רגע חושבים
פיתוח חשיבה

פעילויות חקר "מתקדמות" לכיתות "נמוכות"

ד"ר אלכס פרידלנדר

"בעיית" התלמידים המתקדמים

העבודה עם תלמידים בעלי יכולת מתימטית גבוהה בכיתות הנמוכות (א'-ג') מציבה לפנינו אתגרים רבים:

- אוצר המיומנויות והמושגים המתימטיים של התלמידים בגיל הזה הוא מצומצם למדי.
- מורים ואנשים העוסקים בחינוך מתימטי לגילים אלה נוטים להשקיע את מרב המאמצים בהקניית מיומנויות יסוד לרוב האוכלוסייה ועקב כך, להקדיש פחות תשומת־לב למיעוט, שהוא מעבר לשלב זה.
- לדעתנו, האצת התלמידים המתקדמים ע"י לימוד נושאים השייכים לתוכנית הלימודים של כיתות גבוהות יותר, אינה מגרה במידה מספקת את סקרנותם האינטלקטואלית ואינה מפתחת במידה מספקת את כישורי החשיבה הטמונים בילדים אלה.

לפיכך, קיים לדעתנו צורך "עז" בפעילויות חקר בעלות היקף רחב יותר, המפגישות את התלמידים בהיכרות ראשונית ובלתי פורמלית עם מושגים מתימטיים מתקדמים בסביבה של פתרון בעיות. זו דרך אלטרנטיבית ל"הרצת"

התלמיד דרך שרשרת של תרגילים קצרים, הקשורים למיומנויות שנועדו לכיתות הגבוהות יותר. אנחנו סבורים, כי תלמיד שרכש את המיומנויות הבסיסיות מהר יותר מרוב חברי כיתתו, יכול להעמיק בפעילויות הקשורות אל אותם המושגים, או להעשיר את עולם המושגים שלו בנושאים חדשים, שאינם בהכרח קשורים לתכנית הלימודים.

הניסיון שהצטבר בעבודת הוראה ופיתוח חומרי־למידה מראה, כי סדרה של פעילויות חקר הקשורות זו בזו בנושא "סיפורי" או מתימטי משותף, מעוררת עניין בקרב התלמידים והיא בעלת השפעה לימודית גדולה יותר בהשוואה לאוסף של פעילויות, המובאות ללא כל חוט מקשר. צוות של מחברים, הפועל במסגרת פיתוח חומרים לתלמידים מתקדמים, הלומדים לפי הסדרה "אחת, שתיים ו...שלוש" (המרכז לטכנולוגיה חינוכית), החליט לנסות ליישם את העקרונות האלה.

במאמר זה נתאר אחת מתוך ארבע יחידות לימוד, המשתמשות באביזר בעל פוטנציאל מתימטי עשיר (קוביות משחק, אבני דומינו, גפרורים ולוחות שנה), כנושא המקשר בין הפעילויות שבאוסף. היחידות נמצאות כרגע בשלבי ניסוי; כל יחידה מכילה שמונה עד עשר פעילויות.

לשימוש באביזר כנושא של יחידת לימוד כמה יתרונות:

א. האביזר יוצר נושא משותף לפעילויות היחידה, ויחד עם זה מאפשר לכלול מגוון רחב של תחומים ומושגים מתימטיים.

ב. האביזר משמש כלי נוח וטבעי להכרת מושגים חדשים בדרך קונקרטית ובלתי-פורמלית.

חקירת הקוביה

להדגמת העקרונות שהובאו בסעיף הקודם, נתאר בהמשך יחידה של עשר פעילויות, המבוססות על קוביות משחק. פעילויות היחידה דורשות מן התלמיד לחקור תכונות הנדסיות של הקוביה בכלל, ותכונות מספריות של קוביית המשחק בפרט.

בשתי הפעילויות הראשונות, התלמיד מכיר כמה תכונות של הקוביה, ובייחוד את סוד הקסם של קוביית המשחק: סכום המספרים שעל כל זוג פאות נגדיות

הוא תמיד שבע. אפשר לעשות שימוש משעשע ב"קסם", אם נשחק משחק הדורש הטלת קוביה (למשל: סולמות וחבלים) לפי המספר הנסתר שעל הפאה התחתונה, במקום השימוש המקובל במספר הגלוי.

