

דרכים רבות לפתרון

נחמה חורין

רבות מדובר על פיתוח אסטרטגיות חשיבה. מחקרים רבים הצביעו על פתרון בעיות כאחת הדרכים לפיתוח חשיבה. בבעיות שבהן ניתן להציג דרכים אחדות לפתרון, אנו משפרים את תהליכי החשיבה ומאפשרים לכל תלמיד, בהתאם לרמתו, לבחור בדרך הנראית לו והמתאימה לידיעותיו. כל פתרון נכון ומנומק מתקבל.

בעיה 1

בבית-ספר לבאלט יש 98 תלמידים. לכל שני רקדנים יש חמש רקדניות.

◆ כמה רקדנים בקבוצה?

◆ כמה רקדניות בקבוצה?

דרך א' – ניחוש

ניחוש ראשון: 20 בנים 50 בנות, בסך-הכל 70 רקדנים (כפל ב-10).

ניחוש שני: 30 בנים 75 בנות, בסך-הכל 105 רקדנים (כפל ב-1.5).

(מספר הבנים צריך להיות זוגי: "לכל שני רקדנים...") על סמך שני הניחושים אפשר להגיע למסקנה, כי מספר הבנים קרוב יותר ל-30 מאשר ל-20, כי 105 קרוב יותר ל-98 מאשר 70.

ניחוש שלישי: 26 בנים 65 בנות, בסך-הכל 91 רקדנים.

ניחוש רביעי: 28 בנים 70 בנות, בסך-הכל 98 רקדנים - התשובה נכונה!

דרך ב' – ציור

7	—	בן	בן	בת	בת	בת	בת	בת
7	—	בן	בן	בת	בת	בת	בת	בת
7	—	בן	בן	בת	בת	בת	בת	בת

ומכאן למסקנה שאפשר ליצור קבוצות של שבעה רקדנים: שני בנים וחמש

בנות בכל קבוצה, ונקבל 14 קבוצות $14 : 7 = 98$

מספר הבנים $14 \times 2 = 28$

מספר הבנות $14 \times 5 = 70$

דרך ג' - יחס

יחס הבנים לבנות 2:5

$$\frac{2}{7} \times 98 = 28 \text{ מספר הבנים}$$

$$\frac{5}{7} \times 98 = 70 \text{ מספר הבנות}$$

ננתח את התהליכים בכל אחת מן הדרכים:

♦ דרך א' - ניחוש: אף על פי שמדובר בניחוש, הפותר צריך להפעיל את ידיעותיו בכפל, באומדן ובהערכה. מספר הניחושים עד לפתרון הנכון תלוי (בנוסף למזל) בהפעלת שיקולי היגיון לא פשוטים.

♦ דרך ב' - הציור: השימוש בהמחשה גרפית מאפשרת לפותר להיעזר במושג היחס, אם המושג טרם ברור לו מפורשות.

♦ דרך ג' - היחס: דרך זו קצרה אך דורשת הבנה טובה של מושג היחס, או למידה ספציפית. בדיון כיתתי כדאי להגיע לדרך זו לאחר שתלמידים שונים פתרו בדרכים שונות את הבעיה.

הערה: אפשר כמובן לפתור את הבעיה בקלות באמצעות משוואה, אך דרך זו מתאימה לחטיבת הביניים, ושימוש מוקדם בה דווקא ימנע חשיבה עצמית. ברור שאם תלמידים מפעילים שיטה זו ביוזמתם, לא נפסול את הדרך.

בעיה 2

בשדה פרות ותרנגולות. נמנו 70 ראשים ו-216 רגליים, כמה פרות בשדה ?

דרך א' - ניחוש בעזרת טבלה

רגליים	תרנגולות	פרות	
140	70	0	ניחוש ראשון - אין פרות
280	0	70	ניחוש שני - אין תרנגולות
210	35	35	ניחוש שלישי - מספר שווה

הניחוש השלישי מתקרב לנתון בבעיה, וכאן בא שיקול הדעת של התלמיד: האם להפחית את מספר התרנגולות, או להפחית את מספר הפרות. ברור שצריך ל"הוסיף" רגליים, מכאן שכדאי להוסיף פרות.

