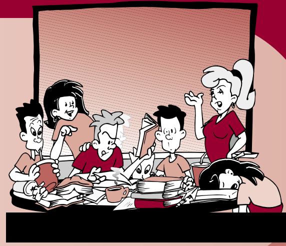


# מחפשים נעלמים ותובנות מתמטיות

**סיגל בחרי**, בית ספר "שריד" רחובות

## מבוא

תלמידים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי מתקשים בנושא השברים, ורבים מהם מגלים תובנה מספרית נמוכה כשהם מבצעים פעולות בשברים (Reys, Kim & Bay,1999).

כשאני נכנסת לכיתה, ופוגשת תלמידים נבונים אשר פותרים תרגילים כמו: $\frac{11}{22}+\frac{6}{12}=$ בעזרת מכנה משותף, אני חושבת שמשהו אצלם בלמידה הלך לאיבוד.

אני רוצה שתלמידיי יגלו תובנה מספרית בעבודתם, אני רוצה שהם יחשבו, ימצאו קשרים, יסיקו מסקנות, ימצאו מספר פתרונות אפשריים ודרכים יעילות והגיוניות לפתרון המשימה. אני שואלת את עצמי, איך אביא את תלמידיי לכל זה? איך אצליח לפתח אצל תלמידי תובנה מספרית?

מחקרים מעידים כי תובנה מספרית ניתנת לפיתוח אצל תלמידים תוך אימון חכם ועקבי.

במאמר זה אציג בפניכם משימה שחיברתי במטרה לפתח תובנה מספרית בשברים.

את המשימה ניסיתי עם תלמידים מכיתה ו.

כדי לבדוק אם המשימה אכן מקדמת את המטרה, כלומר, האם התלמידים השתמשו בתובנה, ניסיתי להגדיר לעצמי אילו תובנות ברצוני לראות אצל התלמידים בעת מילוי המשימה. מתוך מאמרים העוסקים בנושא בחרתי את התובנות שניתן, לדעתי, להפיק מהמשימה המסוימת הזו.

פעולות של התלמידים אשר מצביעות על התובנות שנבחרו הן:

א. בתחום המתמטי: התלמידים ישתמשו במתווכים למילוי המשימה כמו $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{4}$, (שימוש ב"סימני דרך" / מתווכים מאפשר לתלמידים לאמוד, ונותן להם כלי לשיפוט מידת ההיגיון של תשובותיהם.) התלמידים יעשו אופרציה בין כמויות (יגדילו במקום אחד ויקטינו באחר) על מנת להישאר נאמנים לתנאים להשלמת המשימה, התלמידים ישתמשו במונחים מתמטים המתאימים למשימה כמו: שברים שקולים / שווים זה לזה, גדול מ.. קטן מ... הרחבה של...

ב. בתחום הקוגניטיבי: התלמידים יחשבו לפני שיעשו חישובים, התלמידים יחפשו פתרונות נוספים אפשריים למילוי המשימה, התלמידים יחפשו דרכים שונות למציאת הפתרונות, התלמידים ישתפו זה את זה באסטרטגיות שלהם וילמדו אחד מהשני, התלמידים ינמקו ויסבירו את תשובותיהם, התלמידים יגיעו למסקנות וינסחו אותן.

המשימה (איור 1) עוסקת במשוואות של חיבור שברים פשוטים שיש בהן תנאים שונים למציאת הנעלמים. למשימה יש יותר מפתרון אחד אפשרי ומגוון של דרכי פתרון, ולכן היא מעודדת שיחה של תלמידים בינם לבין עצמם בזמן מילוי המשימה, ודיון בשיתוף המורה במלואה. המשימה דורשת הבנת משמעות השבר הפשוט, דורשת הסתכלות, קריאה של משוואה, התייחסות לתנאי הפתרון שלה, וגמישות מחשבתית.

בחרתי במשימה הדורשת ידע קודם מינימלי וזאת כדי לתת הזדמנות לכל תלמיד להתנסות כמעט ללא תלות במורה. אחת המטרות הייתה לעורר רמות שונות של חשיבה ולעודד חשיבה יצירתית.

