מה אפשר לעשות עם 9 מספרים ומשולש אחד?

מירב אמסלם, בית הספר "הבונים" קרית-ביאליק

כמורים אנו רוצים מידי שיעור לקדם את כל תלמידי הכיתה. משימה זו היא כמעט בלתי אפשרית בכיתות הטרוגניות ומאוכלסות כל כך כשלנו, כשהפערים בין תלמידי הכיתה גדולים מאוד.

בבית ספרנו ניסינו לחשוב על דרכים אשר יקלו עלינו להגיע למספר רב של תלמידים בכל שיעור. מצאנו שאם ניתן לתלמידים המתקדמים משימות חשיבה רבות, במקביל נוכל להתפנות לקידומם האישי של התלמידים המתקשים יותר. לצורך מטרה זו החלטנו לאסוף משימות העשרה וחידות רבות ככל האפשר.

את החידות השונות החלטנו לאסוף בעזרת המורים וגם בעזרת התלמידים. ואכן, חידות רבות הובאו לכיתות על-ידי התלמידים. אין צורך לציין את ההתרגשות הגדולה של ילד שחידתו נכתבת על הלוח בכיתתו ועוד יותר כשהיא גם מועברת לכיתה אחרת.

בהתחלה החלטנו לאסוף חידות שבכולן צריך לשבץ מספרים. מצאנו שיש הרבה מאוד חידות כאלו, ובכל אחת המטלה שונה. מכאן, שנקודות המוצא לפתרון החידות הן שונות והעבודה סביב חידות אלו משולבת באסטרטגיות רבות ומגוונות. יש חידות בהן התלמידים מתבקשים להתאים מספרים, כך שיתקבלו פסוקי אמת, במקרים אחרים עליהם לסדר מספרים כך שיתקבל סכום מסוים שנקבע מראש, ויש גם מקרים שבהם יש לשבץ מספרים על-ידי חוקיות אחרת המוצגת לתלמידים.

את החידות אנו חושפים לכל תלמידי הכיתה. במהלך שיעור המתמטיקה המורה כותב על הלוח את משימות החובה ואת החידות שהן משימות העשרה. החלטנו לחשוף את החידות לכלל התלמידים, אך לא לחייב את כולם לפתור אותן. הילדים יכולים גם לפתור את החידות בבית ולהיעזר בהורים, אחים, חברים וכדומה.

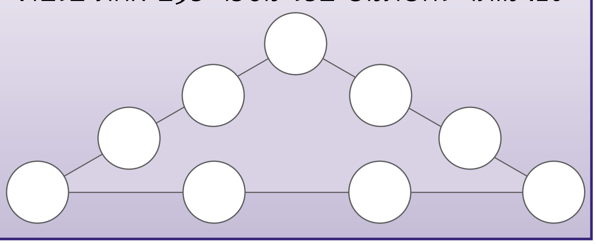
במהלך השיעור התלמידים ממהרים לסיים את משימות החובה כדי שיוכלו להתחיל לעבוד על החידה. מעניין לראות איך הם מתחבטים ומנסים עד שהם מגיעים לפתרון. לאחר שקבוצת תלמידים מוצאת את הפתרון הם משווים את הפתרון עם חברים אחרים בכיתה.

שלב הדיון והדיווח הכיתתי. נעשה מספר ימים לאחר חשיפת החידה. כך גם תלמידים שלא הספיקו לפתור בכיתה יכולים לנסות להתמודד עם החידה בבית, או בהפסקות בעזרת תלמידים שכבר הצליחו. בדרך זו מרבית התלמידים מגיעים לדיון כשכבר התנסו בחידה ברמה זו או אחרת.

שלב הדיון הוא שלב מאוד חשוב שבו אוספים את כל הפתרונות שעלו בכיתה, שומעים דרכים מגוונות למציאת הפתרונות ומסכמים את העבודה. בשלב זה המורה יכולה להעלות שאלות המכוונות להסתכלות יותר מעמיקה על החידה, כמו, מציאת סיבות לתופעות והכללות של תופעות. כמו כן בשלב זה המורה אוספת את הניסיונות השונים של התלמידים ומכוונת אותם לרישום שיטתי, ולדרכי עבודה יעילות שיזדקקו להם גם בפתרון חידות נוספות. להדגמת התהליך אציג חידה שהביא תלמיד מכיתה ג מתוך הספר "חשבון עוזר לאלגברה" מאת ויקטור רומנובסקי, תל-אביב, 2003.

