לגופו של ענין
נושאים מתמטיים

בניה בעזרת סרגל ומחוגה

ד"ר אליאס עבוד
ד"ר נימר ביאעה

הקדמה

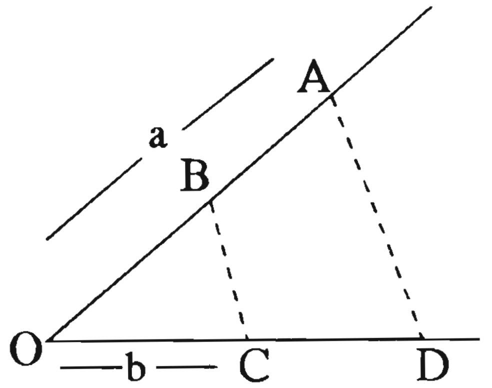
בניה בעזרת סרגל ומחוגה היא נושא עתיק יומין. היוונים בזמנו של אוקלידס השתמשו בסרגל ובמחוגה לחציית קטע, חציית זווית, הקמת אנך מנקודה על ישר, הורדת אנך מנקודה מחוץ לישר ובניית מצולעים משוכללים. נסכים כי כאשר אנו מדברים כאן על בניה, הכוונה היא בניה בעזרת סרגל ומחוגה. נניח כי אפשר לבנות קטע באורך 1, ויהיו נתונים שני קטעים באורכים a ו־b. בשיעורי הגאומטריה בבתי הספר שמים דגש, בין השאר, על בניית קטעים באורכים $a+b$, $a-b$ ($a>b$).
מטרת המאמר היא לתאר את הבניה של קטעים באורכים a/b ab ו־ $\sqrt{a}$, כמו כן להסביר כי אפשר לבנות קטעים רק מהצורה $x+y\sqrt{a}$ כאשר a, y, x ניתנים לבניה; ולהציג שלוש בעיות בניה חשובות, אשר העלו היוונים ואשר תרמו רבות לפיתוח תחומים חשובים במתמטיקה.

בניית קטע באורך ab

נתונים שני קטעים באורכים a ו־ b. לבניית קטע באורך ab, נצייר שתי קרניים מנקודה O.

על הקרן הראשונה נקצה קטע באורך a נסמנו ב־OA, וקטע באורך 1 נסמנו ב־ OB.
על הקרן השניה נקצה קטע באורך b נסמנו ב־OC. נחבר את B ו־C ויהא AD קטע מקביל ל־BC מ־A.

מדמיון משולשים נובע כי



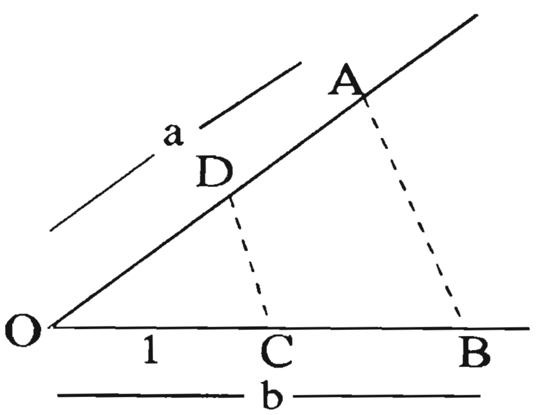
$$\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC} \longrightarrow \frac{a}{1}=\frac{OD}{b}$$

$$OD = ab$$

בניית קטע באורך *a/b*

נצייר שתי קרניים מנקודה O. על הקרן הראשונה נקצה קטע באורך a, נסמנו OA, ועל הקרן השניה נקצה קטע באורך b, נסמנו OB, וקטע אחר באורך 1 נסמנו ב־OC. מ־C נעביר מקביל ל־ AB, החותך את הקרן הראשונה ב־D.