בפעילות השלישית - הסכום המקובל - התלמיד עורך ניסוי בהסתברות ועוקב באופן אמפירי אחר השכיחויות שבהן מופיעים הסכומים המתקבלים כאשר מטילים שתי קוביות. בשלב הבא, התלמידים משתמשים בלוח החיבור של המספרים השלמים, מ־1 עד 6, כמודל תיאורטי לניתוח הבעיה. כעת, הם יוכלו לערוך השוואות איכותיות (כלומר, בלי להשתמש בשברים), בין השכיחויות היחסיות של הסכומים השונים בלוח החיבור לבין השכיחויות שקיבלו בניסוי שערכו, ולהסיק מסקנות בנוגע לסכומים ה"מקובלים ביותר" והסכומים ש"אינם מקובלים". איור 1 מציג את סוג השאלות שאפשר לשאול לקראת סיום הפעילות הזאת.

ב־זוג או פרט, הפעילות הרביעית, התלמידים חוקרים את מאפייני המחוברים, היוצרים סכומים זוגיים או אי־זוגיים. במקום לעבור על הסדרות המקובלות של תרגילי נייר ועיפרון, הפעילות יכולה להתנהל תוך כדי הטלת זוג קוביות. בשלב זה, התלמידים יכולים לפתור אי־שיוויונים מורכבים למדי מן הסוג המוצג באיור 2.

איור 1: הסכום המקובל ביותר:

גליה ורונן שיחקו במשחקים שבהם מטילים שתי קוביות ובודקים את סכום המספרים המתקבלים על הקוביות. רשמו ליד כל משחק למי מהם סיכוי גדול יותר לנצח.

משחק א': גליה מנצחת אם הסכום הוא 2 ;
רונן מנצח אם הסכום הוא 7.

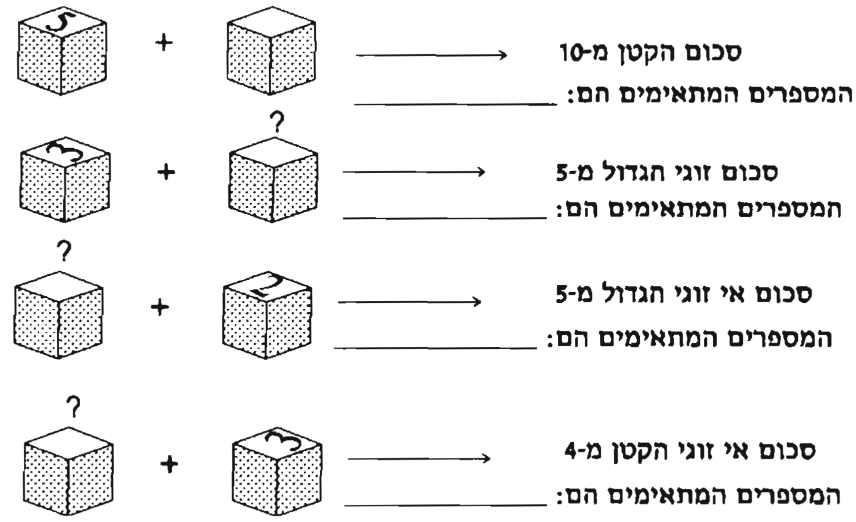
משחק ב': גליה מנצחת אם הסכום הוא 7;
רונן מנצח אם הסכום הוא 12.

משחק ג': גליה מנצחת אם הסכום הוא 2;
רונן מנצח אם הסכום הוא 12.

משחק ד': גליה מנצחת אם הסכום הוא 6;
רונן מנצח אם הסכום הוא 7.

משחק ה': גליה מנצחת אם הסכום הוא 7;
רונן מנצח אם הסכום הוא 8.

איור 2: זוג או פרט, מצאו את כל המספרים החסרים:



בשלוש הפעילויות הבאות, התלמידים עורכים היכרות עם מושגים הקשורים לגרפים ומערכת צירים. תחילה הם מכירים את אופן הסימון של נקודות במישור על־ידי זוג סדור של מספרים, בעזרת גרסה של המשחק איקס-מיקס-דריקס (איור 3). לאחר מכן, הם משתמשים בידע הזה כדי לתרגם לגרפים מגוון רחב של תכונות מספריות המאפיינות הטלות שונות, ולהיפך, הם קוראים גרפים ומוצאים את התכונה המשותפת המאפיינת את הנקודות המרכיבות גרף נתון (איור 4).