חידה

שבצו בעיגולים שבמשולש את המספרים 1 עד 9, כך שהסכום שיתקבל בכל צלע של המשולש יהיה 20. מותר להשתמש בכל מספר פעם אחת בלבד.



איור 1

במהלך מציאת הפתרונות עברנו התלמידים ואני תהליך מעניין ומרתק, מצאנו שלחידה יכולה להיות גם חידת המשך עם פתרונות נוספים.

התלמידים ניסו בזמנם הפנוי במשך השבוע למצוא פתרונות לחידה. הם שיבצו מספרים באופן אקראי ובדקו האם הגיעו לתשובה המצופה. אחר כך השוו עם חבריהם ובדקו האם גם הם הציבו את המספרים באותו אופן.

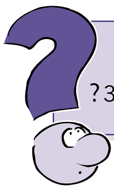
לפני שהגענו לשלב הדיווח טען אחד התלמידים שלא ניתן להגיע לסכום 20 אלא רק לסכום 17. טענה שפתחה בפנינו אפשרות לדיון נוסף שהעמיק את ההסתכלות בחידה. מאחר ומצאנו שניתן להגיע לסכום 20 במספר דרכים שונות, עלתה מיד השאלה האם ניתן להגיע גם לסכומים אחרים מלבד 17 ו-20. בשלב זה, לפני שהצגנו את הדרכים השונות לפתרון החידה המקורית (הסכום 20) החלטנו לנסות ולמצוא סכומים נוספים שניתן להגיע אליהם, כששני התנאים הבאים נשמרים:

א.המספרים המשובצים יהיו 1 עד 9. כל מספר פעם אחת בלבד.

ב.הסכומים המתקבלים בכל אחת מצלעות המשולש יהיו שווים.

לאחר ניסיונות רבים הגענו לשלושה סכומים: 17, 20, 23.

מכאן עלו שאלות נוספות:

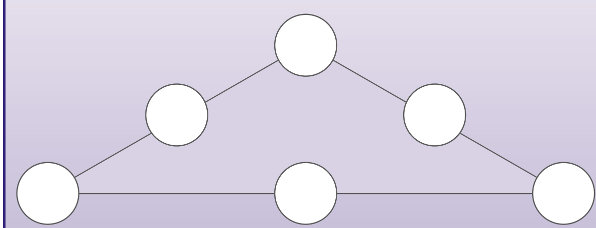


- האם ניתן להגיע לסכומים נוספים?
- מדוע ההפרש בין הסכומים שמצאנו הוא תמיד 3?

בנקודה זו נזכר אחד התלמידים שבעבר פתר חידה דומה:

חידה

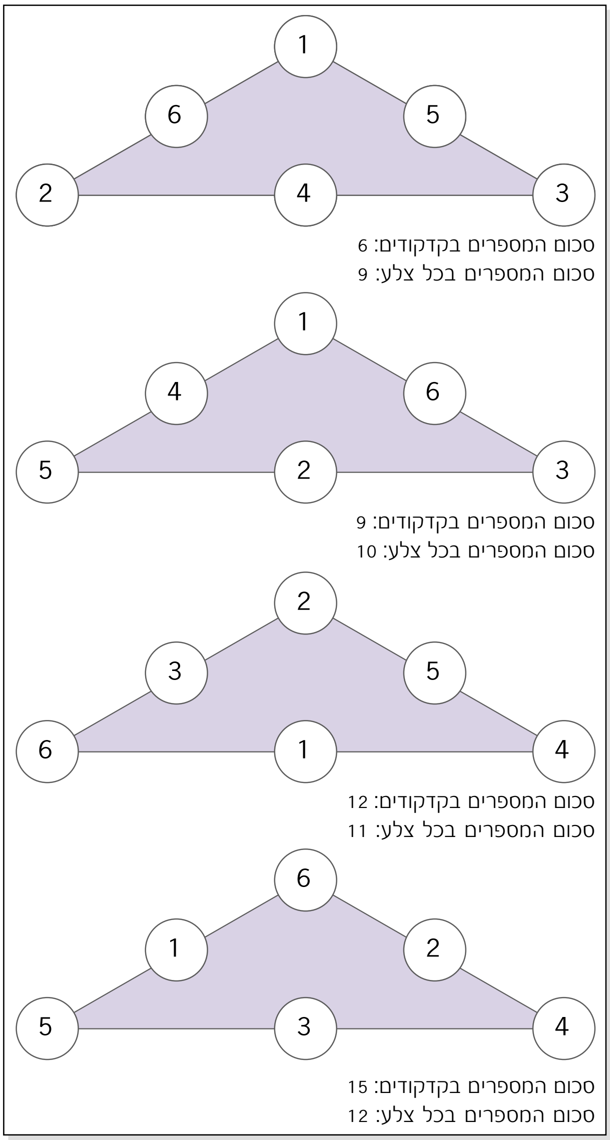
שבצו בעיגולים שבמשולש את המספרים 1 עד 6, כל ספרה פעם אחת בלבד, כך שהסכומים שיתקבלו בכל אחת מהצלעות יהיו שווים.



