן הוא הקדיש במילונו ערך מיוחד לפתגמים הנקרא “חכמת הפתגמים”. ערך זה מכיל אוסף פתגמים המדגימים את שלבי היסוד של תהליך פתרון בעיה. נצטט מספר פתגמים לכל שלב:

לשלב הראשון - הבנת הבעיה:

“אם הנשאל אינו מבין הוא גם משיב שלא כדוין”.

“סוף מעשה במחשבה תחילה”.

לשלב השני - עריכת תכנית:

“בדוק כל מפתח שבצורו: אולי האחרון יתאים לחור”.

“חכם מחליף את דעתו, טיפש עומד בטעותו”.  
“תמיד יהיו נא ברשותך - שני מיתרים לקשתך”.  
“חכם יוצר הזדמנויות, אם אין הללו מצויות”.  
לשלב השלישי - ביצוע התכנית:

“אל תיתן בדבר אמן - עד שהוא אינו בחון”.  
“מעט מעט, קמעא קמעא, אכל חתול מלאי חמאה”.  
(כלומר יש להתחיל בביצוע התכנית כאשר היא בשלה ולא לפני כן, בלא להיחפז.)

לשלב האחרון - סקירה אחורנית (ביקורת):  
“מי שאינו חושב שנית - חשיבתו אינה רצינית”.  
פויה לא הסתפק בפתגמים מוכרים וחיבר בעצמו מספר פתגמים המתאימים ל“רשימה” שלו, לדוגמה:  
“חמשת ידידי הטובים הם: מה, מדוע, היכן, מתי וכיצד;  
שאל מה, מדוע, היכן, מתי וכיצד - ואל תשאל איש אחר לעצה”.

השימוש במילון מתבצע בצורה סלקטיבית ובא לעזור לנו לפתח את הרעיון שכבר חשבנו עליו. המילון אינו מכתוב את סדרן של המחשבות או את צורתן. פויה לא התיימר להתייחס אל פתרון בעיות כאל מדע, אלא החשיב נושא זה כצורה של אמנות. הנחיותיו של פויה אינן מתכונות מדויקים, אלא הצעות, עצות ודוגמאות (Kilpatrick, 1987). בהקדמה לספרו “כיצד פותרין?” מעיר פויה כי בספר ימצא עניין “כל מי שדרכי ההמצאה והתגלית ותחבולותיהן קרובות אל ליבו”. ואכן, דוגמה לאדם כזה, אנו מוצאים בחתן פרס נובל לכימיה, Dudley R. Herschbach שציין באוטוביוגרפיה שלו, כי מעולם לא הפסיד שיעור של הפרופסור ג'ורג' פויה באוניברסיטת סטנפורד.

## “הבה נלמד לנחש”

תשע שנים לאחר פרסום הספר “כיצד פותרין?” בשנת 1954, פרסם ג'ורג' פויה את שני הכרכים של ספרו Mathematics and Plausible Reasoning. בספר זה סוקר פויה את ההיסטוריה של התגלית המתמטית, ומציג את האופן שבו נתגלו התגליות. לדעתו תוצאתה של העבודה היצירתית של המתמטיקאי היא ההוכחה. אולם, ההוכחה מתגלה באמצעות הפעלת שיקול

## הידעתם ש...

במהלך כל הקריירה שלו כמורה, התנגד פויה נחרצות לכל מה שבני-סמכא שונים התיימרו לטעון. לדבריו: “על המורים והמנהלים להשתמש בניסיונם האישי ובשיקול דעתם הם”.

באחת מהרצאותיו, שנערכה במסגרת קורס שהעביר באוניברסיטת סטנפורד, הוא מוסיף על כך: "אילו הוראה הייתה מדע, אזי היא הייתה מתווה דרך אידיאלית ללמד, וכל אחד היה צועד באותו תוואי. כיוון שהוראה איננה מדע, קיים מרחב פעולה רחב ואפשרויות רבות להבדלים אישיים".

### מעורבות ומוטיבציה

בספרו Mathematical Discovery מציג פויה מספר עקרונות של למידה. לפנינו שני העקרונות הראשונים: על פי העיקרון הראשון של הלמידה, עליה להיות למידה אקטיבית - התלמיד חייב להיות מעורב בצורה פעילה בתהליך הלמידה. העיקרון השני של הלמידה אומר כי על מנת ללמוד נושא מסוים, על התלמיד לפתח בו עניין וליהנות מהלמידה. על המורה לסייע לתלמיד למצוא גורם מדרבן ללמידה, אפקטיבי ככל האפשר, כאשר הענישה, לדעתו של פויה, היא מן האמצעים שבתחתית הרשימה.