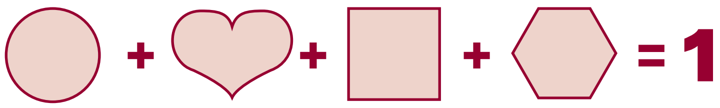
## מהלך השיעור

### שיחת פתיחה

פתחתי את השיעור בשיחת פתיחה קצרה (כ- 7 דקות), בה הצגתי משוואה פשוטה יותר מהמשוואה שהוצגה במשימה, ותנאים שונים להשלמתה. (ראו איור 2)

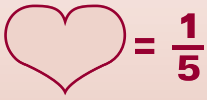
## המשימה: מחפשים את הנעלמים

1. גלו את ערכה של כל צורה במשוואה, בהתאם לתנאים הקיימים.



תנאים לקיום המשוואה:

2. האם ישנו פתרון נוסף למשוואה? ציינו את הפתרון שגיליתם.
3. תארו את דרך עבודתכם. כיצד הצלחתם לגלות את הערך של כל צורה? האם תוכלו למצוא דרך נוספת?
4. מה יהיה ערך הצורות אם ידוע ש-



**איור 1**

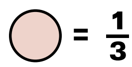
**איור 2**

התלמידים התבקשו למצוא את ערכה של כל צורה בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. שני המחוברים שווים בגודלם;

ב. שני המחוברים שונים בגודלם;

ג. כש-



מטרת שיחת הפתיחה הייתה לערוך היכרות ראשונית עם המשימה לפני שהם ניגשים לעבודה, ולהסב את תשומת לבם לחיפוש מגוון של תשובות.

להלן רשמים מהשיחה בכיתה:

א. כששני המחוברים שווים בגודלם, הפתרונות שהועלו הם:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{12}+\frac{2}{8}$ | $\frac{4}{16}+\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{4}+\frac{2}{8}$ |

שאלתי מה המשותף לכל ההצעות שהועלו וקיבלתי את התשובה: "כולם בעצם שווים לרבע". ילד נוסף ניסח בצורה אחרת: "כולם הם הרחבה של רבע".

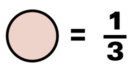
ב. כששני המחוברים שונים בגודלם, הפתרונות שהועלו הם:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{10}+\frac{4}{10}$ | $\frac{4}{12}+\frac{2}{12}$ | $\frac{2}{16}+\frac{6}{16}$ | $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$ |

ביקשתי מהילדים להסביר כיצד מצאו את הפתרונות השונים. אחד הילדים הסביר, שכל שבר ששווה לחצי, אפשר לחלק אותו לשני חלקים שאינם שווים זה לזה וכך תתקבל תשובה מתאימה.

ביקשתי מהילדים, אם מישהו יכול לתת דוגמה מתאימה עם מכנים שאינם שווים.

אחד הילדים נתן את הדוגמה: $\frac{3}{8}+\frac{2}{16}$ והסביר שהוא פשוט הרחיב את אחד המחוברים מתרגיל שכבר נמצא- $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$

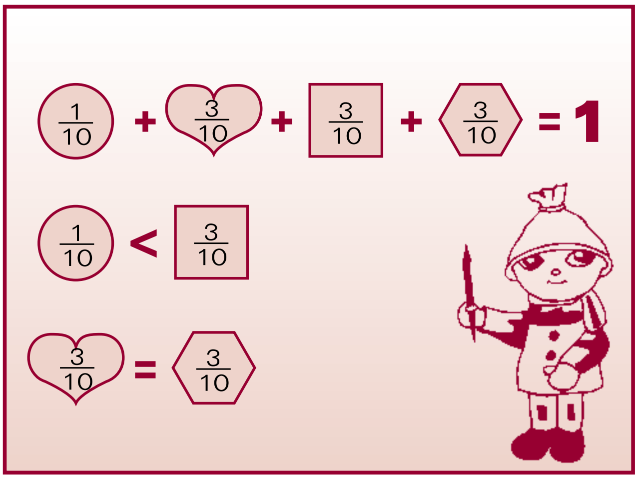
(כש-  הילדים ענו מיד שהשבר החסר הוא שישית, כי שליש שווה שתי שישיות.)

לאחר שיחת הפתיחה חולקה המשימה לתלמידים. להלן אציג מדגם תשובות של תלמידים וניתוח התשובות לסעיפים 3-1 על-פי מרכיבי התובנה שהצגתי בפתיחת המאמר. בתחילה יוצגו תשובות נכונות ולאחר מכן תשובות שגויות.