איור 3: ארבעה יחד

חומרים:

לוח משחק אחד לזוג משתתפים.

שתי קוביות שונות בגודל או בצבע (צריך לרשום על הצירים שבלוח את מאפייני הקוביה).

מהלך המשחק:

כל משתתף בוחר לעצמו סימן X או 0;

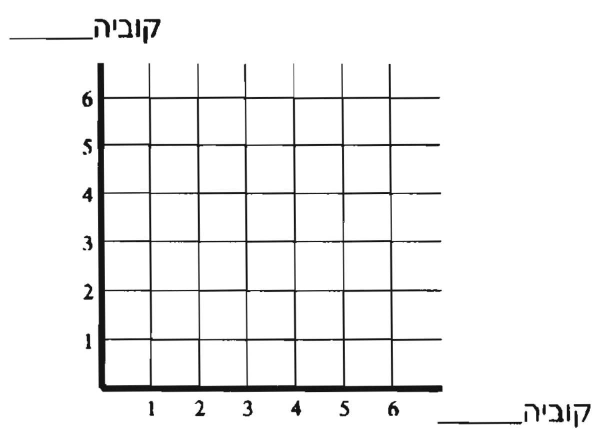
כל משתתף מטיל בתורו את הקוביות ומסמן בסימנו את הנקודה המתארת את ההטלה;

אם הנקודה כבר תפוסה, התור עובר למשתתף האחר.

מנצח:

מי שצובר ראשון רביעיה של סימנים סמוכים בשורה, בטור או באלכסון;

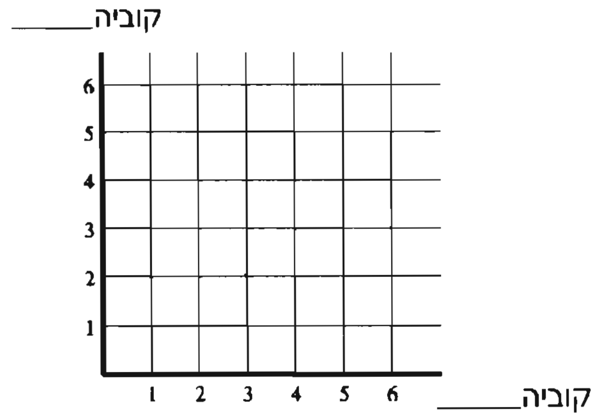
אם אף משתתף לא הצליח ליצור טור, שורה או אלכסון ואין מקום פנוי על הלוח, מנצח המשתתף בעל מספר הנקודות הרב ביותר.

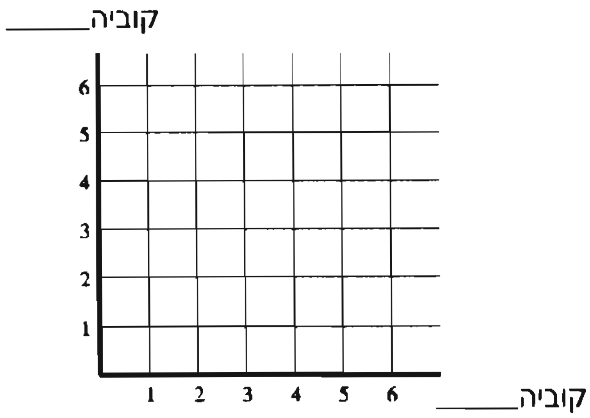


איור 4: הטלות מיוחדות

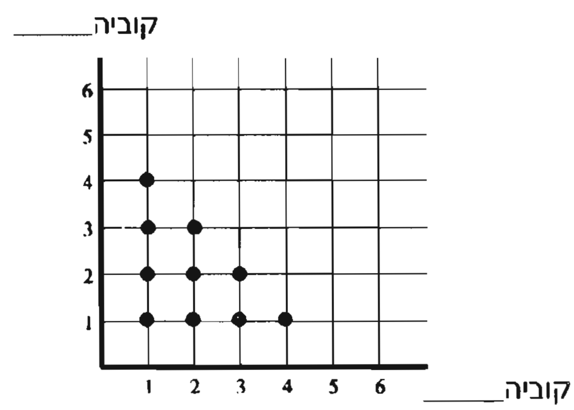
סמן ב-X או ב-O את ההטלות המתאימות.

