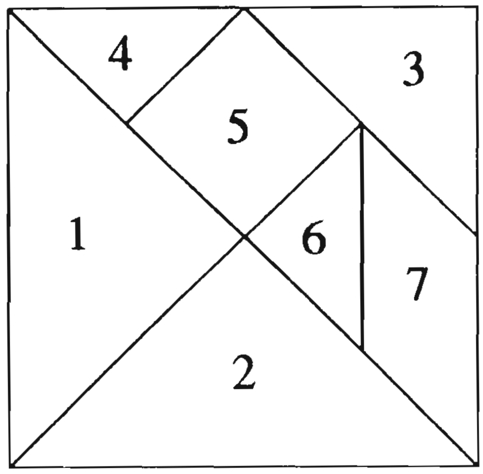
הטנגרם - כלי עזר בהוראת המתמטיקה

דליה אסמן

הטנגרם שמקורו בסין הינו ריבוע המורכב משבעה חלקים בצורות גיאומטריות שונות: שני משולשים גדולים, שני משולשים קטנים, משולש בינוני, ריבוע ומקבילית.



בנוסף להיותו משחק מהנה ומלהיב הוא כלי עזר נפלא בלימוד המתמטיקה ובייחוד בלימוד הגיאומטריה.

הוא עוזר בפיתוח ראייה מרחבית, יצירתיות, גילוי עצמי בדרך של ניסוי וטעייה, והוא מכשיר יעיל בהוראה ובתרגול של נושאים במתמטיקה כגון: מצולעים, שטחים, חפיפת מצולעים, משפט פיתגורס, שברים, אחוזים ויחס. הפעילות עם הטנגרם מגוונת ואפשר להתאימה לטווח גילים רחב, לכל כיתות בית־הספר היסודי וגם לחטיבת הביניים.

הטנגרם ניתן לרכישה בחנויות למשחקי ילדים, והוא עשוי מעץ, פלסטיק או קרטון. הטנגרם מופיע מודפס גם בספרים, למשל בספרי הלימוד, והילדים גוזרים את החלקים לפי ההוראות שבספר. אפשר להכין את הטנגרם לבד על־ידי קיפול וגזירה, ועצם ההכנה העצמית מוסיפה הנאה רבה לילדים.

אופן הכנת הטנגרם:

א. קח גליון נייר (מלבני 4A); קפל משולש מקצה הגליון, כך שיכסה בדיוק את המשולש תחתיו, גזור את המלבן העודף שנשאר (אין לנו צורך בו). מה קיבלת? למה הוא רבוע ? (ראה איור א').

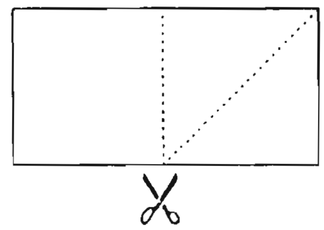
ב. קפל לאורך האלכסון וגזור. קיבלת שני משולשים גדולים. (ראה איור ב').

ג. גזור אחד משני המשולשים שקיבלת לאורך קו השיקוף שלו. קיבלת שני משולשים קטנים (ראה איור ג').

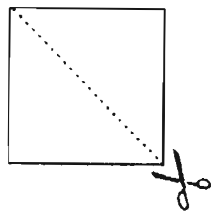
ד. קח את המשולש הגדול, קפל את הפינה בה הזוית מול הצלע הגדולה, כך שהקדקוד יגיע עד הצלע בדיוק. גזור לאורך קו הקיפול. קיבלת משולש קטן ו-איזו צורה? למה זה טרפז? איזה טרפז זה ? (ראה איור ד').

ה. קפל את הטרפז לאורך קו השיקוף שלו. פתח את הקיפול. קפל את המשולש בקצה הטרפז עד קו השיקוף וגזור את המשולש הקטן שקיפלת. גזור את הריבוע שנוצר - עד קו השיקוף (ראה איור ה').

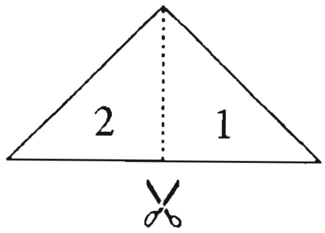
ו. מהי הצורה שנשארה לך ? איזה טרפז זה ? קפל פנימה משולש בצד של הזווית הישרה, כך שבסיסו יגיע עד אמצע הבסיס הגדול של הטרפז. (ראה איור ו') גזור אותו. נשארה לך מקבילית, שהיא החלק האחרון שחסר לך להשלמת הטנגרם.