### מה חושב התלמיד, מה חושב המורה, ומה החשוב ביותר

קיים קשר ואף זהות בין עקרונות הלמידה לבין עקרונות ההוראה. הדבר בא לידי ביטוי בצורה הבאה: על-פי עיקרון הלמידה האקטיבית, על המורה להכיר בכך שמה שהתלמיד חושב, חשוב אף יותר מדבריו שלו, של המורה בכיתה. המורה צריך "לזהות את התהוותו של רעיון במוחו של התלמיד", ואז לפעול רק על מנת לסייע להתפתחות רעיון זה.

וכיצד בא לידי ביטוי העיקרון השני - עיקרון המוטיבציה בהוראה? **לדעתו של פויה, על המורה להתייחס אל עצמו כאל מוכר, שמרכולתו היא מתמטיקה.** עליו לשכנע את התלמיד כי הבעיה הנדונה בכיתה מעניינת וראויה לתשומת ליבו של התלמיד. דרך אחרת לעורר מוטיבציה היא לאפשר לתלמיד לנחש, או להעלות השערות לגבי תוצאת הבעיה. מניסיונו של פויה: "תלמידים המביעים דעה, מרגישים עצמם מחויבים. הערכתם העצמית תלויה, במידה מסוימת, בתוצאת פתרון הבעיה והם קצרי רוח לדעת אם השערתם הייתה נכונה."

### "עשרת הדיברות למורה"

פויה הגה את "עשרת הדיברות למורה" שלדעתו מתאימים לכל מצב בהוראה ולכל נושא נלמד, בכל רמה, ואלו הם:

1. התעניין בנושא אותו הנך מלמד.
2. דע את הנושא אותו הנך מלמד.

דעת סביר, באמצעות העלאת השערה סבירה. הספר משובץ במגוון רחב של דוגמאות הלקוחות מתולדות ההמצאות במתמטיקה.

וכך כותב פויה בהקדמה לספרו:

"אני פונה לכל התלמידים המתעניינים במתמטיקה (...)  
ואני אומר: בהחלט, הבה נלמד להוכיח, אך בנוסף, הבה נלמד לנחש (...)  
לפני שהנך מוכיח משפט מתמטי, עליך לנחשו; עליך לנחש את רעיון ההוכחה לפני שהנך ניגש לכיצוע פרטי ההוכחה." עם זאת פויה מדגיש כי יש לשים לב לנקודה חשובה והיא "להבחין בין ניחוש לניחוש: בין ניחוש סביר יותר לבין ניחוש סביר פחות."

הערך הרב שפויה ייחס לניחוש, כמרכיב בתהליך פתרון בעיות, בא לידי ביטוי גם באחת מהרצאותיו, שנערכה בפני סטודנטים להוראת המתמטיקה, בסוף שנות השישים. נושא ההרצאה היה מטרותיו של חינוך מתמטי, ופויה אמר בה:

"הפתרון לבעיה מתחיל תמיד באופן טבעי מניחוש - לא תמיד מניחוש טוב. להפך, בדרך כלל הניחוש אינו מושלם (...)  
אמנות פתרון בעיות מורכבת באופן ניכר מתיקון ניחושך."

### "הוראה היא אומנות" או המורה כשחקן

ג'ורג' פויה חש כי ספרו Mathematics and Plausible Reasoning לא דן מספיק בבעיות הממשיות של ההוראה בכיתה, ובנושאים החיוניים להם נזקקים המורים. לכן, כעשר שנים לאחר הופעת ספר זה, בשנת 1962 ובשנת 1965, פרסם פויה את שני כרכיו של ספרו Mathematical Discovery שמטרתו העיקרית הייתה השבחת שיטות ההוראה של המורים למתמטיקה.

לדעתו של פויה הוראה היא אמנות, ולמעשה היא דומה מאוד לאמנות המשחק. **מורה חייב "לשחק" התלהבות והתרגשות מהנושא הנלמד, "להעמיד פנים" של התרוממות הרוח ושל הפתעה ופליאה.**



סטודנט של ג'ורג' פויה, סיפר על אחד הקטעים הנראים בסרט: "פויה משתמש במוט הצבעה כמייצג ישר, כשהוא אוחד את קצותיו בידיו לציון שתי נקודות. כאשר הוא נזקק לנקודה שלישית, הוא מתבונן בשתי ידיו "תפוסות" ורעיון עולה במוחו. עם חיוך, משיכת כתף וניצוץ בעיניו הוא מניח את קצה אפו על המקל לסימון הנקודה השלישית. החיוך הזה, משיכת הכתף הזו, הניצוץ הזה - זה היה ג'ורג' פויה" (Sinicrope, 1995).