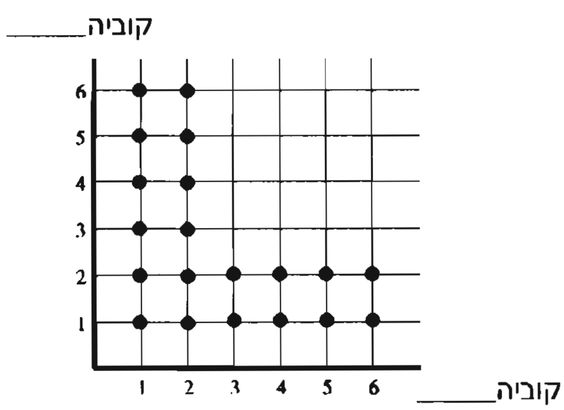
שתי הקוביות מראות מספרים הקטנים מ-4.





זהה תכונה משותפת להטלות המסומנות





התכונה המשותפת היא:

התכונה המשותפת היא:

בשלוש הפעילויות האחרונות, התלמיד משתמש בקוביית משחק לבניית מבנים מיוחדים ולחקירת סדרות מספרים הנוצרות על המבנים האלה. התלמיד חוקר שלושה מבנים:

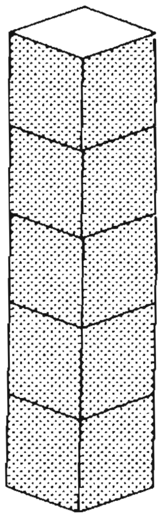
מגדלים - עמודים של קוביות,

רכבות - שורות של שלוש או ארבע קוביות,

סופר־קוביות - קוביות גדולות הבנויות משמונה קוביות משחק.

פעילות המגדלים עוסקת תחילה בסכומי המספרים של ארבעת "הקירות" של מגדל מסודר (עמוד של קוביות המסודרות כך שהמספרים הנמצאים על כל "קיר" זהים). בשלב הבא, התלמיד עורך חקירה דומה של מגדל לא מסודר (עמוד של קוביות הבנוי בסדר אקראי). השוואת התוצאות המתקבלות מובילה

למסקנה, כי סכום המספרים שעל ארבעת "הקירות" של מגדל נתון יהיה תמיד כפולה של 14, המתאימה לגובהו.

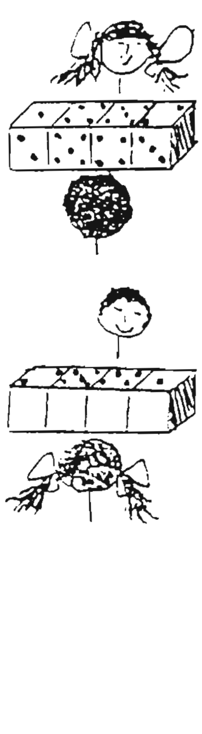


איור 5: מגדלים

בנה מגדל מחמש קוביות;
הצמד קוביות בלי כל סדר;
קיבלת מגדל לא מסודר.
מה סכום הנקודות על כל קירות המגדל שבנית ?
בנה מגדלים נוספים ומצא את סכום המספרים שעל קירות כל אחד מהם.
מה מצאת ? הסבר את תשובתך:

נסה למצוא ללא בניות עם קוביות מה סכום הנקודות שעל כל הקירות של מגדל בגובה של:
7 קומות__________ 10 קומות__________ 20 קומות __________