## תשובות נכונות לסעיפים 1 ו- 3

במבט ראשון תלמידים רבים חשבו על הפתרון שבו כל הצורות שוות ל- $\frac{1}{4}$ משום שראו 4 מחוברים שסכומם שווה 1. במבט שני חלקם הבחינו בתנאים המופיעים בשורות הבאות של המשימה.

### א. התשובה של אילת :

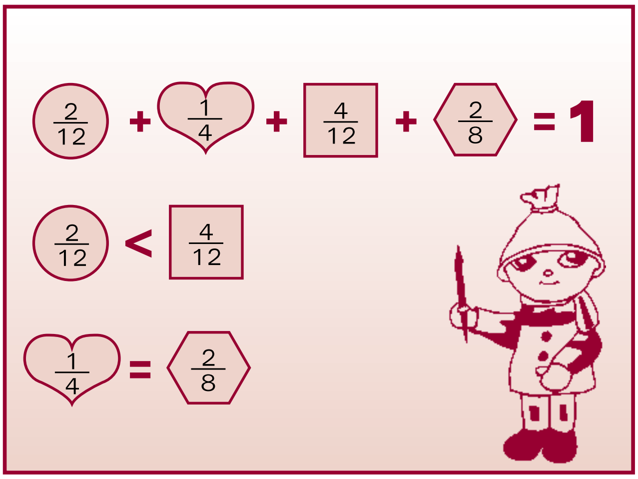



איור 3

ההסבר של אילת: "הצלחתי לגלות את הערך של כל אחת מהצורות, כאשר דמיינתי שהשלם הוא $\frac{10}{10}$."

אילת ראתה שישנן צורות בעלות ערך שונה ולכן לא כל הצורות שוות $\frac{1}{4}$. היא בחרה שבר עם מכנה אחר, גדול יותר, כדי להצליח לעשות אופרציה בין הכמויות (להגדיל במקום אחד ולהקטין באחר) על מנת להישאר נאמנה לתנאים להשלמת המשימה.

### ב. תשובתו של ברק:



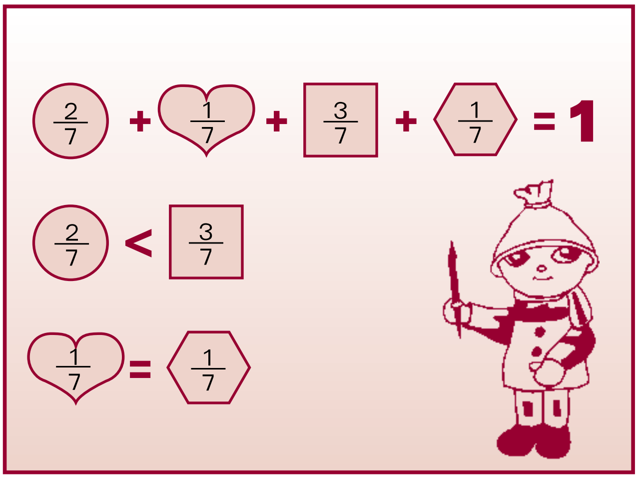

איור 4

ההסבר של ברק: "קודם סימנתי $\frac{1}{4}$ בלב ובמשושה בגלל שכתוב שהם שווים, ואז נשאר $\frac{2}{4}$ להשלים שזה $\frac{1}{2}$ ואז לקחתי $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$ וחילקתי בין העיגול והריבוע כך שבריבוע יהיה מספר גדול יותר מאשר במשושה. ולכן

○ = $\frac{2}{12}$ , □ = $\frac{4}{12}$."

ברק ראה שלא כל הצורות שוות בערכן. ראשית הוא התייחס לצורות השוות ונתן לכל אחת מהן את הערך $\frac{1}{4}$ (אבל נתן לכל $\frac{1}{4}$ שם אחר) שביחד הן $\frac{1}{2}$. לשתיים הנוספות, שצריכות גם כן לקבל ערכים השווים ביחד ל- $\frac{1}{2}$, הוא בחר שבר עם מכנה אחר, גדול יותר (הרחבה של השבר), כדי שיוכל לעשות אופרציה בין הכמויות ולהישאר נאמן לתנאים להשלמת המשימה. להבדיל מהתלמיד הקודם הוא השתמש בשברים $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{4}$ כמתווכים ולכן בחר בשבר שהמכנה שלו 12.