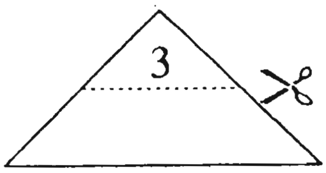
איור א'



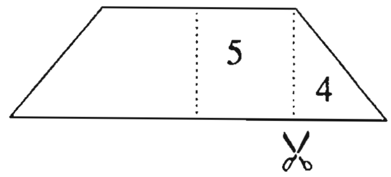
איור ב'



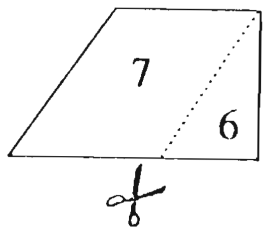
איור ג'



איור ד'



איור ה'



איור ו'

* קו מקווקו באיור הוא קו קיפול.

א. מצולעים

בנושא זה תיעשה חזרה על זיהוי המצולעים ותכונותיהם.

- מאילו מצולעים בנוי הטנגרם ?
- בדוק את צלעות המשולשים, אילו משולשים הם ?
- על פי אילו תכונות קבעת שהריבוע הוא אכן ריבוע ?
- על פי מה קבעת שהמרובע (שאינו ריבוע) הוא מקבילית ?
- נסה לבנות מצולעים מחלקי הטנגרם.
- האם הצלחת לבנות מחומש ? משושה ? משובע ?

ב. זוויות

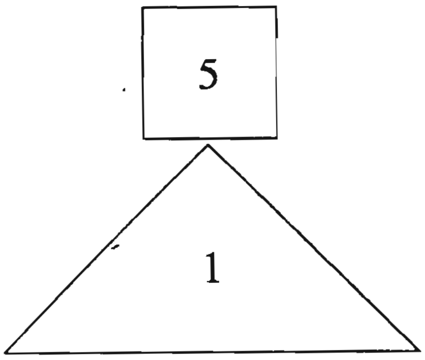
- מה גודל הזוויות במשולשים ? המשולשים הם שווי שוקיים וישרי זווית, על כן זוויות הבסיס שוות. (אפשר לבדוק זאת על ידי קיפול המשולש) לכן כל זווית ליד הבסיס היא בת 45°. $(180^\circ - 90^\circ): 2 = 45^\circ$

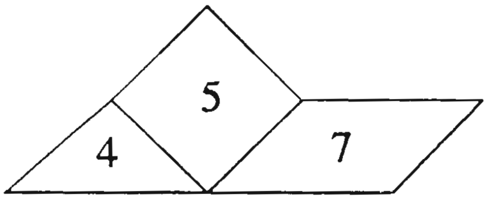
- המקבילית, מה גודל זוויותיה ? במקבילית הזווית החדה שווה 45°. אפשר לבדוק זאת על־ידי הנחת הזווית החדה של המשולש על זו של המקבילית ולראות, שהן שוות בגודלן, או על־ידי הנחת הזווית של המקבילית ליד זו של המשולש ולראות שקיבלנו יחד זווית ישרה. ומה גודל הזווית הקהה ? אם התלמיד למד, שזוויות חד צדדיות סכומן 180°, הוא יוכל לחשבה בקלות.

אם לא למד על זוויות במקבילית, הוא יוכל להניח את הזווית החדה של המשולש ליד הזווית הקהה במקבילית ותתקבל זווית שטוחה, דהיינו 180°. ולכן הזווית הקהה היא בת 135°. $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

ג. *שטחים*

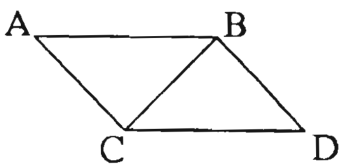
- מצא צורות שונות שוות שטח בטנגרם. כיצד תוודא שענית נכון ? אתה יכול להיעזר במשולש הקטן של הטנגרם כיחידת שטח.
- לכמה יחידות כאלה שווה המשולש הגדול ? הריבוע ?
- לאיזו משתי הצורות הבאות שטח גדול יותר ?