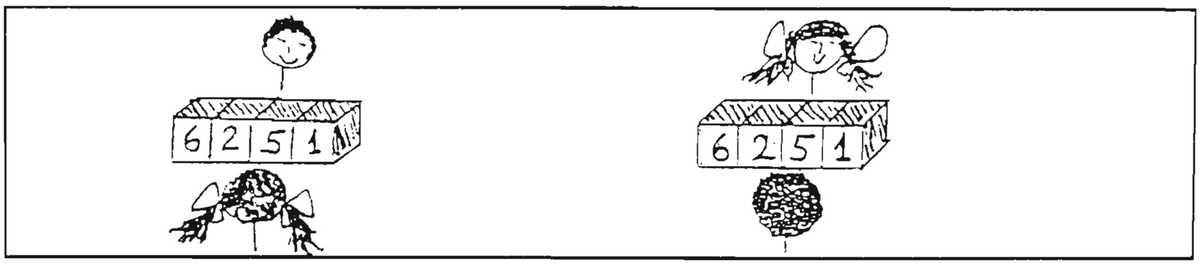
רכבות הן שורות של שלוש או ארבע קוביות, שעל צדיהן סדרות של מספרים עוקבים. עם בניית הרכבות, התלמידים מגלים תוצאה נוספת של סוד הקסם "המפורסם": אם נדאג לסידור מספרים עוקבים על שני צדדים סמוכים, שני הצדדים האחרים יסתדרו מעצמם... אם נשתמש באותו "סוד" ובראייה מרחבית, נוכל אף לנחש את הסדרה הרשומה על הצד הנגדי המוסתר של הרכבת (איור 6). שאלה מעניינת, שנוכל לענות עליה לקראת סוף הפעילות: אילו סדרות של מספרים (לאו דווקא עוקבים) יוצרות סדרות זהות על שני צדדים נגדיים של רכבת (ראה שאלה שנייה באיור 6).



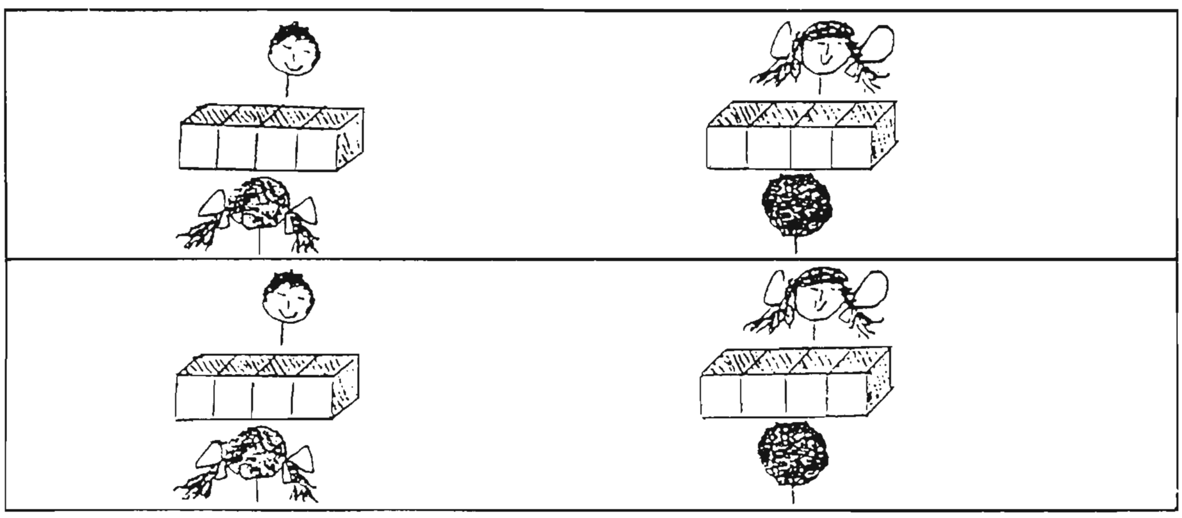
איור 6: רכבות

מיכל ויוסי יושבים משני צדי השולחן;
על השולחן מונחת שורה של ארבע קוביות משחק;
יוסי רואה את המספרים הבאים:

רשום על הציור מה רואה מיכל
(אפשר לרשום מספרים רגילים ולא נקודות).



בציור שלפניך מיכל ויוסי ראו את אותם המספרים ובאותו סדר (אף־על־פי שישבו משני צדי השולחן).
מצא שתי דוגמאות נוספות של סידור מספרים, היוצר משני צדי הרכבת את אותה הסדרה.



פעילות ה-סופר-קוביה משלבת חשבון, הסתברות וראייה מרחבית. בעזרת שמונה קוביות משחק התלמידים בונים קוביה גדולה, כך שעל שתיים מפאותיה יופיע רק המספר 1, ואילו על ארבע הפאות האחרות יופיעו המספרים 2 ו־3 בלבד. האם נוכל עתה למצוא את סכומי הנקודות המתקבלים כאשר מטילים שתי סופר־קוביות ? האם נוכל לחזות מראש מה יהיה הסכום "המקובל ביותר" בהטלות אלה ?

