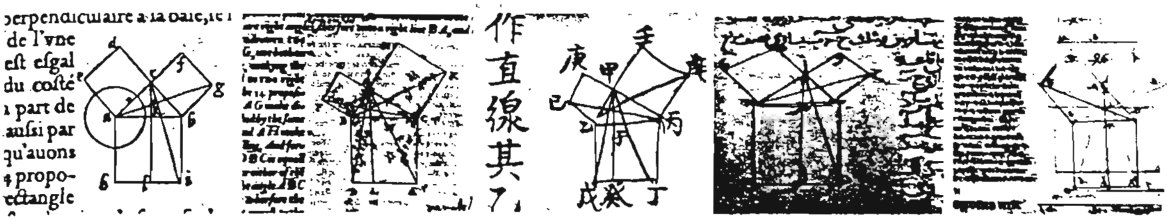

מפלאי המספרים הראשוניים

מאמר ראשון בסדרה

ד"ר אלי מאור

המספרים הראשוניים - אותם מספרים המתחלקים אך ורק באחד ובעצמם - קסמו מאז ומתמיד למתימטיקאים. תכונותיהם המופלאות מהוות נושא בלתי נדלה של מחקרים מעמיקים, ורבות מן השאלות הקשורות בם נותרו ללא תשובה עד היום הזה.

המספרים הראשוניים מתחילים בסדרה 2,3,5,7,11,13,... (המספר 1, שגם הוא מתחלק רק בעצמו, אינו נחשב לראשוני). מבט חטוף מראה שמספרים אלה מהווים מיעוט בין המספרים הטבעיים בכלל: רוב המספרים הטבעיים הם **פריקים**, ז.א. ניתנים לכתיבה כמכפלת גורמים קטנים יותר. לדוגמה, את המספר 12 נוכל לכתוב כמכפלה של גורמים 2 ו־6: אבל מאחר ש־6 עצמו מתפרק לגורמים 2 ו־3, הרי בסופו של הפירוק נקבל $12=2\times 6=2\times 2\times 3$. כמובן, יכולנו להתחיל את הפירוק גם באופן שונה, למשל $12=3\times 4=3\times 2\times 2$. אנו רואים שהתוצאה הסופית היא זהה, פרט לסדר של הגורמים הראשוניים (שכמובן אינו משנה). עובדה זאת - שכל מספר טבעי ניתן לפירוק לגורמים ראשוניים באופן אחד ויחיד - היא אחת העובדות החשובות ביותר של תורת המספרים, וידועה בשם ***המשפט היסודי של האריתמטיקה***. היא מקנה למספרים הראשוניים תפקיד דומה לזה של היסודות הכימיים בטבע - מעין אבני בניין שמהם בנוי כל עולם המספרים.

כמה מספרים ראשוניים ישנם? כבר היוונים הוכיחו כי מספרם הוא אינסופי. ההוכחה כלולה בספרו המפורסם של אוקלידס, "היסודות", (למעשה קובץ של שלושה עשר ספרים), אשר נכתב באלכסנדריה במאה השלישית לפנה"ס, והנחשב לספר רב־ההשפעה ביותר, שנכתב אי פעם במתימטיקה. (אומרים שאחרי התנ"ך, "היסודות" הם רב־המכר המצליח ביותר בכל הדורות: הספר עדיין נמצא בדפוס כיום, 2300 שנה לאחר חיבורו!). ההוכחה היא פשוטה כל כך עד שכל ילד יוכל להבינה. נביא כאן את עיקר ההוכחה, אשר ניתנת, כמובן, לניסוח מדוייק יותר בעזרת שפת האלגברה.