ופעילות לכיתות גבוהות יותר (ה׳-ו׳) לאחר שנלמדה הדרך לחישוב שטח ריבוע מקבילית ומשולש.

- המקבילית גדולה פי שניים בשטחה משטח המשולש הקטן, מדוע ? - כי בסיסם שווה (CD) והגובה שלהם שווה.

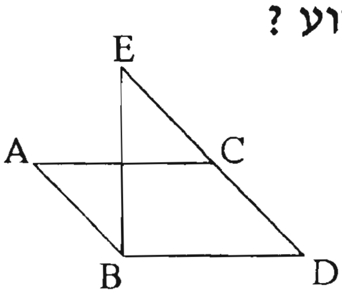


- שטחו של מי גדול יותר המשולש הבינוני או המקבילית ? מדוע ?

בסיסם שווה = BD

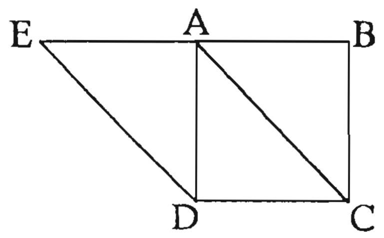
גובה המשולש הוא פי שניים מגובה המקבילית.

על כן שטחם שווה.



$$\frac{BD\cdot\cancel{2}h}{\cancel{2}} = BD\cdot h$$

שטח המשולש   שטח המקבילית



- שטח המקבילית EACD שווה לשטח הריבוע ABCD מדוע ?
  בסיסם שווה = CD
  גובהם שווה = AD
  לכן שטחם שווה.

ד. חפיפת מצולעים

כאשר שתי צורות מכסות זו את זו בדיוק הן חופפות.

- מצא בטנגרם צורות חופפות זו לזו.
- בנה (מחלקי הטנגרם) ריבוע החופף לריבוע של הטנגרם.
- בנה (מחלקי הטנגרם) מקבילית החופפת לזו של הטנגרם.
- בנה בעזרת חלקי הטנגרם משולש החופף למשולש הגדול בטנגרם.
- בנה בעזרת חלקי הטנגרם ריבוע חופף לריבוע הבנוי משני משולשים גדולים של הטנגרם.

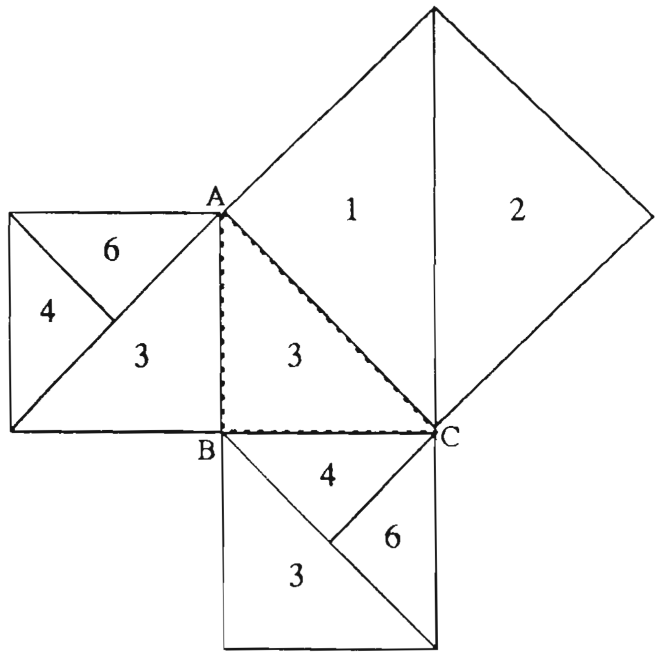
ה. פיתוח תפיסה מרחבית

בנה בעזרת כל חלקי הטנגרם: מלבן, מקבילית (שאינה מלבן) משולש ומשושה. זו משימה קשה ביותר ! (הפתרונות בסוף המאמר).

זוהי פעילות רבה של ניסוי ותעייה. דוגמא נוספת לפעילות בטנגרם היא בנייה בעזרת כל חלקי הטנגרם של אחת מהצורות הבאות (יש אלפים רבים של צורות כאלה...).

ו. משפט פיתגורס

לצורך פעילות זו יש צורך בשלוש ערכות של טנגרם.