### ג. תשובתה של גלית:




איור 5

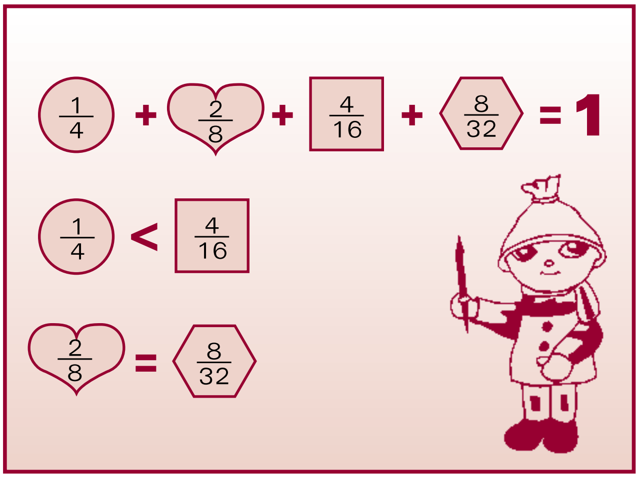
ההסבר של גלית: "לקחתי שבר עם מכנה מספיק גדול כדי שאוכל לקחת ממנו שני חלקים שווים ועוד שניים לא שווים. אחרי שניסיתי ראיתי שחייב להיות מכנה אי-זוגי למשל: $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ ועוד $\frac{1}{7}$ זה $\frac{2}{7}$, חישבתי שצריך עוד $\frac{5}{7}$ כדי לקבל שלם, ולכן חילקתי $\frac{5}{7}$ לשני חלקים לא שווים וכתבתי אותם בריבוע ובעיגול. הריבוע צריך להיות יותר גדול ולכן בו כתבתי $\frac{3}{7}$ ובעיגול $\frac{2}{7}$."

גלית ראתה שישנן צורות בעלות ערך שונה ולכן היא לא

יכולה להתייחס לכל הצורות כ- $\frac{1}{4}$ . היא בחרה שבר עם מכנה אחר, והתעקשה על כך שהוא צריך להיות אי-זוגי כדי שיהיה לה קל לעבוד. כששאלתי אותה למה המכנה חייב להיות אי-זוגי, היא אמרה שאחרי שנותנים ערך זהה לצורות השוות, חייב להישאר מספר אי-זוגי של חלקים כדי שנוכל לחלק את החלק שנשאר לשני חלקים לא שווים. היא גם נתנה דוגמה: אם ניקח שבר שבמכנה שלו 8, אז שני השברים השווים יקבלו את הערך $\frac{1}{8}$ שביחד הם $\frac{2}{8}$, ויישאר $\frac{6}{8}$ שאם נחלק אותן בין שתי הצורות שנשארו כל צורה תקבל את הערך $\frac{3}{8}$ וזה בלתי אפשרי, כי הן צריכות להיות שונות בגודלן. (יש לציין שתשובה זו שגויה, שכן את ה- $\frac{6}{8}$ אפשר לחלק גם בצורה לא שווה. למשל ל- $\frac{2}{8}$ ו- $\frac{4}{8}$ .)

## מדגם של תשובות לא נכונות לסעיפים 1 ו- 3.

**ד. תשובתו של דן :**




**איור 6**

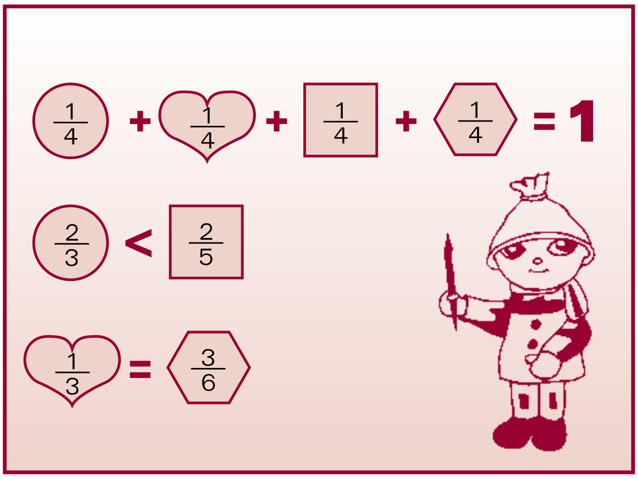
ההסבר של דן: "רציתי לעשות $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ אבל כל הצורות שונות, אז עשיתי שברים אחרים שהם גם $\frac{1}{4}$."