נניח שקיים רק מספר סופי של מספרים ראשוניים, למשל רק 2 ו־3. נכפול שני מספרים אלה ונוסיף לתוצאה את המספר 1. נקבל מספר חדש N. אם ננסה לחלק את N בגורמים 2 או 3, תמיד תישאר שארית 1 (בגלל ה־1 שהוספנו למכפלה). תיתכננה אם כן רק שתי אפשרויות: או ש־N עצמו הוא מספר ראשוני חדש, או שבין גורמיו ישנו מספר ראשוני חדש. נוסיפנו איפה לרשימה שלנו, שתכלול עתה את המספרים 7, 3, 2. עתה נחזור על התהליך: נכפיל את שלושת המספרים הללו ונוסיף למכפלה 1:

$N = 2\times3\times7+1 = 43$. הנימוק שהבאנו למעלה תקף שוב: N אינו מתחלק באף אחד מן המספרים הראשוניים שישנם בידינו, לכן או שהוא עצמו ראשוני חדש, או שבין גורמיו מצוי מספר ראשוני חדש. (במקרה שלנו 43 הוא עצמו מספר ראשוני). על תהליך זה ניתן לחזור שוב ושוב, כאשר בכל שלב מתוסף מספר ראשוני אחד או יותר לרשימה הקיימת. כך הולכת ונוצרת מעין "ריאקציית שרשרת", ורשימת המספרים הראשוניים הולכת וגדלה ללא גבול.

תהליך זה עשוי להוות חומר העשרה מעניין לכיתה: המורה מכריזה על שני מספרים ראשוניים התחלתיים, ועל התלמידים ליצור מהם לפחות חמישה מספרים ראשוניים חדשים. (מובן שניתן להיעזר במחשב כיס). לדוגמה, אם מתחילים במספרים 3 ו־5 יהיה השלב הראשון $16 = 3\times5+1 = 16$. במקרה זה המספר 16 אינו ראשוני אלא מתפרק לגורמים 2,2,2,2. נוסיף אם כן את המספר 2 לרשימתנו, וניצור N חדש: $N = 2\times3\times5+1 = 31$. רשימתנו כוללת עתה את המספרים 2, 3, 5, 31. ברור שהמספרים הנוצרים בדרך זאת הולכים וגדלים במהירות, ועד מהרה קשה יהיה לפרקם לגורמיהם. בדוגמה שלפנינו,

המספר הבא יהיה $N = 2\times3\times5\times7\times19\times31+1 = 123691$, וכן הלאה. בשלב זה התלמידים בודאי ירימו את ידיהם בהכנעה ויאמרו שאינם יכולים להמשיך יותר במציאת הגורמים (או שיכריזו על כל אחת מהתוצאות כעל מספר ראשוני מבלי לבדקו). אבל למעשה אין כלל צורך להכפיל אל כל המספרים הראשוניים שכבר מצאנו: מספיק לקחת קבוצה חלקית מהם. כך למשל, מתוך הקבוצה 2, 3, 5, 31 נוכל לבחור את המספרים 2, ו־5 ולהמשיך מהם: $N = 2\times5+1 = 11$, אח"כ $N = 2\times11+1 = 23$, וכן הלאה. ללא ספק תגלית זאת רק תגביר את התעניינות התלמידים ואת התלהבותם למצוא מספרים ראשוניים נוספים.

מובן שלשיטה זו של גילוי מספרים ראשוניים יש חיסרון רציני: היא איננה נותנת את **כל** המספרים הראשוניים. וגם אלה שמתקבלים אינם מופיעים לפי סדרם המספרי, ז"א מהקטן לגדול. **כל** הנסיונות למצוא נוסחה מתימטית, אשר תתן את כל המספרים הראשוניים לפי סדרם, עלו עד כה בתוהו. זאת משום שמספרים אלה מפוזרים בין יתר המספרים בצורה פחות או יותר אקראית, ללא סדר הנראה לעין. קיימים אמנם חוקים המנבאים את **ההסתברות** למצוא מספר ראשוני בתוך קבוצת מספרים טבעיים נתונה, אבל אלה אינם יכולים לקבוע, האם מספר **מסויים** הוא ראשוני או פריק.

בפעם הבאה נעסוק בשאלה, כיצד בכל זאת ניתן למצוא באופן שיטתי את כל המספרים הראשוניים עד מספר נתון. כמו כן נביא כמה בעיות פשוטות כביכול הנוגעות למספרים אלה, בעיות שטרם נפתרו עד היום.