איור 2

לחידה זו מצאו התלמידים 4 פתרונות שונים (ראו איור 3). מצאנו גם שכל הפתרונות המתקבלים הם תמיד מספרים עוקבים. סכום המספרים בקדקודים הוא 6 או 9 או 12 או 15. זו סדרה חשבונית שהפרשה 3.

מכיוון שלא ניתן ליצור מהמספרים 1 עד 6 בקדקודים, סכום קטן מ- 6 או סכום גדול מ- 15 אין פתרונות נוספים.

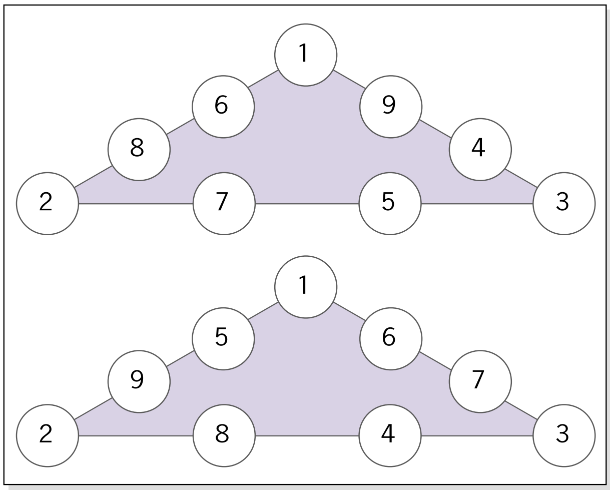


איור 3

לאחר שחזור החידה הזו חזרנו לחקור את החידה שבה יש לשבץ את המספרים 1 עד 9.

תהליך העבודה

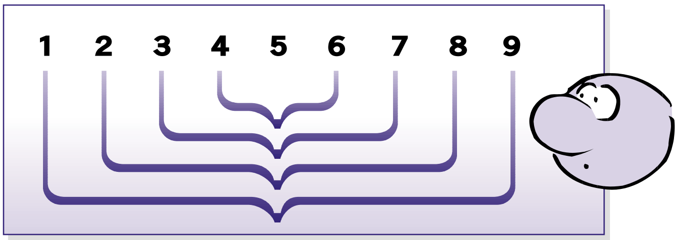
החלטנו להתחיל מהסכום 17, שהיה סכום המספרים הקטן ביותר בכל צלע שמצאנו. רצינו לבדוק אם זה הסכום הקטן ביותר שניתן למצוא, או שניתן למצוא סכום קטן עוד יותר. מצאנו לסכום זה 2 פתרונות.



איור 4

בשני המקרים ראינו שבקדקודי המשולש נמצאו המספרים 1,2,3.

הילדים הציעו שנחבר את המספרים 1 עד 9 ונחלק ב-3 את התוצאה. לאחר שכתבנו על הלוח את המספרים בסדר העולה: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, אחד הילדים הזכיר שכדאי להשתמש בשיטה של גאוס ובדרך זו לחשב במהירות את סכום המספרים: 1,2,3,4,5,6,7,8,9.



הילדים חישבו 4 פעמים 10 ועוד 5 ומצאו שסכום המספרים הוא 45. אולם, מיד אחד התלמידים הצביע על כך שיש מספרים שצריך להכניס פעמיים, כי הם נמצאים בקדקודים ולכן נמצאים בסכומים של שתי צלעות. מכאן שביצענו את התרגיל: 45+1+2+3=51