(כיום גרמי קילפטריק הוא פרופסור לחינוך מתמטי באוניברסיטת ג'ורג'יה, בעל שם עולמי בנושא הוראת המתמטיקה.)



בשיעור של פויה  
כבר היית???

### סוף דבר

להיות מתמטיקאי זה מקצוע.  
להיות מורה זה מקצוע.  
להיות בן אדם, להיות אנושי גם זה מקצוע.  
ג'ורג' פויה הביא כבוד לכל שלושת המקצועות.  
ניתן לומר שג'ורג' פויה הוא "הוכחת קיום": אפשר להצליח בכל שלושה גם יחד.

3. דע את שיטות הלמידה: הדרך הטובה ביותר ללמוד כל דבר היא לגלותו בעצמך.
  4. נסה לקרוא את הבעות פניהם של תלמידך, נסה להבין את ציפיותיהם וקשייהם, שים עצמך במקומם.
  5. תן לתלמידך לא רק מידע, אלא גם "טיפים", גישות, הרגל של עבודה מתודית.
  6. תן (אפשר) לתלמידך ללמוד לנחש.
  7. תן לתלמידך ללמוד להוכיח.
  8. חפש מאפיינים בכעיה שלפניך שיכולים להיות בעלי תועלת בפתרון בעיות עתידיות - נסה לגלות את הדפוס הכללי המסתתר מאחורי הסיטואציה הקונקרטיית.
  9. אל תגלה את סודך בבת אחת - אפשר לתלמידך לנחש לפני שתאמר מהו - תן להם לגלות בעצמם ככל שזה אפשרי.
  10. הצע, אל תכריח.
- לדעת פויה, חשוב שמורים יתאימו את הדיברות לסיטואציות בכיתתם, וישפטו אותם באופן ביקורתי לאחר ניסויים; ועוד הוא אומר: "אם נושא הלימוד משעמם את המורה, גם הכיתה תשתעמם ממנו".

### מורה מהסרטים

פרט לכתובת הספרים והמאמרים פויה היה הרוח החיה בהפקת שני סרטים על הוראת המתמטיקה: "הבה נלמד לנחש" (Let Us Teach Guessing) שזכה בפרס בפסטיבל הסרטים האמריקאי בשנת 1968, ו"ניחוש והוכחה" (Guessing and Proving) משנת 1962.  
בסרט "הבה נלמד לנחש" באה לידי ביטוי התלהבותו של פויה ממתמטיקה, מהוראה ומלמידה. גרמי קילפטריק,

### מקורות נבחרים

- פויה, ג' (1961). **כיצד פותרין?**. הוצאת אוצר המורה, ת"א. (תרגום לעברית). פרוים, מ' (2002). גוטפריד וילהלם לייבניץ. **מספר חזק 2000**, 3.  
פרוים, מ' (2003 א). אמי נטר. **מספר חזק 2000**, 5.  
פרוים, מ' (2003 ב). סימון סטווין. **מספר חזק 2000**, 6.

- Albers, D. J., & Alexanderson, G. L. (eds.), (1985). *Mathematical People: Profiles and Interviews*. Boston: Birkhauser.  
Alexanderson, G. L. (2000). *The random walks of George Polya*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.  
Alexanderson, G. L., & Lange, L. H. (1987). Obituary: George Polya. *Bull. London Math. Soc.*, 19(6).  
Harary, F. (1977). Homage to George Polya. *Graph Theory*, 1(4).  
Kilpatrick, J. (1987). George Polya's influence on mathematics education. *Mathematics Magazine*, 60(5).  
Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery* (2 vol.) N.Y: John Wiley & Sons.  
Polya, G., & Alexanderson, G. L. (Eds), (1987). *The Polya picture album*, Basel: Birkhauser.  
Polya, G. (1990). *Mathematics and Plausible Reasoning* (2 vol.). NJ: Princeton University Press.  
Schattschneider, D. (1987). The Polya-Escher connection. *Mathematics Magazine*, 60(5).  
Schiffer, M. M. (1987). George Polya (1887-1985). *Mathematics Magazine*, 60(5).  
Schoenfeld, H. (1987). Polya, problem solving, and education. *Mathematics Magazine*, 60(5).  
Schoenfeld, H. (1987). George Polya and mathematics education. *Bull. London Math. Soc.*, 19(6).  
Sinicrope, R. (1995). A Polya Sampler. *Mathematics Teachers* 88(3).  
Taylor, H., & Taylor, L. (1993). *George Polya: Master of Discovery, 1887-1985*, Palo Alto: Dale Seymour Publication.  
Wieschenberg, A.A. (1987). A conversation with George Polya. *Mathematics Magazine*, 60(5).

למעוניינים בהרחבות והבהרות ניתן לפנות למחברת: מרגרט פרוים, margaret1@012.net.il