התלמיד יודע ש- $\frac{4}{4}$ זה שלם . הוא שינה לשברים את השם כדי להתייחס לכך שהצורות אינן זהות. במהלך עבודתו הוא לא התייחס לאילוצי האי-שוויון שהופיעו במשימה.

כדאי להעמיד את דן בקונפליקט מול הטעות שלו ולשאול אותו, אם כל השברים שכתב הם $\frac{1}{4}$ (ייתכן שדן חושב שהרחבה של $\frac{1}{4}$ איננה שווה ל- $\frac{1}{4}$).
ומה דעתו לגבי פסוק האי-שוויון, האם מתקיים:

○ > □ ?

**ה. תשובתה של הדס:**




**איור 7**

ההסבר של הדס: "כי $\frac{4}{4}$ זה שלם ואחר-כך שמתי שברים כמו שביקשת."

כמו התלמיד הקודם גם הדס יודעת ש- $\frac{4}{4}$ זה שלם, אך היא לא הצליחה לקשר בין הצורות המופיעות בתנאים לבין אלה המופיעות בתרגיל עצמו. בנוסף, ניתן לראות שהיא לא מבינה את מהות השבר הפשוט ולא מצליחה להשוות נכון בין שברים.

## סיכום עבודת התלמידים

כל התלמידים הפעילו חשיבה שיכולה להעיד על הבנה או אי-הבנה, לפני שביצעו חישוב פרוצדוראלי.
רוב התלמידים חיפשו פתרונות נוספים אפשריים למילוי המשימה, אך לא השתמשו באסטרטגיות אחרות מאלו שהשתמשו בהן למציאת הפתרון הראשון שמצאו.
כל התלמידים נימקו את עבודתם. חלק מהנימוקים הראו הבנה ותובנה מספרית, אולם חלקם גילו אי-הבנה של מהות השבר הפשוט או חוסר גמישות מחשבתית וחוסר בתובנה מספרית.
חלק גדול מהתלמידים הצליח למצוא קשר בין התנאים השונים למילוי המשימה ובין המשימה עצמה, אך היו גם תלמידים שלא התייחסו לתנאים של המשוואה או גילו

קושי לקשר בין התנאים שהוצגו לבין המשוואה עצמה. בתשובות שניתנו בכתב או בעל-פה השתמשו רוב התלמידים במונחים מתמטים המתאימים למשימה: שברים שקולים/שווים זה לזה, גדול מ-, קטן מ-.

חלק מהתלמידים השתמשו בשברים $\frac{1}{2}$ או $\frac{1}{4}$, שקל לדמיין מודל שלהם, כמתווכים למילוי המשימה. למשל תלמיד שחילק את השלם לשניים, חצי אחד חילק לשני חלקים שווים כמו $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{1}{4}$ וחצי שני לשני חלקים לא שווים, כמו $\frac{1}{6}$ ו- $\frac{2}{6}$ או $\frac{1}{3}$.

היו תלמידים שעשו אופרציה בין כמויות, הגדילו במקום אחד והקטינו באחר ושמרו בדרך זו על התנאים להשלמת המשימה.

חלק מהתלמידים הצליחו לגבש מסקנות, חלק מהמסקנות שהוצגו בשיעור הביעו הבנה ותובנה בשברים פשוטים וחלק חוסר הבנה או חוסר גמישות מחשבתית.

תלמיד אחד בחר לעבוד עם שברים שהמכנה שלהם זהה ולכן בחר במספר גדול במכנה. ילדים אחרים הראו חוסר בתובנה מספרית עם שברים פשוטים, אי-יכולת בהשוואת שברים ובחיבור שברים אפילו ברמה הפשוטה ביותר. לצערי, התלמידים כמעט ולא שיתפו זה את זה באסטרטגיות שלהם, וכמעט שלא נשמע שיח מתמטי בזמן העבודה. אני מניחה שבמהלך שיחה והחלפת דעות, התלמידים היו לומדים להסביר כיצד הגיעו לפתרון, כיצד חשבו, ובדרך זו היו נחשפים לדרכים נוספות לפתרון המשימה ובכך מפתחים תובנה מספרית.