חזרנו לרעיון המקורי שצריך לחלק את הסכום שהתקבל ב-3 הצלעות וקיבלנו: 51:3=17

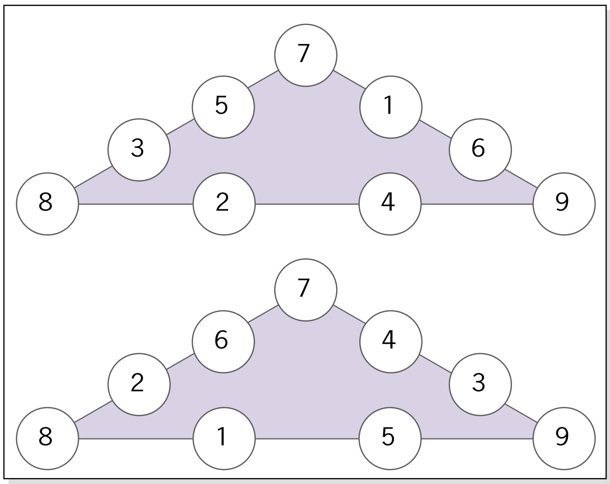
מאחר ו- 1,2,3 הם המספרים הקטנים ביותר מבין המספרים שאפשר לשבץ במשולש, הרי שכל הצבה אחרת של מספרים בקדקודים תגרום להגדלת הסכום. מכאן ש-17 הוא הסכום הקטן ביותר שאפשר לקבל.

בדרך דומה חיפשנו מהו הסכום הגדול ביותר שניתן לקבל. הפעם יצאנו מתוך הנחה שהמספרים 7,8,9 נמצאים בקדקודים של המשולש. (הם המספרים הגדולים ביותר מבין המספרים שניתן להציב).

ביצענו את התרגילים: 45+7+8+9=69

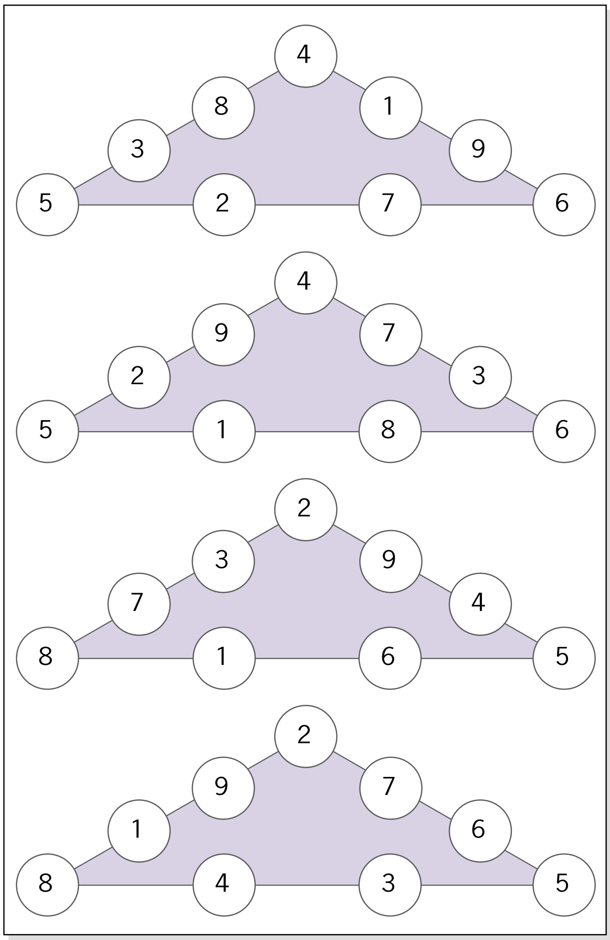
69:3=23

מכאן הסקנו ש-23 הוא הסכום הגדול ביותר שניתן לקבל. לסכום זה מצאנו 2 פתרונות שונים. (איור 5).



איור 5

לאחר כל החקירות המעניינות האלו התפנינו לחידה המקורית שבה התבקשנו להגיע לסכום 20 בכל צלע. התחלנו מהפתרונות שהתלמידים מצאו. התלמידים מצאו 4 פתרונות שונים. בשניים מהם המספרים 4,5,6 היו בקדקודי המשולש, ובשני האחרים המספרים 8,2 ו-5 היו בקדקודי המשולש (איור 6).



איור 6

אחד התלמידים הציע שנערוך בדיקה על-ידי הוספת המספרים 6,5,4 לסכום 45 (שיהיה סכום המספרים 1 עד 9).

ביצענו את התרגיל: 45+4+5+6=60

60 אכן מתחלק ב- 3 והתוצאה היא 20. הסכום המבוקש.