מסקנות

מורים שעבדו עם קוביות משחק וצפו בתלמידיהם, ציינו, כי במהלך הפעילויות השתמשו התלמידים בתהליכי חשיבה שונים והפעילו אסטרטגיות מגוונות לפתרון הבעיות שהוצבו לפניהם. חלק מן התהליכים והאסטרטגיות האלה היו:

- מיצוי אפשרויות שונות, ניתוחן והסקת מסקנות;
- ביצוע ניסויים הסתברותיים וניתוח התוצאות המתקבלות;
- גילוי, חקר ושימוש בחוקיות מספרית;
- התנסות במעברים בין ההצגה הגרפית, המספרית והמילולית של סיטואציה נתונה;
- שימוש בחישובים לפתרון בעיה משמעותית;
- הפעלת ראייה מרחבית.

היחידה "קוביות משחק" נוסתה עם תלמידי כיתות א׳-ג׳, שעבדו במגוון מסגרות: כתלמידים בודדים, כקבוצות קטנות של תלמידים בתוך כיתה הטרוגנית, או כקבוצות הומוגניות של תלמידים מתקדמים. פעילויות מסוימות אף נוסו בכיתות שלמות של תלמידים "רגילים". המורים והתלמידים שהשתתפו בניסוי היחידה הביעו שביעות רצון מן הפעילויות ומן הגישה והעקרונות שמאחוריהן.

ברוב הפעילויות, גילו התלמידים חוקים ותופעות בדרכים מקוריות, בהתאם ליכולתם המתימטית ובקצב המתאים להם. נביא כאן שתי דוגמאות, הממחישות את הטענה הזאת. כך, למשל, ראינו כי תלמידים מצאו את הסכום של כל המספרים שעל קירותיו של מגדל מסודר בדרכים שונות: מקצתם מצאו תחילה את הסכום של כל קיר או של כל קומה, ולאחר מכן חיברו את הסכומים האלה, בעוד אחרים השתמשו בסוד הקסם של סכומי 7 כבר בשלב זה. מקצת מן התלמידים גילו את קביעות הסכום כאשר השוו את תוצאתם עם התוצאות הזהות שהתקבלו במגדלים מסודרים אחרים. הרוב המשיכו להשתמש בחיבור גם במציאת סכומים של מגדלים לא מסודרים (מגדלים בנויים באקראי - ראה איור 5). תלמידים רבים גילו את החוקיות ואת ההסבר המתאים כאשר נוכחו, כי גם במקרה זה כל הסכומים המתקבלים זהים. תלמידים אחדים הסתפקו בגילוי התופעה ולא ניסו למצוא לה הסבר או להכליל אותה למגדלים גבוהים

יותר. תלמידים אלה קיבלו את ההסברים המתאימים מחבריהם, בשלב הדיון המסכם.

קיבלנו מגוון רחב של תשובות גם בחקירות הקשורות להסתברות (מציאת הסכום "המקובל ביותר" בהטלת זוג קוביות משחק או בהטלת זוג סופר-קוביות). בשלב הניסוי האמפירי, תלמידים מעטים בלבד יכלו לייחס את שכיחות התוצאות שקיבלו למספר האפשרויות השונות לקבלת כל סכום בעזרת המספרים הרשומים על הקוביה. רובם הסבירו את התפלגות התוצאות שהתקבלו כמקרים או כתוצאה של היותם של מספרים מסויימים "בני מזל" בהשוואה למספרים אחרים. ניתוח לוח החיבור של המספרים הרשומים על הקוביות עזר לרוב התלמידים להבין באופן אינטואיטיבי או לעומק את הקשר בין שכיחות הסכומים בלוח החיבור ובין ההסתברות לקבלתם בהטלת הקוביות.

הפעילויות שתוארו כאן אינן בעלות מטרות בלתי שגרתיות במיוחד ואינן מציגות גישה חדשה להוראת המקצוע. יחד עם זאת, ברצוני להדגיש שוב שני עקרונות עליהם מבוססות פעילויות מסוג זה:

א. תלמידים בעלי יכולת מתימטית גבוהה יחסית מתעניינים ונהנים לעבוד על פעילויות חקר מורכבות החל מן השנים הראשונות של לימודיהם.

ב. אפשר ורצוי לארגן פעילויות של חקר מתימטי במסגרות משמעותיות ובעלות נושא משותף, כאלטרנטיבה לשימוש בסדרת בעיות ותרגילים קצרים ובלתי- תלויים זה בזה.