



# אגוסטו של צניין

## נושאים מתימטיים

נאוה אלמוג

### שברים עשרוניים כמספרים רציונלים/אי רציונליים

מספר רציונלי הוא מספר שניתן לרשום אותו בצורה של  $\frac{p}{q}$ , כך ש-  $p$  ו-  $q$  שלמים ו-  $q \neq 0$ .

לדוגמא, 5 הינו מספר רציונלי היות שניתן לרשום אותו כ-  $\frac{5}{1}$  או  $\frac{10}{2}$  וכו'. מאותה סיבה 0.3 הינו מספר רציונלי היות שניתן לרשום אותו כ-  $\frac{3}{10}$ .

מובן מאליו כי כל שבר הינו מספר רציונלי, שהרי הוא רשום מלכתחילה בצורה של  $\frac{p}{q}$ .

הבה נשחזר מה קורה בהפיכה של מספר הכתוב בצורת שבר למספר הכתוב בצורה עשרונית.

אם המכנה ניתן לפירוק לגורמים של 2 או 5 בלבד מקבלים שבר עשרוני סופי.

$$\begin{array}{r} 1.75 \\ -7 \overline{)4} \\ \underline{-4} \phantom{0} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ \hline \end{array}$$

לדוגמא: כדי להפוך את השבר  $\frac{7}{4}$  נבצע

הסבר: בתהליך החלוקה של המונה במכנה או מוסיפים אפסים מימין לשארית וע"י כך, למעשה, כופלים את המונה ב-10 פעם אחר פעם. והרי 10 הוא כפולה של 2 ב-5 - לכן החלוקה בגורמים 2 ו-5 תיתן תוצאה שלמה. לעומת זאת - אם בפירוק של המכנה נמצאים גורמים שונים מ-2 ו-5, מתקבל שבר אינסופי מחזורי. לדוגמא: כדי להפוך את השבר  $\frac{7}{6}$  נבצע

$$\begin{array}{r} 1.166 \\ - 7 \overline{)6} \\ \underline{-6} \\ 10 \\ \underline{-6} \\ 40 \\ \underline{-36} \\ = 4 \end{array}$$

נשאלת השאלה - מדוע? - אם נעקוב אחר התהליך, נראה כי בחלוקת המונה במכנה אנו מוסיפים בכל שלב 0 מימין לשארית ושוב מחלקים במכנה. אם המכנה הוא X הרי שכמות השאריות האפשריות היא X-1. ולכן אחרי X-1 פעולות חילוק, לכל היותר, נקבל את אחת השאריות פעם נוספת. משלב זה התהליך חוזר על עצמו ונקבל אותן הספרות לפי אותו סדר. כלומר: אורך חיי המחזור הוא לכל היותר X-1

דוגמאות:

$$\begin{array}{r} 0.285714 \\ - 2 \overline{)7} \\ \underline{-0} \\ 20 \\ \underline{-14} \\ 60 \\ \underline{-56} \\ 40 \\ \underline{-35} \\ 50 \\ \underline{-49} \\ 10 \\ \underline{-7} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ = 2 \end{array}$$

א.  $\frac{2}{7}$  השאריות האפשריות בחלוקה ל-7

הן: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ואכן קיבלנו את

השאריות 2, 3, 1, 5, 4, 6

וחוזר חלילה. לכן במחזור יש 6 ספרות.

ב.  $\frac{4}{33}$  במקרה זה יש 32 שאריות אפשריות

אולם מתקבלות רק השאריות 4 ו-7.

לכן במחזור יש רק 2 ספרות.

$$\begin{array}{r} 0.121 \\ 4 \overline{) 33} \\ - 0 \\ \hline - 40 \\ - 33 \\ \hline 70 \\ - 66 \\ \hline = 4 \end{array}$$

כיצד מתבצע התהליך ההפוך ?

הפיכה של שבר עשרוני סופי לשבר פשוט היא תהליך מוכר: רושמים כמונה את השלמים ואת הספרות שמימין לנקודה וכמכנה את 10 בחזקת מספר הספרות שמימין לנקודה.

דוגמאות:

$$0.4283 = \frac{4283}{10^4} = \frac{4283}{10000}$$

$$0.035 = \frac{35}{10^3} = \frac{35}{1000}$$

נדגים הפיכה של שבר עשרוני אינסופי מחזורי לשבר פשוט:

$$X = 0.333... \quad \text{נסמן} \quad 0.333...$$

במחזור של שבר זה ספרה אחת (3) לכן נכפול ב- $10$  בחזקת 1 ונקבל:

$$10X = 3.333...$$

$$\begin{array}{r} 10X = 3.333... \\ - X = 0.333... \\ \hline \end{array}$$

$$9X = 3$$

$$X = \frac{3}{9}$$

$$X = \frac{1}{3}$$

נחסר את המספר הנתון:

$$X = 0.254254... \quad \text{נסמן} \quad 0.254254 \dots \text{ ב.}$$

במחזור של שבר זה 3 ספרות (254), לכן נכפול ב-10 בחזקת 3 (1000), ונקבל:

$$\begin{array}{r} 1000X = 254.254... \\ - \\ X = 0.254254... \end{array}$$

$$999X = 254$$

$$X = \frac{254}{999}$$

אם כך - המספרים הרציונליים ניתנים לייצוג בשתי צורות בדיוק:

(1) שברים עשרוניים סופיים.

(2) שברים עשרוניים אינסופיים מחזוריים.

נתבונן בשבר העשרוני  $0.252552555\dots$

שבר זה הינו אינסופי, אך אינו מחזורי. מתוך המבנה שלו ניתן ללמוד מה תהיינה הספרות הבאות, אולם לא ניתן למצוא קבוצת ספרות החוזרת על עצמה. מכאן ששבר זה אינו משתייך אף לאחת משתי הצורות המייצגות את המספרים הרציונליים ולכן אינו רציונלי. מספר כזה ודומיו משתייכים לקבוצת האירציונליים.

### **נסכם:**

השברים העשרוניים נחלקים ל- 3 סוגים:

א. סופיים.

ב. אינסופיים מחזוריים.

ג. אינסופיים שאינם מחזוריים.

השברים מסוג א' ו-ב' נקראים מספרים רציונליים.

השברים מסוג ג' נקראים מספרים אירציונליים.