212	34	36	ניחוש רביעי
-----	----	----	-------------

"חסרות" ארבע רגליים, ומכאן מגיעים אולי למסקנה, שצריך להוסיף פרה אחת, אבל

רגליים	תרנגולות	פרות	
214	33	37	ניחוש חמישי
216	32	38	ניחוש שישי

וכאן המקום לדיון - למה כאשר חסרו ארבע רגליים צריך היה ל"הוסיף" שתי פרות.

דרך ב'

אם היו רק פרות, היו לנו $4 \times 70 = 280$ רגליים

אבל יש לנו 216 רגליים

כלומר, יש לנו 64 רגליים "מיותרות".

נחלק ל-2 (2 - 4 - מספר רגלי הפרה פחות מספר רגלי התרנגולת) ונקבל:

$$32 = 2 : 64. \text{ זאת אומרת יש לנו } 32 \text{ תרנגולות ו- } 38 = 70 - 32 \text{ פרות.}$$

$$\text{בדיקה: } 32 \times 2 + 38 \times 4 = 216$$

שיקול דומה אפשר לעשות אם מתחילים מהמקרה שבו יש רק תרנגולות.

* לשלב את דרך ב' בפתרון גרפי: להתחיל מ-70 ראשים ואז לחלק את הרגליים

שנותרו, או בכל דרך דומה (ההערה בסוף בעיה 1 מתאימה כמובן גם לכאן).

בעיה 3

מהו סכום 100 המספרים האי-זוגיים הראשונים ?

דרך א' - ניתוח ומציאת סכימה

$$\text{סכום של איבר אחד} \quad 1 = 1$$

$$\text{סכום של שני איברים} \quad 1 + 3 = 4$$

$$\text{סכום של שלושה איברים} \quad 1 + 3 + 5 = 9$$

$$\text{סכום של ארבעה איברים} \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

וניתן לגלות שיש לנו כאן, כנראה, טור של הריבועים

$$1 = 1$$

$$4 = 2^2$$

$$9 = 3^2$$

נבדוק סכום נוסף של חמישה איברים ונקבל:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \longrightarrow 5^2$$

ומכאן למסקנה, שסכום 100 איברים הוא $100^2 = 10000$

לדרך פתרון זו ניתן לתת המחשה גרפית משכנעת:

ננסה לבנות ריבוע 1 נסמן ב - •

• □ ◦ x Δ

□ □ □ - 3 נסמן ב -

□ □ ◦ x Δ

◦ ◦ ◦ ◦ ◦ - 5 נסמן ב -

◦ ◦ ◦ x Δ

x x x x x x - 7 נסמן ב -

x x x x Δ

Δ Δ Δ Δ Δ

ΔΔΔΔΔΔΔΔ - 9 נסמן ב -

קיבלנו ריבוע שבנוי מחמשת האיברים הראשונים ומספר האיברים בו 5^2 .

סביר שאם נמשיך כך נקבל ריבוע ובו 100^2 איברים.

דרך ב' - גילוי שיטת גאוס לחישוב טור חשבוני

$$1 + 199 = 200 \quad \text{נחבר את שני האיברים הקיצוניים}$$

$$3 + 197 = 200 \quad \text{נחבר את שני האיברים הבאים}$$

$$5 + 195 = 200 \quad \text{כן הלאה}$$

ונגיע למסקנה, שסכום זוג איברים במרחק שווה מהקצוות הוא 200. יש לנו

$$50 \text{ זוגות (2 : 100) ולכן הסכום הכולל הוא } 50 \times 200 = 10000.$$

דרך ב' היא דרך שקשה לתלמידים לגלות בעצמם, ניתן לעזור להם בגילוי, אם

מציגים את הנושא בחנוכה ! השאלה המתאימה היא: כמה נרות מדליקים

בחנוכה אם מדליקים חנוכיה אחת לפי בית הלל ואחת לפי בית שמאי...

הערה: תלמידים שכבר מכירים את הנוסחה לטור חשבוני, ישתמשו בודאי בה

ויפסידו הזדמנות לחשיבה מקורית.

נודה לכם מאוד אם תמציאו לנו דוגמאות לשאלות נוספות עם דרכים שונות

לפתרון, ונפרסמן בגיליון הבא של "מספר חזק".