במהלך הדיון הבחינו התלמידים שהפתרון שבו הוצבו 2,8,5 בקדקודים יוצא דופן, משום ששלושת המספרים שהוצבו בקדקודים אינם עוקבים. אחד התלמידים טען ש"זה לא משנה כי הסכום שלהם הוא 15 בדיוק כמו הסכום של 4,5,6."

בשלב זה כתבנו על הלוח את המשוואה:

45+__+__+__=60

ולמעשה עסקנו בפתרון המשוואה: __+__+__=15

התלמידים מצאו שילובים שונים של שלושה מספרים מבין המספרים 1 עד 9 שסכומם 15. מה שנותר עוד לעשות זה: להציב את השלשות שקיבלו בקודקודי המשולש, להציב את המספרים המתאימים בצלעות, ולקבל עוד פתרונות לחידה.

כל פתרון נוסף שנמצא גרם לשמחה בכיתה. בשלב זה עלתה גם השאלה: "מדוע ההפרש בין הסכומים האפשריים שאפשר לקבל הוא 3" מצאנו פתרונות לסכומים: 17, 20 ו- 23. פתרונות אלו נבעו מפתרון המשוואות הבאות:

45+___+___+___=51

45+___+___+___=60

45+___+___+___=69

התלמידים הבינו מדוע התוצאה של המשוואה היא כפולה של 3 ומדוע 51 ו-69 הם הקיצוניים ביותר האפשריים. אולם כאן עלתה השאלה האם לא יתכנו גם פתרונות למצבים הבאים, שגם בהם תוצאת המשוואה היא כפולה של 3:

45+___+___+___=54

45+___+___+___=57

45+___+___+___=63

45+___+___+___=66

התלמידים ניסו למצוא פתרונות למשוואות האלו. הם זכרו שהמספרים החסרים בכל משוואה הם מבין המספרים 1 עד 9 וחייבים להיות שונים זה מזה. פתרונות למשוואות נמצאו במהירות. התלמידים מיהרו לשבץ את המספרים שמצאו בקדקודי המשולש. אולם, כשניסו לשבץ את המספרים הנוספים בצלעות המשולש גילו שפתרונות אלו בלתי אפשריים.

לסיכום

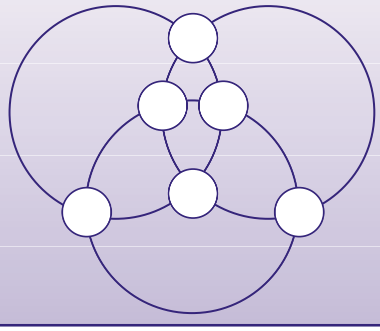
ראינו כי לחידות יש יתרונות רבים במהלך השיעור. אימצנו לעצמינו את השימוש בחידות כדרך עבודה וכשגרה. אנו רואים במהלך העבודה שהילדים מרחיבים את האסטרטגיות שלהם ומשתמשים באסטרטגיות שנרכשו במהלך פתרון חידות קודמות.

הדיון המתמטי והחקירה בכיתה מעמיקים מאוד, ואנו מאמינים שבדרך זו אנו מקנים לילדים הרגלי חקירה מתמטית ומעשירים אותם באסטרטגיות שונות לפתרון בעיות שונות.

ולקינוח- חידה נוספת שלפתרונה ניתן להשתמש באסטרטגיה אותה פיתחנו בחידה הקודמת, אולם עם שינוי קטן.

חידה

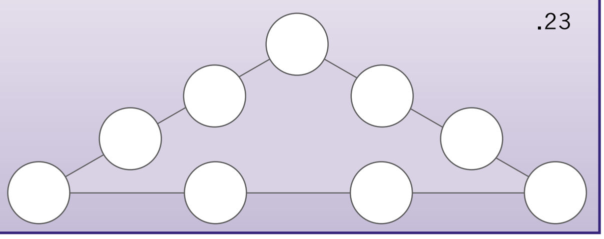
שבצו בעיגולים את המספרים 1 עד 6, כל מספר פעם אחת בלבד, כך שסכום המספרים בכל מעגל יהיה זהה.



ואפשר גם לשנות את תנאי החידה המקורית:

חידה

שבצו במשולש את המספרים 1 עד 9, כל מספר פעם אחת, כך שבצלע אחת יתקבל הסכום 17, בצלע השנייה הסכום 20, ובצלע השלישית הסכום 23.



חידות נוספות ניתן למצוא ביישומון:
http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/weekly_present/java11.htm