בעזרת המשולשים הקטנים, שישמשו כיחידת שטח, אפשר להיווכח, כי סכום שטחי הריבועים הניצבים של המשולש המקווקו, שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר שלו.

שטח הריבוע הבנוי על צלע AB שווה לארבעה משולשים קטנים.

שטח הריבוע הבנוי על צלע BC שווה לארבעה משולשים קטנים.

שטח הריבוע הבנוי על צלע AC שווה לשמונה משולשים קטנים, כלומר סכום שטחי הריבועים הבנויים על שני הניצבים.

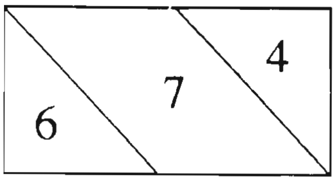
$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

ז. שברים

אפשר לבטאם הן כשבר פשוט והן כשבר עשרוני, לפי הצורך. נתייחס לטנגרם כולו כיחידה.

- לאיזה חלק של הטנגרם שווה המשולש הגדול ?
- לאיזה חלק של הטנגרם שווה המשולש הבינוני? המשולש הקטן ?
- לאיזה חלק של הטנגרם שווה הריבוע ? המקבילית ?
- בנה צורה מחלקי הטנגרם כך, שתהווה 5/8 של הטנגרם.
- בנה צורה שתהווה 3/4 של הטנגרם.

ח. אחוזים



- כמה אחוזים של הטנגרם השלם מהווה כל חלק שלו ?
- לכמה אחוזים של הטנגרם שווה מלבן זה ?
- מצא צירופים המהווים יחד 18.75% , 37.5% , 12.5%.

ט. יחס

- מהו היחס בין שטח הריבוע בטנגרם לשטח המקבילית ?
- מהו היחס בין המשולש הגדול למשולש הקטן ?
- מצא צורות שהיחס ביניהן 1 : 2 .
- מצא צורות שהיחס ביניהן 4 : 1 .

י. העשרה

נסה לבנות ריבוע מחלק אחד של הטנגרם.
משני חלקים של הטנגרם.
משלושה חלקים של הטנגרם.
מארבעה חלקים של הטנגרם.
מחמישה חלקים של הטנגרם.
משישה חלקים של הטנגרם.
משבעה חלקים של הטנגרם.

התוכל לבנות ריבוע משישה חלקי טנגרם ? סביר להניח שלא !
(הפתרונות בסוף המאמר).

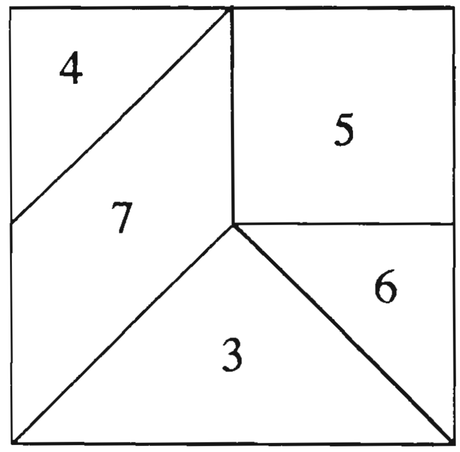
יא. "טנגרם" בן חמישה חלקים

אפשר גם לשחק וללמוד בעזרת "טנגרם" בן חמישה חלקים.

הפעילות בו פשוטה וקלה מזו של הטנגרם "הסיני" בן שבעת החלקים, אך היא מוגבלת יותר.

אפשר להוסיף פעילות בטנגרם כהעשרה, או כאמצעי להוראת נושא השטח, המצולעים זוויות וכו' בכיתות נמוכות.

טנגרם זה מורכב ממשולש גדול, שניים קטנים, מקבילית וריבוע.



אפשר לנצלו לפעילויות דומות לאילו שבטנגרם בן שבעת החלקים ! למדוד שטחים ביחידות של משולש קטן, למצוא חלקים שווי שטח, לבנות מהחלקים מצולעים שונים.

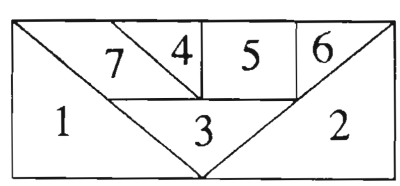
פעילות ברמת קושי גבוהה היא:

- בנה מכל חלקי הטנגרם (5 חלקים) מלבן, טרפז, משולש, משושה ומקבילית (שאינה מלבן). (פעילות זו קלה יותר מזו שבטנגרם בן שבעת חלקים). (פתרון בהמשך).