כמורה, הצבתי לעצמי מטרה לפתח תובנה אצל התלמידים, וחשוב היה לי שבכיתה יתנהלו שיחות ודיונים מפרים בין התלמידים. במהלך השיחה הילדים לא חייבים להגיע להסכמה ביניהם, העיקר הם: השיחה, הנימוקים, וההדגמה, שהם הבסיס לתובנה.

לדעתי, לפני הדיון והשיח המתמטי שנערך במליאה עם המורה חייב להתקיים דיון בין התלמידים. לכן החלטתי לא לקיים דיון מסכם בשיעור זה ולהמשיך בפעילות נוספת עם התלמידים שתעודד ותעורר את השיח המתמטי. בהמשך אפרט מה עשיתי כדי לעודד דיונים ושיחות בין תלמידים.

## המשך הפעילות במטרה לקדם את השיח המתמטי

אספתי את עבודות התלמידים ולאחר עיון החלטתי לחלק את הכיתה לשלוש קבוצות עבודה:

א. תלמידים אשר פתרו נכון את המשימה והראו הבנה. המטרה הייתה שישתפו אחד את השני באסטרטגיות שונות לפתרון ויפתחו תובנה מספרית.

תלמידים אלו קיבלו את המשימה הבאה:

**בעקבות מחפשים את הנעלמים (א)**

1. הציגו את הפתרון שלכם לחבר והסבירו לו את דרך עבודתכם, כך שהוא יצליח להציג את הפתרון שלכם בפני הכיתה ואתם תצליחו להציג את פתרונו.

2. נסו להסביר במה שונה דרך הפתרון של החבר מדרך הפתרון שלכם.

ב. תלמידים אשר לא פתרו את כל המשימה נכון, אך ניתן לראות שקיימת הבנה.

המטרה הייתה שבעקבות דיון קבוצתי הם יצליחו לתקן את עבודתם ולהיחשף לפתרונות נוספים אפשריים ולדרכי פתרון נוספות.

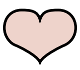
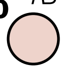
תלמידים אלו קיבלו את המשימה הבאה:

**בעקבות מחפשים את הנעלמים (ב)**

1. דונו בקבוצה ונסו ביחד לתקן ולהשלים את עבודתכם.

ג. תלמידים שנראה שגילו קושי בהתמודדות עם המשימה, אי-הבנה של מהות השבר וחוסר בתובנה מספרית עם שברים פשוטים.

תלמידים אלו קיבלו הכוונה נוספת ממני על-ידי שאילת שאלות מבהירות ומקדמות. לדוגמה:

- מה אנו רואים במשוואה?
- אילו מהצורות הן שוות ערך?
- לאיזו צורה ערך גדול יותר, לריבוע או לעיגול?
- מהו הסכום שמתקבל?
- מה המשותף לכל המחוברים?
- אילו שברים אתם מכירים ששווים לשלם?
- מה יהיה ערך הצורות אם ערכו של  $= \frac{1}{10}$ ?
- מה יהיה ערך הצורות אם  $= \frac{1}{10}$ ?

בכל הקבוצות התלמידים עבדו בקבוצות קטנות של שלושה עד ארבעה תלמידים, על מנת ליצור קבוצת עניין איכותית. למסיימים ניתנה משימת הרחבה שעוסקת בתובנות נוספות שאפשר להגיע אליהן בעקבות הפעילות.

**משימה להרחבה: מרחיבים את חיפוש הנעלמים**

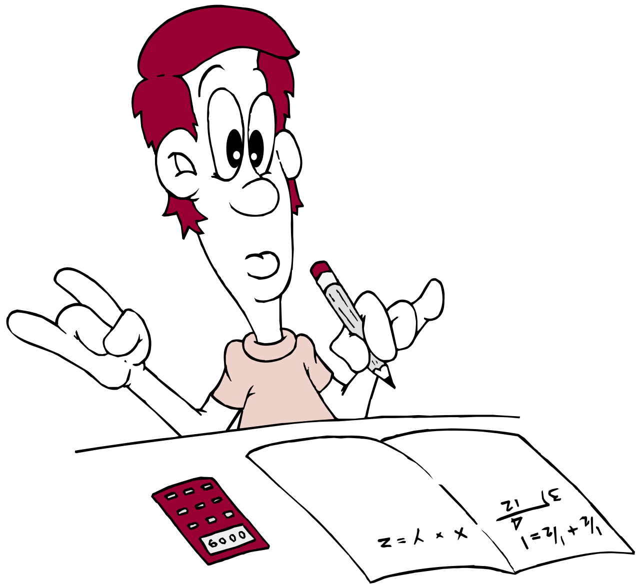
1. כיצד תשלימו את המשימה אם כל הצורות שונות בערכן?
2. האם תצליחו להשלים את המשימה אם ידוע שכל הנעלמים הם שברי יחידה (שהמונה שלהם הוא 1)? נמקו.
3. כיצד תשלימו את המשימה, אם סכום כל הערכים שבצורות שווה לשליש?
4. חברו משוואה עם תנאים. החליפו עם חבר ונסו לפתור את המשוואה שקיבלתם.