מדמיון משולשים

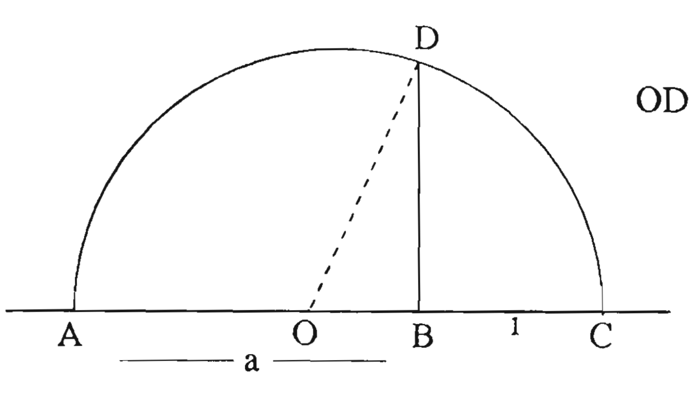


$$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC} \longrightarrow \frac{a}{OD}=\frac{b}{1}$$

$$OD=\frac{a}{b}$$

בניית קטע באורך $\sqrt{a}$

על ישר נתון נקצה שני קטעים סמוכים AB באורך a ו־BC באורך 1, ונבנה חצי מעגל שקוטרו AC (מרכזו ב־O). מ־B נעלה אנך החותך את המעגל ב־D. הטענה היא ש- $|DB| = \sqrt{a}$. ואמנם, OD הוא רדיוס ולכן הוא שווה לחצי הקוטר AC, לכן



$$OD = \frac{1}{2}(AC) = \frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{1}{2}(a + 1) = \frac{a+1}{2}$$

OA הוא גם רדיוס ולכן

$$OB = AB - OA = a - \frac{a+1}{2} = \frac{2a - a - 1}{2} = \frac{a - 1}{2}$$

נעיין עכשיו במשולש ישר הזוית $\triangle OBD$ לפי משפט פיתגורס: $|OB|^2+|BD|^2=|OD|^2$

כלומר:

$$\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+|BD|^2=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

$$|BD|^2=\frac{a^2+2a+1}{4}-\frac{a^2-2a+1}{4}$$

$$|BD|^2=\frac{4a}{4}=a$$

ולכן: $|BD|=\sqrt{a}$

מסקנות

מהאמור לעיל ניתן להסיק כי:

1. ניתן לבנות קטעים באורכים r/s (r,s שלמים).
2. ניתן לבנות קטע באורך $\sqrt{a}$ (a מספר רציונלי חיובי).
3. ניתן לבנות קטעים באורכים a/b, ab, $a-b$, $a+b$, כאשר a ו־ b ניתנים לבניה.

מ 3-1 נוכל להסיק כי ניתן לבנות קטע באורך $x+y\sqrt{a}$, כאשר x, y ניתנים לבניה.

נסביר כעת כי רק קטעים מאורך כזה ניתנים להיבנות. על מנת לבנות קטע, אנו צריכים לצייר מעגלים (קשתות של מעגלים), וקווים ישרים (קטעים של קווים ישרים). נקודות החיתוך של המעגלים והישרים מהוות נקודות התחלה לבניית קשתות וקטעים חדשים. מההנדסה האנליטית אנו יודעים כי חיתוך שתי משוואות של מעגלים, או משוואה של מעגל וקו ישר או של שני קוים ישרים - יתן פתרונות מהצורה $x+y\sqrt{a}$, כאשר x,y,a ניתנים לבניה.

לבסוף, על סמך מה שאמרנו לעיל ניתן לענות על שלוש בעיות שהעלו היוונים הקדמונים. ננסח את הבעיות ונשאיר את הדיון בהן למאמר נוסף:

1. האם ניתן להכפיל את הקוביה, כלומר: לבנות קוביה שנפחה פעמיים נפח קוביה נתונה?
2. האם ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה?
3. האם נוכל לרבע עיגול ? כלומר: לבנות ריבוע ששטחו שווה לשטח מעגל נתון?