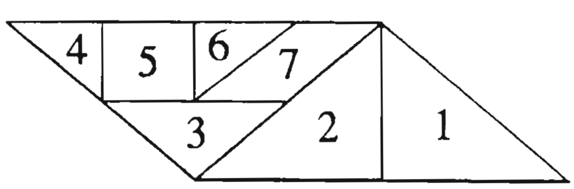
לסיכום ראינו כי הטנגרם, הוא לכאורה "מכשיר" פשוט כל כך, ועם זאת רב שימושים, מרבה הנאה, חדוות יצירה וגילוי.

פתרונות

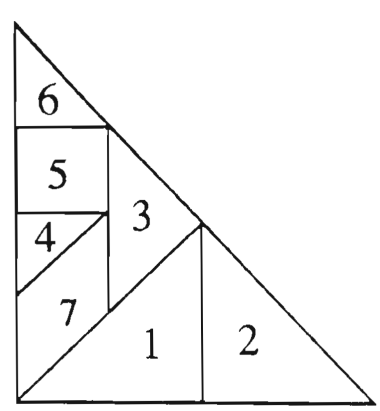
1. בניית מצולעים מכל חלקי הטנגרם:



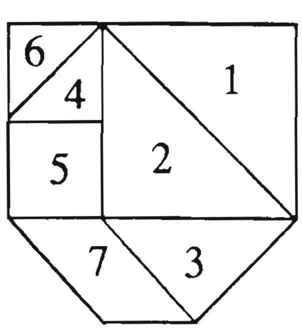
מלבן



מקבילית



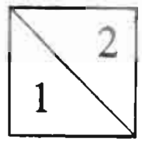
משולש



משושה

2. העשרה - רבועים מכמה חלקים:

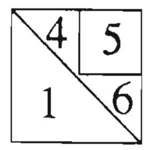
חלק 1

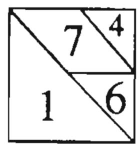


או 4 ו-6

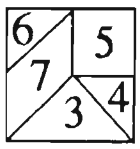
2 חלקים

3 חלקים



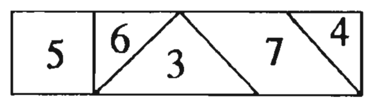


4 חלקים

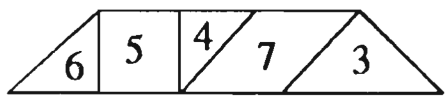


5 חלקים

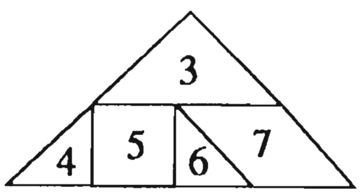
3. בניית מצולעים מ"טנגרם" של חמישה חלקים:



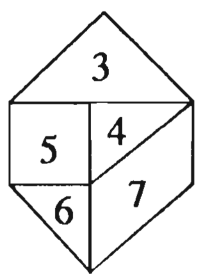
מלבן



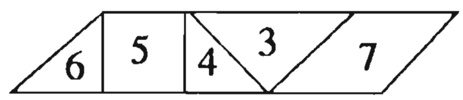
טרפז



משולש



משושה



מקבילית

ביבליוגרפיה:

Jamaki , W.D. (1979), Six hard pieces, Arithmetic teacher, 37 (2), pp. 34-35.

Russell, D.S, & Bolonga, E,M (1982), Teaching geometry with tangrams, Arithmetic teacher, 30 (2) 34-36.

הצעות לפעילות נוספת בטנגרם:

משרד החינוך והתרבות, האגף לתכניות לימודים (תשנ"א), דף מהאגף (ב), חשבון מי יודע, ע"מ 17-32, ירושלים.

משרד החינוך והתרבות והמרכז לטכנולוגיה חינוכית (1993), אחת שתיים ושלוש... ספר 5.

Krieger Shelley (1991). The tangram it's more than an ancient puzzle, Arithmetic teacher. 38 (9), pp. 38-43.

Woodman , A, & Albany, E (1992). Mathematics through art and design pp. 64-66, 90- 92, Collins Educational, London.