## סיכום התהליך

הפעילות הנוספת בקבוצות קטנות השיגה את מטרתה. הילדים הציגו פתרונות של חברים וגילויים חדשים שהם גילו על המשימה בעקבות הדיון הקבוצתי. חלקם הופתעו לגלות דרכים שונות לפתרון המשימה. התהליך נתן משמעות חדשה ללמידה משותפת, ופתח דרכים חדשות להתבוננות במשימה. הילדים ציינו שמאוד נהנו להקשיב לחבריהם וללמוד מהם.

תהליך זה, אפשר לי לראות היכן נמצא כל אחד מהתלמידים ומאותו מקום למצוא את הדרך היעילה והמשמעותית ביותר לקדם אותו. הוא גם אפשר לי לבחון עבודה קבוצתית, ולתמוך בקבוצת תלמידים, אשר צריכים הכוונה יותר מובנית על מנת להצליח במשימה כמו כולם. ובעיקר התהליך נתן הזדמנות ליהנות ממגוון תשובות של התלמידים, שהיו ברמות שונות של חשיבה, ומהתפתחותן. התלמידים נחשפו למגוון של תשובות ודרכי פתרון אשר מפתחות תובנה מספרית. לתלמידים המתקדמים יותר, הייתה אפשרות להתמודד עם משימות מאתגרות יותר ועדיין לעסוק באותו נושא. בדיון המסכם באותו שיעור בחרתי להתייחס לשאלה מספר 1 מתוך משימת ההרחבה ולא לחזור ולדון במשימות מתוך המשימה הראשונה, שהתלמידים עסקו בהן הרבה. בנוסף הזמנתי תלמידים להציג במטול בפני הכיתה את המשוואות שהם חיברו. אני שמחה שהייתי קשובה לתהליך והייתי מספיק גמישה כדי לסטות מהתכנית שלי על מנת להגיע לשיח מתמטי פורה עם כל הכיתה. בכך הצלחתי לפתח אצל התלמידים תובנה מספרית. אך בכך המשימה שלי לא הסתיימה. חשוב להמשיך ולאמן את התלמידים בכיתות במשימות אשר מעודדות תובנה מספרית. ככל שהתלמידים ירבו במשימות מעניינות ומגוונות, ויתמודדו עם שאלות שדורשות שימוש בתובנה, כך גם התובנה המספרית שלהם תתפתח. שיעורים כאלה מעניינים יותר הן עבור המורה והן עבור התלמידים. בנוסף, חשוב לתעד שיחות ולעקוב אחר התקדמות התלמידים.

אני מרגישה שבשיעורים כאלה, אני לומדת מכל כיתה משהו חדש על הוראת הנושא.



**[מקורות]**


Reys,B.J., & Kim, 0.k., & Bay, J.M. (1999). Establishing Fraction Benchmarks. *Mathematics Teaching in the Middle School. Vol 4,No.8.*
פיתוח "סימני דרך" בשברים, המרכז הארצי למתמטיקה, חיפה, תרגום: מיכל סוקניק.

Stein, M.K., & Smith, M.S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: *From Reasearch to Practice Mathematics. Teaching in the Middle School. Vol. 3, No. 4.*
משימות מתמטיות כמסגרת לרפלקציה: ממחקר למעשה, המרכז הארצי למתמטיקה, חיפה, תרגום: ברכה סגליס.


תודה לנילי הירשפלד ממכון ויצמן למדע שסייעה בכתיבת מאמר זה.

הערה: שמות התלמידים במאמר בדויים